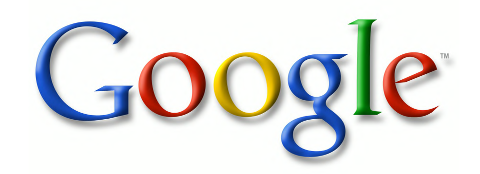
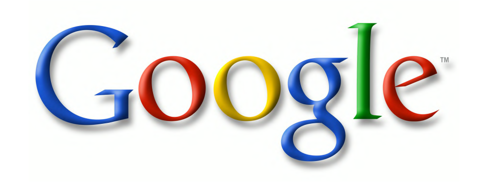








ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

2e SÉRIE

TOME V

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

A BORDEAUX

CHEZ DUTHU, LIBRAIRE

17, rue Sainte-Catherine, 17

1883

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

au 1er Décembre 1883.

Composition du Bureau pour l'année 1883-1884.

MM. RAYET, ✻, *Président.*
FOURNET, A., *Vice-Président.*
ABRIA, O. ✻, *Secrétaire général.*
FORQUIGNON, } *Secrétaires adjoints*
CAGNIEUL, }
HOÜEL, *Archiviste.*
FOUGEROUX, *Trésorier.*

Membres du Conseil :
AZAM, ✻,
BAYSSELLANCE, O. ✻,
DUPUY,
GAYON,
HAUTREUX, ✻,
JOLYET,
KOWALSKI,
DE LACOLONGE, ✻,
DE LAGRANDVAL, ✻,
LESPIAULT, ✻,
MERGET, ✻,
MILLARDET,

Membres titulaires (1).

MM. ABRIA, O. ✻, correspondant de l'Institut (Académie des Sciences), doyen de la Faculté des Sciences.
ALEXANDRE, chimiste.
ARMAINGAUD, docteur en médecine, agrégé.
AUGIS, ingénieur de la Compagnie des Chemins de fer du Midi.
AZAM, ✻, professeur à la Faculté de Médecine.
BADAL, ✻, professeur à la Faculté de Médecine.
BARCKHAUSEN, ✻, professeur à la Faculté de Droit, adjoint au maire de Bordeaux.
BAULE, ✻, lieutenant de vaisseau, com. aux Messageries maritimes.
BAYSSELLANCE, O. ✻, ingénieur des Constructions navales en retraite, adjoint au maire de Bordeaux.
BERGONIÉ, agrégé à la Faculté de Médecine.

(1) Les membres dont le nom est précédé d'un astérisque sont membres à vie.

MM. BLAREZ, chef des travaux chimiques à la Faculté de Médecine.
BONEL, ✻ ✻, directeur de la succursale de la Société des Téléphones.
BOUCHARD, professeur à la Faculté de Médecine.
BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour d'Appel.
CAGNIEUL, préparateur de Botanique à la Faculté des Sciences.
CARON, professeur de Mathématiques au Lycée.
CASTET, chef d'institution.
CHADU, professeur de Mathématiques au Lycée.
CHAGNOLEAU, préparateur à la Faculté des Sciences.
CHASTELLIER, ingénieur des Ponts et Chaussées.
CHATARD, docteur en médecine.
CLAVERIE, professeur de Physique au Lycée.
COLOT, licencié ès sciences, professeur de Mathématiques.
COUPÉRIE, secrétaire général de la Société d'Agriculture.
DALMEYDA, professeur au Lycée.
DELÉZINIER, préparateur au Lycée.
DELMAS, docteur en médecine, directeur de l'hydrothérapie des Hôpitaux.
DROGUET, ✻, inspecteur des Postes et Télégraphes, à Bordeaux.
DUBOURG, chimiste à la Douane.
DUPETIT, préparateur de Chimie à la Faculté des Sciences.
DUPUY, professeur de Mathématiques au Lycée.
ELGOYHEN, élève à la Faculté des Sciences.
FIGUIER, ✻, agrégé de la Faculté de Médecine.
FORQUIGNON, docteur ès sciences, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.
FOUGEROUX, percepteur des Contributions directes.
*FOURNET, ✻ A., ancien fabricant de produits chimiques.
GADEN, négociant, adjoint au maire de Bordeaux.
GARNAULT, préparateur de Zoologie à la Faculté des Sciences.
GAULNE (DE), propriétaire.
GAYON, professeur de Chimie à la Faculté des Sciences, chimiste en chef à la Douane.
GLOTIN, ✻, lieutenant de vaisseau en retraite.
GOGUEL, licencié ès sciences physiques.
GOUJON, vice-président du Conseil de préfecture de la Gironde.
GUESTIER (Daniel), négociant.
GUILLAUD, professeur à la Faculté de Médecine.
GYOUX, docteur en médecine et en chirurgie.
HAILLECOURT, inspecteur d'Académie en retraite.
HAUTREUX, ✻, lieutenant de vaisseau, directeur des mouvements du port de Bordeaux.
HOÜEL, professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences.
HUYARD, fabricant de produits chimiques.
JOLYET, professeur à la Faculté de Médecine.
KOWALSKI, professeur de Mathématiques.
KÜNSTLER, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.

MM. LABAT, ingénieur de constructions maritimes.
LACOLONGE (DE), ✻, chef d'escadron d'artillerie en retraite.
LACROIX, professeur de Mathématiques au Lycée.
LAGACHE, ingénieur des Arts et Manufactures.
LAGRANDVAL (DE), ✻, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée, maître de conférences à la Faculté des Sciences.
LAGROLET, docteur en médecine.
LANDE, ✻, agrégé à la Faculté de Médecine, médecin adjoint des hôpitaux.
LARNAUDIE, pharmacien.
LAVAL, professeur de Physique et de Chimie aux Écoles communales.
LAVERGNE (comte DE), ✻, propriétaire.
LAW, propriétaire de l'Hôtel de Nantes.
LEFOUR, agrégé à la Faculté de Médecine,
*LESPIAULT, ✻, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences.
LOQUIN, secrétaire général de la Société musicale de Sainte-Cécile.
MERGET, ✻, professeur de physique à la Faculté de Médecine.
MÉTADIER, docteur en médecine.
MICÉ, ✻, professeur de Chimie à la Faculté de Médecine.
MILLARDET, professeur de Botanique à la Faculté des Sciences.
MONDIET, professeur de Mathématiques au Lycée.
MORISOT, professeur de Physique au Lycée.
PEAUCELLIER, O. ✻, général du Génie.
PÉREZ, professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences.
PERRIN, ingénieur des Ponts et Chaussées.
PICARD, botaniste, ancien professeur en congé.
PIÉCHAUD, docteur en médecine.
RAGAIN, licencié ès sciences, professeur de dessin graphique.
RAULIN, ✻, professeur de Minéralogie et de Géologie à la Faculté des Sciences.
RAYET (G.), ✻, professeur d'Astronomie à la Faculté des Sciences, directeur de l'Observatoire de Bordeaux.
REDON, secrétaire de la Société musicale de Sainte-Cécile.
ROCH, chimiste.
ROYER, licencié ès sciences, chef d'institution.
SCHRADER (Ferd.), ancien négociant.
SIMONNET, préparateur de Chimie à la Faculté des Sciences.
SOUS, docteur en médecine oculiste.
SOUCHET (DU), négociant.
*TANNERY (P.), ingénieur des Manufactures de l'État, au Havre.
TESTUT, agrégé à la Faculté de Médecine.
TRENQUELLÉON (DE BATZ DE), professeur de Mathématiques au Lycée.
VANDERCRUYCE, armateur.
VERGELY, professeur à la Faculté de Médecine.
VIAULT, maître de Conférences à la Faculté de Médecine.
VOLONTAT (DE), ingénieur des Ponts et Chaussées.

Membres honoraires.

MM. BATTAGLINI (G.), professeur à l'Université de Rome, rédacteur du *Giornale di Matematiche.*

BERT (Paul), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

BONCOMPAGNI (le prince D. Balthazar), à Rome.

DARBOUX (G.), ✻, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

DE TILLY, major d'Artillerie, directeur de l'arsenal d'Anvers.

FORTI (Angelo), ancien professeur de Mathématiques au Lycée Royal de Pise.

FRENET, ✻, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, à Périgueux.

KOWALSKI, directeur de l'Observatoire de l'Université impériale de Kazan (Russie).

LINDER, O. ✻, ingénieur en chef des Mines.

RUBINI (R.), professeur de l'Université Royale de Naples.

WEYR (Em.), professeur à l'Université Impériale de Vienne.

Membres correspondants.

MM. ARDISSONE, professeur de Botanique à l'École Royale supérieure d'Agriculture de Milan.

ARIÈS, capitaine du Génie.

BJERKNES, professeur à l'Université de Christiania.

BOURGET, ✻, recteur de l'Académie de Clermont.

CURTZE (Max.), professeur au Gymnase de Thorn.

DILLNER (G.), professeur à l'Université d'Upsal.

ERNST (A.), professeur d'Histoire naturelle à l'Université de Caracas.

GARBIGLIETTI, docteur en médecine, à Turin.

GAUTHIER-VILLARS, O. ✻, ancien élève de l'École Polytechnique, libraire éditeur, à Paris.

GOMES TEIXEIRA (F.), professeur à l'Université de Coimbre.

GRAINDORGE, professeur à l'École des Mines, à Liège.

GÜNTHER (Dr. Sig.) professeur au Gymnase d'Ansbach.

HAYDEN, géologue du Gouvernement des États-Unis.

IMCHENETSKY, membre de l'Académie Impériale de Saint-Pétersbourg.

LAISANT, ✻, ancien officier du Génie, député de la Loire-Inférieure.

MUELLER (baron Ferd. von), membre de la Société Royale de Londres, directeur du Jardin Botanique de Melbourne (Australie).

PONSOT (Mme), propriétaire aux Annereaux, près Libourne.

ROIG Y TORRES (D. Rafael), naturaliste à Barcelone, rédacteur de la *Crónica Cientifica.*

ROUMEGUÈRE, naturaliste, à Toulouse, rédacteur de la *Revue Mycologique.*

TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (comte DE), à Milan.

WEYR (Éd.), professeur à l'Université de Prague.

LISTE

Des Établissements scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société des Sciences physiques et naturelles *est en relations d'échange.*

Adelaïde. — Philosophical Society of Adelaide, South Australia.
Alais. — Société scientifique et littéraire d'Alais.
Alger. — Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques
Amiens. — Société industrielle d'Amiens.
— Société Linnéenne du Nord de la France.
— Société Médicale d'Amiens.
Amsterdam. — Koninklijke Akademie van Wetenschappen.
— Wiskundig Genootschap onder de Zinspreuk : « Een onvermoeide arbeid komt alles te boven. »
Arbois. — Société de Viticulture et d'Horticulture d'Arbois.
Augsbourg. — Naturhistorischer Verein in Augsburg.
Bagnères-de-Bigorre. — Société Ramond.
Bâle. — Naturforschende Gesellschaft in Basel.
Barcelone. — Crónica científica.
Batavia. — Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië.
— Observatorium te Batavia.
Belfast. — Natural History and Philosophical Society.
Belfort. — Société Belfortaine d'Émulation.
Berlin. — Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften.
— Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von *C. Ohrtmann, F. Müller* und *A. Wangerin.*
Berne. — Naturforschende Gesellschaft in Bern.
— Schweizerische Naturforschende Gesellschaft.
Besançon. — Société d'Émulation du département du Doubs.
Béziers. — Société d'étude des Sciences naturelles de Béziers.
Bologne. — Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.
Bonn. — Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westfalens.
Bordeaux. — Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux.
— Gazette hebdomadaire des Sciences médicales de Bordeaux.
— Journal de Médecine de Bordeaux.
— Journal d'Histoire naturelle de Bordeaux et du Sud-Ouest.
— Société de Géographie commerciale de Bordeaux.
— Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.
— Société de Pharmacie de Bordeaux.

Bordeaux. — Société Linnéenne de Bordeaux.
Boston. — American Academy of Arts and Sciences
— Boston Society of Natural History.
Brême. — Naturwissenschaftlicher Verein zu Bremen.
Breslau. — Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.
Brest. — Société académique.
Brünn. — Naturforschender Verein.
Brunswick. — Verein für Naturwissenschaft zu Braunschweig.
Bruxelles. — Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.
— Observatoire Royal de Bruxelles.
— Société Belge de Microscopie.
— Société Entomologique de Belgique.
— Société Malacologique de Belgique.
— Société Scientifique de Bruxelles.
Budapest. — Magyar Tudományos Akadémia.
— Kir. Magyar természettudományi Társulat.
— Magyar Kiralyi Földtani Intézet.
Caen. — Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
— Société Linnéenne de Normandie.
Cambridge. (Angl.) — Philosophical Society of Cambridge.
Cambridge. (Mass.) — Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.
— « Science ».
Cassel. — Verein für Naturkunde in Cassel.
Catane. — Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania.
Chemnitz. — Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Chemnitz.
Cherbourg. — Société des Sciences naturelles.
Christiania. — Det Kongelige Norske Universitet.
— Videnskabs-Selskabet i Christiania.
Coimbra. — Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.
Colmar. — Société d'Histoire naturelle de Colmar.
Copenhague. — Det Kongelige Danske Videnskabernes-Selskab.
Danzig. — Naturforschende Gesellschaft.
Dax. — Société de Borda à Dax.
Dijon. — Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
Dresde. — Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis in Dresden.
Dublin. — Royal Irish Academy.
— Royal Dublin Society.
— Royal Geological Society of Ireland.
Edimbourg. — Royal Society of Edinburgh.
Elberfeld. — Naturwissenschaftlicher Verein in Elberfeld.
Erlangen. — Physikalisch-medicinische Societät zu Erlangen.
Florence. — Istituto di Studi superiori.
Foix. — Société Ariégeoise des Sciences, Lettres et Arts.
Francfort-sur-le-Mein. — Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft in Frankfurt-am-Main.

Francfort-sur-le-Mein. — Frankfurter Verein für Geographie und Statistik.
Fribourg-en-Brisgau. — Naturforschende Gesellschaft zu Freiburg im Brisgau.
Genève. — Société de Physique et d'Histoire naturelle.
Giessen. — Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Glasgow. — Institution of Engineers in Scotland.
— Philosophical Society of Glasgow.
Goettingue. — K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Graz. — Akademischer naturwissenschaftlicher Verein in Graz.
Grenoble. — Académie Delphinale.
— Société de Statistique, des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère.
Halle. — Naturforschende Gesellschaft zu Halle.
— Verein für Erdkunde zu Halle a. S.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle.
Harlem. — Société Hollandaise des Sciences.
— Musée Teyler.
Heidelberg. — Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg.
Helsingfors. — Finska Vetenskaps-Societeten.
Innsbruck. —Naturwissenschaftlich-medizinischerVerein in Innsbruck.
Kazan. — Université Impériale de Kazan.
Kharkof. — Société mathématique près l'Université Impériale de Kharkof.
Kiel. — Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.
Königsberg. — Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.
Lausanne. — Société Vaudoise des Sciences naturelles.
Le Caire. — Institut Égyptien.
Leide. — Sterrenwacht te Leiden.
— Dierkundige Vereeniging.
Leipzig. — Astronomische Gesellschaft.
— Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.
— Naturforschende Gesellschaft zu Leipzig.
Liège. — Fédération des Sociétés d'Horticulture de Belgique.
— Société Géologique de Belgique.
— Société Royale des Sciences de Liège.
Lille. — Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts.
Lisbonne. — Academia Real das Sciencias de Lisboa.
Liverpool. — Literary and Philosophical Society of Liverpool.
Londres. — Royal Society of London.
— Royal Astronomical Society.
— Linnean Society of London.
— London Mathematical Society.
— Royal Microscopical Society.
— Society for Psychical Research
Lund. — Lunds Universitet.

Luxembourg. — Institut Royal Grand-Ducal.
Lyon. — Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts.
Manchester — Literary and Philosophical Society of Manchester.
Marseille. — Société scientifique industrielle de Marseille.
Milan. — Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.
— Società Italiana di Scienze naturali.
— Società Crittogamologica Italiana.
— Gazzetta degli Ospitali.
Modène. — Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena.
— Società dei Naturalisti in Modena.
Montpellier. — Académie des Sciences et Lettres.
Moscou. — Société Impériale des Naturalistes.
— Société Mathématique de Moscou.
Mulhouse. — Société Industrielle de Mulhouse.
Münster. — Westfalischer Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst.
Nancy. — Académie de Stanislas.
— Société des Sciences (ancienne Société des Sciences naturelles de Strasbourg).
Naples. — Società Reale di Napoli: Accademia delle Scienze fisiche e matematiche.
— Reale Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche di Napoli.
Neuchâtel. — Société des Sciences naturelles.
New Haven. — Connecticut Academy of Arts and Sciences.
New York. — Academy of Sciences of New York.
— American Museum of Natural History.
Nice. — Société des Lettres, Sciences et Arts des Alpes-Maritimes.
Odessa. — Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie.
Offenbach. — Offenbacher Verein für Naturkunde.
Padoue. — Società Veneto-Trentina di Scienze naturali.
Paris. — Académie des Sciences.
— Association Française pour l'avancement des Sciences.
— Association scientifique de France.
— Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.
— Club Alpin Français.
— Conservatoire des Arts et Métiers.
— École Polytechnique.
— Journal de Physique théorique et appliquée, fondé par Ch. d'Almeida.
— Journal des Savants.
— Revue des Travaux scientifiques.
— Société Chimique de Paris.
— Société d'Anthropologie.
— Société de Biologie.
— Société Mathématique de France.
— Société Philomathique.

Philadelphie. — Academy of Natural Sciences.
— American Philosophical Society, held at Philadelphia for promoting of useful Knowledge.
Pise. — Reale Università di Pisa.
— R. Scuola Normale Superiore di Pisa.
— Società Toscana di Scienze naturali.
Porto. — Revista da Sociedade da Instrucção do Porto.
Prague. — Königl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
— Jednota Českých mathematiků.
— K. k. Sternwarte zu Prag.
Privas. — Société des Sciences naturelles et historiques de l'Ardèche.
Rio de Janeiro. — Observatoire Impérial.
La Rochelle. — Académie de La Rochelle.
Rome. — Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.
— Reale Accademia dei Lincei.
— Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*.
Rotterdam. — Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte.
Rouen. — Société des Amis des Sciences naturelles.
Saint-Louis. — Academy of Science.
Saint-Pétersbourg. — Académie Impériale des Sciences.
Semur. — Société des Sciences historiques et naturelles de Semur (Côte-d'Or).
Sienne. — Bollettino del naturalista collettore.
Stockholm. — Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademien.
— Entomologiska Föreningen i Stockholm.
Stuttgart. — Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.
Thorn. — Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst in Thorn.
Tokio. — Seismological Society of Japon.
Toulouse. — Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres.
— Société d'Histoire naturelle.
— Société des Sciences physiques et naturelles.
— Société Hispano-Portugaise de Toulouse.
— Revue mycologique, publiée par M. Roumeguère.
Tours. — Société Médicale du département d'Indre-et-Loire.
Turin. — Reale Accademia delle Scienze di Torino.
— Osservatorio della Regia Università di Torino.
Upsal. — Kongl. Vetenskaps-Societeten.
Valenciennes. — Société d'Agriculture, Sciences et Arts.
Venise. — Regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.
Versailles. — Société des Sciences naturelles et médicales de Seine-et-Oise.
Vienne. — Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.
— Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.
Washington. — Smithsonian Institution.
— Commissioner of Agriculture.

Washington. — Patent Office.
— Surgeon General Office.
— Department of Agriculture.
— U. S. Geological Survey of Territories.
— U. S. Naval Observatory.
Wurzbourg. — Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.
Zurich. — Naturforschende Gesellschaft in Zürich.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1881-82.

Présidence de M. de LAGRANDVAL.

Séance du 24 novembre 1881. — La Société procède au renouvellement de son Bureau; sont élus :

Président	M. DE LAGRANDVAL.
Vice-Président	M. RAYET.
Secrétaire général	M. ABRIA.
Secrétaires adjoints	MM. COYNE et SABATIER.
Archiviste	M. HOÜEL.
Trésorier	M. POTOCKI.
Membres du Conseil d'administration.	MM. GAYON, GLOTIN, HAUTREUX, KOWALSKI, LESPIAULT, LOQUIN, MERGET, MICÉ, MILLARDET et PEREZ.

— M. P. Tannery communique un *Mémoire sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède.* Ce Mémoire est inséré dans le t. V (2ᵉ série) des *Mémoires de la Société.*

Séance du 8 décembre 1881. — MM. Cagnieul et Chagnoleau sont élus membres titulaires.

— M. Gayon, après avoir comparé les méthodes de culture des micro-organismes employés dans le laboratoire de M. Pasteur, indique les premiers résultats de ses recherches sur les infiniment petits parasites du phylloxera.

Si on écrase un phylloxera dans une goutte d'eau, ou mieux de potasse étendue, et qu'on examine la préparation au microscope, avec un grossissement de 4 à 500 diamètres, on ne voit pas des microbes dans les individus jeunes et agiles, mais, dans les individus âgés et peu mobiles, on rencontre des bâtonnets caractéristiques, deux ou trois fois environ sur cent. Les moisissures sont beaucoup plus rares.

Après avoir acquis la certitude que certains phylloxeras renferment des organismes microscopiques, M. Gayon a fait des ensemencements et des cultures dans des liquides nutritifs, tels que infusion acide ou neutre de feuilles de vigne, bouillon de poule neutralisé par la potasse. Ce dernier liquide a donné seul des résultats positifs.

Dans une première série d'expériences, des phylloxeras entiers ont été soumis avec les précautions d'usage, c'est-à-dire en flambant toutes les surfaces qui avaient subi le contact de l'air, et qui, par suite, auraient pu apporter des germes de microbes étrangers à l'insecte. Tous les ballons ainsi préparés se sont altérés.

Dans une seconde série d'expériences, les précautions ont encore été exagérées, et une fraction seulement des liquides des phylloxeras étaient versés dans les ballons de culture. L'altération a encore été générale.

Malgré le soin apporté à ces expériences, M. Gayon estime qu'elles sont trop délicates pour permettre d'affirmer que les organismes obtenus provenaient bien des phylloxeras, et non de quelque germe extérieur épargné par le flambage. De nouvelles recherches seront faites dans les campagnes prochaines.

Parmi les organismes observés par M. Gayon, il en est un qui a déterminé une transformation curieuse du bouillon de poule et du lait. Ces liquides verdissent et laissent déposer au bout de quelques jours de magnifiques houppes vertes fournies de fines aiguilles cristallines, insolubles dans l'eau, mais solubles dans l'alcool, l'éther, le sulfure de carbone, le chloroforme, l'ammoniaque, l'acide acétique, etc. Le microbe dont il s'agit est une bactérie, incolore, très avide d'air, très délicate, qui atteint le maximum de son développement entre 20 et 25 degrés.

— M. Jolyet fait quelques observations au sujet des organismes qui existent dans un animal vivant, et dont vient de s'occuper M. Gayon.

Si on puise dans l'artère carotide d'un chien du sang que l'on recueille dans un ballon stérilisé, on ne trouve jamais d'organismes microscopiques tant qu'on le maintient au-dessous de 31°, mais si on le porte à une température voisine de 40°, un peu supérieure à celle de l'animal, on trouve, au contraire, qu'il se développe beaucoup de microbes. L'hémoglobine brunit et s'altère sans qu'il y ait putréfaction. Donc les microbes existent normalement dans le sang, et d'ordinaire ils ne gênent nullement. Mais si, pour une cause quelconque, naturelle ou artificielle, la température

du corps s'élève, les microbes se développent alors beaucoup et la fièvre ne serait peut-être que la conséquence de cette multiplication. En l'état normal, ils paraissent englobés dans les globules blancs, qui font ainsi, pour ainsi dire, la police sanitaire du sang. Leur forme est celle de micrococcus en chapelet.

— M. GAYON fait remarquer que ce dernier organisme se développe toujours quand la stérilisation des vases a été incomplète; cela pourrait faire craindre que quelques germes extérieurs aient échappé à la destruction.

— M. JOLYET fait une communication sur le sang des *poulpes*. Ce sang contient toujours du cuivre auquel il doit sa coloration et quelques-unes de ses propriétés, de la même façon que le sang des animaux supérieurs contient du fer. Le dosage de ces petites quantités de cuivre peut être effectué aisément à l'aide du *colorimètre*, par comparaison avec des liqueurs cuivriques de titre connu.

— M. SCHRADER montre des planches photographiques qui représentent des poissons et des crustacés rejetés par les eaux d'un puits artésien du Sahara algérien.

Séance du 22 décembre 1881. — M. RAULIN, au sujet de la communication faite par M. SCHRADER, dans la séance précédente, fait remarquer que, dès 1830, M. Dujardin, de Tours, a signalé dans les eaux d'un puits artésien foré dans cette ville la présence de végétaux et de coquilles.

— M. PÉREZ fait une communication sur *la génération des gastéropodes*. Un point était demeuré obscur dans ses recherches antérieures : qu'advient-il du sperme que l'on voit dans le canal efférent de la glande hermaphrodite, lors de la descente des œufs dans ce conduit? L'animal ouvert avant, pendant, après l'accouplement, et même au moment de la ponte, c'est-à-dire peu de temps après le passage des œufs, lui avait toujours montré le canal efférent obstrué par du sperme, en sorte qu'il avait même désespéré de résoudre une difficulté dont la solution lui échappait sans cesse. Enfin, après avoir disséqué nombre d'Hélices ayant subi l'accouplement depuis un plus ou moins grand nombre de jours, M. Pérez a réussi à rencontrer un de ces animaux dont le canal efférent renfermait du sperme à divers degrés d'altération, et tendant à une dissolution complète comme celui qui a longtemps séjourné dans la poche copulatrice. Cette Hélice était destinée à pondre très prochainement. Il est donc établi que, peu avant le moment où les œufs murs vont descendre le long du canal efférent,

le sperme contenu dans ce canal se dissout pour laisser la voie libre à ces éléments.

— M. ABRIA fait une communication sur le Congrès d'électricité réuni à Paris au mois de septembre, et sur *les nouvelles unités électriques* qu'on y a adoptées. Le mémoire de M. Abria est inséré dans le t. V (2e série) des *Mémoires de la Société.*

Séance du 5 janvier 1882. — M. AZAM entretient la Société des observations qu'il a recueillies, soit à Bordeaux, soit à Paris, sur *les effets intellectuels des traumatismes du cerveau.* Quand un individu frappé perd connaissance, l'absence de souvenirs qui en résulte remonte à une période antérieure au coup : la perte de mémoire atteint jusqu'aux 4 ou 5 jours qui précèdent.

On peut comparer ce phénomène à un photographe qui aurait classé ses clichés dans un tiroir, et qui laisserait tomber celui-ci : les clichés seraient bouleversés et il ne les classerait qu'avec peine.

M. Azam rappelle le fait suivant : un ouvrier constructeur de navires, qui était employé à la construction du *Vinh-Long,* à Lormont, tomba du haut de l'échafaudage, il resta 5 ou 6 heures sans connaissance, bien que n'ayant aucune fracture. Transporté à l'hôpital Saint-André, et interrogé, il ignore absolument ce qu'il a fait dans la matinée et se souvient seulement de son lever; 8 jours après, il se souvenait du trajet; 40 jours après, il avait retrouvé le souvenir de l'échafaudage où il était monté.

Ce fait, qui est loin d'être isolé, n'est malheureusement pas connu des magistrats. Un individu frappé et qui a perdu connaissance, ne conserve jamais le souvenir du coupable. M. Durrieu, de Ribérac, a publié, il y a une dizaine d'années, cinq observations analogues.

M. Azam propose d'appeler ce phénomène *amnésie rétrograde,* nom qui s'applique bien à ce fait important et trop peu connu.

— M. DE LACOLONGE annonce à la Société que l'école Saint-Sernin exposera, dans la prochaine exposition de la Société Philomathique, ses modèles d'appareils hydrauliques.

— M. DE LACOLONGE fait une communication relative à l'utilisation des cours d'eau comme force motrice. On admet, en général, avec Daubuisson, que la vitesse de l'eau est déterminée par la pente des surfaces : mais celles-ci présentent des sinuosités irrégulières.

Une usine hydraulique ne devra donc être nullement incommodée par un barrage installé en aval, assez loin pour ne pas

influer sur la pente au voisinage de l'usine. Mais les atterrissements qui se produisent alors en amont du barrage peuvent exhausser considérablement le lit du cours d'eau, par suite diminuer la pente, et nuire à l'usine d'amont. C'est un point qui ne doit pas échapper aux ingénieurs.

Séance du 19 janvier 1882. — M. Picart est élu membre titulaire.

Au nom de la Commission météorologique départementale, MM. Abria et Raulin demandent l'autorisation de rattacher, avec une pagination spéciale, aux *Mémoires de la Société*, la publication des Observations pluviométriques journalières que la Commission fait faire dans le département depuis le 1er juin 1881.

La Société adopte la proposition de MM. Abria et Raulin.

— M. Lespiault entretient la Société de l'anticyclone qui est sur l'Europe centrale depuis deux mois et demi, analogue, d'ailleurs, à celui de l'hiver 1879-1880. Son étendue est très grande, et la pression barométrique s'élève dans cette zone jusqu'à 788 millimètres, il se déplace légèrement; mais les bourrasques n'ont pas pu le détruire, bien que deux d'entre elles aient eu une grande intensité. L'anticyclone explique la sécheresse de l'hiver actuel, ainsi que les brouillards intenses qui se sont montrés.

Séance du 9 février 1882. — M. Hoüel lit une traduction d'un article du Dr Ott. Dux, extrait du *Pester Lloyd*, où l'auteur rend compte d'une visite qu'il a faite à la tombe du mathématicien Bolyai Farkas, à Maros-Vásárhely. Cet article est publié dans le t. V (2e série) des *Mémoires de la Société*.

— M. Jolyet fait part à la Société des résultats de ses observations et expériences sur la nature de la vaccine. Les premiers faits ont été constatés à l'abattoir de Bordeaux, avec l'aide de MM. Layet et Baillet, sur des génisses du service municipal, mises obligeamment à sa disposition par M. le Dr Plumeau. Les expériences ont été ensuite poursuivies dans son laboratoire de médecine expérimentale, sur de semblables animaux.

Quand on examine la lymphe vaccinale des boutons de bonne nature, on y constate la présence d'un certain nombre de micrococcus simples ou géminés, ordinairement mouvants. Ces organismes extrêmement ténus sont en suspension dans le plasma lymphatique.

La virulence du vaccin est-elle due aux éléments figurés du vaccin ou du plasma? Les expériences de M. Jolyet confirment

pleinement celles de Chauveau, de Lyon, et prouvent que la virulence appartient aux corpuscules vivants figurés.

Une certaine quantité de lymphe vaccinale recueillie sur des boutons au 5e et 6e jour de l'évolution de la vaccine, est filtrée au filtre de plâtre Pasteur, et le plasma liquide, indemne de tous les éléments figurés, inoculé à une génisse. Des 15 piqûres faites avec ce liquide, aucune ne donne naissance à un bouton de vaccine, alors que toutes celles qui sont faites avec la lymphe vaccinale intacte, amènent l'éruption habituelle.

Examinant alors le sang des animaux pendant la période d'incubation et d'éruption de la vaccine, M. Jolyet y constate la présence des micrococcus de la lymphe vaccinale. Ces éléments se développent et se multiplient dans le sang à partir de l'inoculation, et dès le 2e et 3e jour leur nombre est très abondant, si l'on songe à la masse du sang et au nombre des globules chez les génisses. Ils sont adhérents à la surface des globules rouges, en les pénétrant même un peu. Aussi, les hématies prennent-elles un aspect épineux particulier, et toutes sont plus ou moins mobiles sous l'influence des micrococcus. La plupart des micrococcus sont ainsi adhérents aux globules sur la surface desquels on les voit se déplacer; très peu sont libres et mouvants dans le plasma. Mais si on traite la préparation par le violet de méthylaniline, on constate que les globules reprennent leur forme ordinaire ou deviennent sphériques, et à leur surface on constate parfois qu'il reste des micrococcus adhérents, devenus colorés; la plupart, cependant, sont libres et mouvants alors dans le plasma.

Nul doute que ces éléments développés dans le sang sous l'influence de la vaccine, ne sont ceux du virus vaccin. L'expérience directe l'a démontré. Cinq piqûres faites à une génisse saine, avec le sang d'une autre génisse au 5e jour de la vaccine, ont donné cinq boutons légitimes.

Il résulte des faits observés que la vaccine et l'immunité qu'elle amène, résultent d'une véritable infection de nature bénigne, d'une imprégnation de tout l'organisme, par un être vivant particulier. Contrairement à la variole, dans laquelle le virus est éliminé en partie de l'organisme, le virus vaccin semble y demeurer. M. Jolyet émet l'opinion, fondée sur des expériences qu'il fera connaître plus tard, que le virus vaccin, pendant tout le temps que dure l'immunité, s'incorpore en quelque sorte aux globules sanguins et aux éléments anatomiques, qu'il les imprègne, rendant ainsi impossible tout développement ultérieur d'organismes semblables.

— M. Lespiault demande comment M. Jolyet explique l'immunité que possèdent les varioleux, si les microbes sortent du corps à la fin de la maladie variolique.

— M. Jolyet répond qu'après la maladie il reste probablement des microbes dans le sang.

— M. Viault pense que l'on pourrait expliquer cette immunité en se rapportant aux expériences de M. Pasteur, qui ont montré que dans le virus du charbon, les générations successives vont en s'affaiblissant — de même à la fin de la maladie variolique, — il ne resterait dans le sang que des générations affaiblies, analogues à celles du vaccin, et qui, comme celles-ci, assurent l'immunité pendant un temps plus ou moins long.

Séance du 23 février 1882. — M. Mondiet est nommé secrétaire adjoint en remplacement de M. Sabatier, démissionnaire.

— M. Hoüel communique une note de M. P. Tannery sur le *Système astronomique d'Eudoxe*. La note de M. Tannery est insérée dans le tome V (2e série) des *Mémoires de la Société*.

— M. Picart entretient la Société d'un phénomène d'immunité assez singulier à l'égard d'un poison violent, la Vératrine. Il a observé en Haute-Savoie que les vaches qui paissent en liberté pendant trois mois de l'année dans les combes élevées de Semnoz ou de la Dent-de-Lanfon (altitude de 1400 à 1500 mètres), donnent un lait d'une amertume qui rappelle celle de la gentiane. Or, le *Gentiana lutea* ne monte pas à plus de mi-côte et il ne se trouve à leur portée que le *Gentiana Burseri* (Gentiane rouge), trop peu importante par sa taille et à laquelle d'ailleurs elles ne touchent que fort peu. Mais elles mangent avec avidité toutes les tiges et feuilles qu'elles rencontrent de *Veratrum album*, dont la variété, *Lobelinnum* (Bernhardt), à corolles vertes, croît en grande quantité autour d'elles et est en fleurs à la fin de juillet. M. Picart demande comment il se fait que cette colchinacée que l'on prétend mortelle ou peu s'en faut pour les chiens et les moutons, ne nuise aucunement à l'espèce bovine et communique au lait l'amertume de ses larges feuilles, en le laissant du reste excellent et sans aucun danger pour le consommateur; en autres termes, l'amertume n'est-elle que fugace, et alors à quoi est-elle due? le principe âcre disparaissant par l'assimilation, et comment?

— M. Lagrolet signale au même point de vue la Belladone qui est broutée par les lapins, tout en étant cependant toxique pour l'homme.

— M. Mondiet communique à la Société une copie du dessin

déposé au Conservatoire des Arts et Métiers et joint au brevet pris par Ch. Dallery le 29 mars 1803.

Ch. Dallery, né à Amiens en 1754, mort en 1835, se montra artiste distingué et inventeur remarquable dans diverses branches d'industrie (facture d'orgues, bijouterie, etc.). Un des premiers il paraît avoir eu, dès la fin du siècle dernier, une idée exacte de l'avenir qui était réservé à la machine à vapeur. Ainsi, en 1782, il construisit une machine à vapeur destinée à faire mouvoir une voiture sur route, et qu'il installait ensuite comme moteur dans ses ateliers pour battre l'étain. Un peu plus tard, vers 1791, il établissait d'autres moteurs à vapeur dans les usines de Sabatier, à Nevers et à Amboise, pour actionner un martinet, des souffleries, des meules. En 1793 il faisait accepter par le gouvernement, à Paris, un projet de moulins à farine mus par la vapeur. Mais son plus grand titre de gloire est dans les inventions énumérées dans son brevet de 1803, par lequel il indique comme organes principaux d'un bateau à vapeur insubmersible : 1° la chaudière tubulaire verticale formée exclusivement de tubes à eau ; 2° la triple application de l'hélice comme agent propulseur à l'arrière du navire, comme agent directeur à l'avant, remplaçant le gouvernail, et comme moyen de tirage atificiel par son mouvement rapide de rotation dans la cheminée.

Antérieurement à 1803 nous trouvons comme chaudières tubulaires : 1° celle de Fitet et Voight (Amérique), en 1786, avec tubes en serpentins, rappelant le type récent créé par MM. Belleville ; 2° la chaudière tubulaire verticale de Read (1788, en Amérique), avec la disposition de la chaudière récente de Field, sans les tubes ; 3° la chaudière de Barlow (brevet de 1793, à Paris), employée par Fulton en 1803 et formée d'une série de tubes horizontaux. La chaudière est exclusivement tubulaire, verticale, rappelant la disposition adoptée plus tard par Perkins. D'ailleurs, en lisant l'article 12 du brevet de Dallery, on voit que le principe sur lequel repose l'emploi des tubes était exactement connu par les contemporains de cet ingénieur, mais qu'il lui reste le mérite d'en avoir fait une application originale.

De même, en étudiant l'histoire de l'application de l'hélice à la navigation, on trouve que Pancton (en France), en 1768, et Bramah (Angleterre), en 1785, avaient, dans des mémoires, indiqué ce mode de propulsion.

Fitch, le premier, avait en 1796, à New-York, exécuté des expériences sur un bateau à hélice, mais c'était une hélice à pas variable et à diamètre constant (type Woodcroft de 1832), tandis que

l'hélice de Dallery, appelée par lui escargot, était à pas constant et à diamètre variable. L'hélice de Pancton était au contraire à quatre ailes et fut expérimentée en 1804 par Stevens, en 1837 par Enicson. Ainsi, l'idée d'une hélice comme agent propulseur d'un navire devait être assez répandue parmi les contemporains de Dallery, mais cet ingénieur est réellement l'inventeur d'un des types les plus usités dans la marine moderne, *l'hélice continue à pas constant*.

L'application de l'hélice comme agent directeur fut aussi réinventée vers 1840 par un mécanicien anglais, Himt. L'emploi de l'hélice pour produire un tirage artificiel énergique a été de même reproduit beaucoup plus tard. Il est incontestable que le couple cinématique, vis et écrou, dans toutes ses applications, était exactement connu et apprécié par Ch. Dallery.

Les inventions fondamentales qui ont amené la navigation à vapeur étaient donc dans le brevet de Dallery. Pourquoi n'a-t-il pas réussi? Il dépensa sa modeste fortune (30,000 fr.), pour la construction de son navire; puis, à bout de ressources, il s'adressa au gouvernement de Napoléon. Ruiné et découragé, il ne voulut pas laisser subsister la cause de ses malheurs et un jour, à la tête de ses ouvriers, il se mit à démolir son bateau, au moment où il allait atteindre le succès. Mais les idées de ce malheureux inventeur ne furent pas perdues et aujourd'hui que l'on élève, avec raison d'ailleurs, des statues à Sauvage et à Jouffroy, M. Mondiet croit que notre Société doit à Ch. Dallery au moins un souvenir dans ses Mémoires.

— M. Laval communique à la Société quelques résultats d'expériences sur l'évaporation des liquides, fait diverses observations sur les lois de Dalton et propose une nouvelle formule.

Séance du 9 mars 1882. — M. Hoüel présente, au nom de M. le Dr Siegmund Günther, professeur au gymnase d'Ansbach, un mémoire sur *la dépendance de certaines méthodes d'extraction de la racine carrée avec l'alogarithme des fractions continues*. Le mémoire de M. S. Günther est inséré dans le tome V (2e série) des *Mémoires de la Société*.

— Sur la proposition de M. Hoüel, M. Max. Curtze, professeur au gymnase de Thorn, auteur de la dernière édition de Copernic et premier éditeur d'un des manuscrits de Nicole Oresme, précepteur de Charles VII et évêque de Lisieux, précurseur de Descartes dans l'emploi des coordonnées pour l'étude des courbes, est nommé membre correspondant.

— MM. Jolyet et Bergonié présentent à la Société le résultat de quelques expériences qu'ils ont répétées dans le laboratoire de médecine expérimentale de la Faculté de médecine.

Il s'agit du courant musculaire de la grenouille et de sa constatation au moyen du téléphone. Le procédé employé est celui indiqué par M. d'Arsonval dans sa communication à l'Académie des Sciences du 1er avril 1878; mais le dispositif en est un peu modifié. Au lieu, en effet, d'interrompre le courant qui passe par le téléphone au moyen d'un diapason entretenu *électriquement,* ce qui peut entraîner des erreurs à cause des courants induits développés par l'électro-aimant dans la bobine téléphonique, on emploie une roue interruptrice qui remplit *mécaniquement* la même fonction. Cette roue consiste en un disque conducteur vertical monté sur un axe horizontal; elle présente sur sa tranche des dents conductrices et des entre-dents garnis d'ébonite, et par conséquent non conducteurs; deux balais aboutissant à deux bornes frottent l'un sur l'axe recouvert d'un manchon de cuivre rouge, l'autre sur la tranche de la roue. Ce dernier passe alternativement d'une surface conductrice sur une surface isolante sans éprouver de ressauts. La roue est mue par un petit moteur à eau ou par l'un des axes du cylindre enregistreur de Marey. Elle a 76 dents; sa vitesse peut être très petite ou très grande, ce qui permet de faire varier, dans des limites très étendues, le nombre d'interruptions par seconde. Pour faire l'expérience, on place la roue interruptrice, le téléphone et le muscle de grenouille reposant sur les électrodes impolarisables de Du Bois-Reymond dans un circuit, on met la roue en mouvement et l'on écoute au téléphone. Les vibrations au téléphone sont synchrones avec les interruptions du courant et le son entendu est d'autant plus aigu, que le nombre d'interruptions est plus considérable.

En répétant l'expérience avec des courants très faibles, on peut se convaincre de la sensibilité du téléphone comme galvanoscope. Cette sensibilité, quoique très grande, est cependant inférieure à celle du galvanomètre de 30,000 tours de Du Bois-Reymond. Pour le constater et déterminer une limite de sensibilité, on se sert d'une petite pile Daniell, formée de zinc et sulfate de zinc, cuivre et sulfate de cuivre, donnant une force électro-motrice de $0^{\text{volt}}955$ dans le circuit de laquelle sont placés : la roue interruptrice, le téléphone et un rhéostat à liquide, au moyen duquel on peut introduire de très grandes résistances. On met la roue en mouvement, et l'on interpose des résistances de plus en plus grandes, jusqu'à ce que l'on n'entende plus rien au téléphone. La résistance maximum inter-

posée, sans cesser d'entendre au téléphone par un silence absolu, a été de un peu plus de un million d'ohms (1,000,000^{ohms}). Sans rien changer dans le dispositif employé, on a remplacé le téléphone par un galvanomètre à 30,000 tours et la déviation dans les expériences a varié de 8 à 9 degrés. Or, une déviation de 1/2 degré pouvant être facilement constatée par la méthode optique, on doit conclure que le galvanomètre était 16 fois plus sensible que le téléphone employé; et comme la sensibilité du téléphone peut varier avec les divers instruments, on peut dire, en toute assurance, en général, que le galvanomètre est *10 fois* plus sensible que le téléphone.

Séance du 23 mars 1882. — M. Lespiault fait connaître à la Société que l'Académie des Sciences vient de nommer une commission chargée de constater le changement de climat qui se produit depuis quelques années et de rechercher si la cause de ce changement ne serait pas dans le changement de direction du Gulf-Stream. Depuis longtemps, M. Lespiault énumérait, dans les séances de la Société, les indices de changements profonds dans le climat de la France. Il rappelle : 1° Les grandes variations de température de l'année 1881 dans notre région, où le thermomètre est descendu à — 21° le 16 janvier, et s'est élevé à + 39°,1 au mois de juillet suivant, les observations antérieures n'ayant jamais fourni un minimum inférieur à — 17°; 2° les grandes variations de la pression barométrique et en particulier l'extraordinaire pression constatée dans ces derniers mois, 787 millimètres à Paris, 788,3 millimètres à Prague; 3° l'anticyclone d'il y a deux ans, suivi de l'anticyclone qui a produit sur l'Europe centrale l'hiver exceptionnel de 1881-1882, en même temps que l'on constatait dans d'autres pays, en Tunisie par exemple, des chutes de pluie dépassant tout ce qui avait jamais été observé; 4° l'extrême énergie des tempêtes, telles que celles observées en Angleterre le 14 octobre 1881 et le 27 novembre suivant, détruisant maisons habitées, clochers, exerçant une pression probable de 378 kilogrammes par mètre carré, et dont l'intensité en plusieurs lieux est sans précédent dans les observations météorologiques. Il est regrettable, ajoute M. Lespiault, qu'il soit bien difficile, sinon impossible, d'arriver à la mesure exacte de l'énergie d'une tempête, ce qui permettrait une comparaison scientifique des tempêtes qui traversent la France; mais, à en juger par leurs effets dans la nature, il est à peu près unanimement admis que l'énergie des tempêtes a notablement augmenté dans ces dernières années.

Sans aller jusqu'à prétendre que l'influence du Gulf-Stream soit tout à fait nulle sur de telles modifications climatériques, M. Lespiault croit, en précisant le rôle du Gulf-Stream, que cette influence est au moins bien faible et sans relation aucune avec les modifications profondes constatées scientifiquement. Nombre de météorologistes et de géographes considèrent aujourd'hui le Gulf-Stream comme un simple courant de surface, dû principalement à l'action des vents. Ce serait aussi dans cette action qu'il conviendrait de chercher les causes des perturbations atmosphériques qui préoccupent aujourd'hui tant de personnes. Il suffirait, pour les expliquer, d'admettre une énergie croissante dans les cyclones qui abordent le continent Européen.

S'il en est ainsi, ces tempêtes qui nous arrivent d'Amérique (98 0/0), après avoir traversé les États-Unis depuis le golfe du Mexique jusqu'à la latitude du Saint-Laurent, se trouvent concentrées sur une faible étendue, au lieu d'être disséminées sur une grande surface ; c'est, par suite, une plus grande somme d'énergie que possède la tempête dans le lieu où elle passe. Se creusant un lit profond et étroit au sein de l'atmosphère, ce courant énergique ne peut être détruit que par une action extérieure puissante, se produisant rarement; de là, en un même lieu, cette persistance du beau temps, de la pluie, de grandes pressions, de froids vifs pendant deux ou trois mois. — Où réside maintenant la cause de cette modification dans le mode d'action des tempêtes nous venant d'Amérique? Ne serait-elle pas dans les déboisements considérables de ce pays? M. Lespiault ne veut pas se prononcer sur cette cause première qui n'est pas encore sortie du domaine des simples hypothèses, tandis que tous les faits indiqués précédemment ont le caractère de la vérité scientifique.

— M. Pérez fait une communication sur quelques particularités de la division des cellules. Quelques auteurs, Strasburger entre autres, font jouer un rôle actif au protoplasma de la cellule, qui entraînerait même la division du noyau. On en donne cette preuve que l'amphiaster débute à l'extérieur du noyau, aux deux extrémités de son grand axe.

M. Pérez a déjà fait connaître des faits contraires à cette opinion. Une observation de M. le Dr Henneguy lui en fournit d'autres très importants. M. Henneguy a le premier observé la perforation du noyau aux deux extrémités de son grand axe, à un certain moment de karyokinèse. M. Pérez a constaté la parfaite exactitude de ce fait et l'explique de la manière suivante. La division du nucléole, dout on ne parle pas d'ordinaire ou dont on

méconnaît entièrement l'importance dans la division de la cellule, est le premier phénomène de cette division. L'action attractive des deux jeunes nucléoles sur le contenu du noyau les porte aux deux extrémités d'un même diamètre du noyau. Celui-ci, par suite, s'allonge dans le sens de ce diamètre et devient ellipsoïde. Bientôt l'activité nutritive énergique des deux jeunes nucléoles amène la dissolution de la portion de paroi nucléaire voisine; les deux nucléoles sortent alors du noyau, et l'amphiaster éclate au dehors. Le protoplasma de la cellule n'a donc aucun rôle actif dans la formation de l'amphiaster, dont la cause formatrice réside uniquement dans les deux nucléoles.

— M. Merget rappelle que, pour expliquer le mécanisme des échanges gazeux entre les animaux et les végétaux aquatiques et l'eau aérée dans laquelle ils vivent, on admet que les gaz échangés, n'ayant pas à sortir de milieux liquides sont dans des conditions inséparables de la conservation permanente de leur état de dissolution.

Ainsi, en traitant d'abord des animaux aquatiques, et en supposant qu'il s'agisse d'un poisson, l'oxygène dissous dans l'eau qui baigne extérieurement les lamelles branchiales, traverserait les membranes limitantes de ces organes respiratoires et la paroi des vaisseaux sanguins, en se dissolvant dans le liquide qui imbibe leurs tissus et pénètrerait, toujours par voie de dissolution, dans le plasma du sang veineux qui le cèderait aux globules; tandis que l'acide carbonique, soumis au même mode de cheminement, se déplacerait en sens contraire du sang au liquide extérieur. En donnant cette explication, on admet implicitement que la membrane respiratoire à travers laquelle se produit le double mouvement des gaz échangés est immédiatement en contact avec le liquide extérieur; mais cette vue *a priori*, d'un caractère purement hypothétique, est en contradiction formelle avec les faits, et on peut facilement s'assurer que tous les animaux aquatiques ont la surface générale de leur corps, y compris celle des organes respiratoires, recouverte d'une couche gazeuse adhérente, qui les sépare de l'eau ambiante.

Cette couche est de même nature que celle dont M. Geruez a prouvé la présence sur les solides plongés dans l'eau après avoir séjourné dans un gaz quelconque, et on en démontre l'existence par les mêmes moyens qui sont au nombre de trois : 1° action de la chaleur; 2° du vide; 3° des solutions gazeuses sursaturées.

Les résultats, parfaitement concordants, fournis par ces trois modes d'expérimentation, ne laissent aucun doute sur l'existence de la couche en question.

L'atmosphère limitée qu'elle forme autour des animaux aquatiques joue, à leur égard, le rôle que joue à l'égard des animaux aériens l'atmosphère illimitée dans laquelle ils vivent, et constitue un milieu dans lequel se diffusent d'un côté les gaz dissous dans l'eau, de l'autre les gaz provenant de l'organisme.

Il y a donc, dans l'acte respiratoire, diffusion rentrante de l'oxygène, diffusion sortante de l'acide carbonique, et, comme le premier gaz est pris par le sang, tandis que le second passe dans l'eau où il se dissout, le phénomène peut recommencer et se continuer indéfiniment.

Les végétaux aquatiques, possédant aussi une couche gazeuse adhérente, les échanges gazeux, dans la respiration générale et dans l'acte chlorophyllien, s'accomplissent pour eux identiquement comme pour les végétaux aériens.

Séance du 20 avril 1882. — MM. Bouchard et Boule sont élus membres titulaires.

— M. Millardet offre à la Société, au nom de l'auteur, M. le baron Ferdinand von Mueller, membre de la Société Royale de Londres et directeur du Jardin botanique de Melbourne, la traduction en anglais d'un ouvrage du Dr Wittstein : *The organic constituents of plants and vegetable substances.* — Melbourne, 1878.

« M. le baron de Mueller, dit M. Millardet, est un des hommes de notre époque qui ont rendu le plus de services à la botanique phytographique par ses recherches sur la flore australienne et celle des terres circonvoisines. Grâce à sa haute position de Botaniste du gouvernement et de Directeur du Jardin botanique de Melbourne, il a pu réunir, sur cette curieuse région botanique, une masse considérable de documents dont il n'a cessé de faire bénéficier les musées et les jardins botaniques d'Europe. On lui doit la connaissance d'une foule d'espèces de végétaux et d'un grand nombre de genres nouveaux.

» La liste de ses publications serait longue. Parmi les plus importantes, je me bornerai à signaler : *The plants indigenous to the colony of Victoria;* — les *Fragmenta phytographiæ Australiæ;* — *The native plants of Victoria;* — *Descriptive notes on Papuan plants.* La plupart de ces ouvrages sont enrichis de magnifiques et fidèles illustrations.

» Ces travaux remarquables ont assuré, dès longtemps, à M. le baron de Mueller une des premières places parmi les botanistes contemporains. Je vous propose, Messieurs, de l'associer à notre Société, en qualité de membre correspondant. Que ce titre, dont

nous sommes loin d'être prodigues, soit un témoignage de notre haute estime pour un pionnier de la civilisation et de la science dans ces régions lointaines, dont il a si puissamment contribué à nous faire connaître la végétation par vingt-cinq années d'études et d'efforts ! »

— M. Merget communique le résultat de ses *expériences sur le mécanisme des échanges gazeux dans la fonction respiratoire.*

Pour les animaux pourvus de sang, la fonction respiratoire est double et les deux actes physiologiques qui en forment les manifestations essentielles consistent en de simples échanges gazeux qui se produisent lorsque le sang entre en conflit, d'une part, avec le milieu ambiant dans les capillaires de la petite circulation ; d'autre part, avec les tissus dans les capillaires de la circulation générale.

On donne au premier de ces actes le nom de *respiration externe ou pulmonaire;* au second, celui de *respiration interne ou interstitielle.*

Dans le premier, et en supposant d'abord qu'il s'agisse d'animaux aériens, le sang prend à l'air de l'oxygène, en lui abandonnant de l'acide carbonique ; dans le second, le sang se dépouille de son oxygène qu'il cède aux tissus, en recevant d'eux de l'acide carbonique ; c'est le mode d'accomplissement de ces phénomènes qu'on s'est proposé de rechercher.

Respiration externe ou pulmonaire. — Tous les physiologistes sont aujourd'hui d'accord pour admettre que l'échange gazeux qui s'y rapporte s'accomplit dans les conditions suivantes : l'oxygène et l'acide carbonique qui en sont les facteurs principaux ne sont pas immédiatement en contact ; séparés par la membrane pulmonaire qui est humide et continue, c'est à travers son épaisseur qu'ils doivent s'échanger, et voici par quel mécanisme supposé.

L'oxygène, qui est à l'état gazeux sur la face externe de la membrane, se dissoudrait dans le liquide imbibant pour passer de là, toujours dissous, dans le plasma sanguin, auquel il serait pris par les globules.

Pendant qu'il cheminerait ainsi de proche en proche, l'acide carbonique dissous ou faiblement combiné dans le plasma, pénétrerait également par voie de dissolution dans le septum respiratoire, et viendrait, après l'avoir traversé, s'exhaler au dehors.

Quand on essaie de réaliser expérimentalement le double mouvement de passage de ces gaz à travers une membrane humide, on constate qu'il est, pour l'oxygène surtout, d'une lenteur qui contraste singulièrement avec la rapidité des échanges

de la respiration pulmonaire et qui rend fort douteuse l'explication précitée.

On peut d'ailleurs opposer à cette explication les faits suivants :

1° Les membranes animales minces, comme la membrane pulmonaire, sont facilement perméables à tous les fluides élastiques, solubles ou non, dans le liquide imbibant; fluides dont le passage semble s'opérer mécaniquement par l'action impulsive des énormes vitesses de translation dont les molécules sont animées.

2° Les pellicules minces et continues sont perméables de la même manière.

3° Les globules sanguins sont enveloppés d'une atmosphère gazeuse adhérente dont on démontre l'existence par la méthode de Geruez.

En partant de ces faits, on est conduit à expliquer comme il suit le mécanisme des échanges gazeux dans la respiration externe ou pulmonaire :

1° Respiration externe. — Dès que les globules sanguins arrivent dans les capillaires de la petite circulation, leur atmosphère gazeuse se trouve immédiatement en contact avec la paroi de ces vaisseaux, et ce sont alors, non pas un liquide et un gaz, mais bien deux gaz, qui sont en présence de part et d'autre de la membrane pulmonaire.

L'air en rapport avec la face externe renferme de l'azote, de l'oxygène et une faible proportion d'acide carbonique, tandis que l'atmosphère des globules, en rapport avec la face interne, contient de l'acide carbonique dont la tension est supérieure à celle de l'acide extérieur et de l'azote. Celle-ci, se trouvant sensiblement au même degré de tension des deux côtés, ne participe que faiblement aux échanges, mais il n'en est pas de même pour l'oxygène et l'acide carbonique, dont chacun se répand dans l'espace occupé par l'autre comme dans le vide.

Il y a donc diffusion rentrante du premier, diffusion sortante du second.

Une partie de l'oxygène qui a pénétré dans l'atmosphère du globule est fixée par l'hémoglobine qui s'oxyde, mais le gaz qui disparaît ainsi est immédiatement remplacé par l'oxygène venant du dehors, de telle sorte que l'hématose a pour effet, non seulement de changer la constitution chimique des globules, mais aussi la composition de leur atmosphère, qui perd son acide carbonique et le remplace par de l'oxygène.

2° Respiration interne. — S'il est vrai, comme les recherches les plus récentes tendent à l'établir, que les combustions respiratoires

qui se produisent partout dans l'organisme, n'ont pas lieu dans le sang, mais en dehors de lui, dans la profondeur des tissus, ce sont ces derniers qui contiennent l'acide carbonique provenant de ces combustions, et la respiration interne doit bien alors être considérée comme un phénomène d'échange entre l'acide carbonique extérieur au sang et l'oxygène intérieur.

Pour ceux qui prétendent que l'oxygène apporté aux tissus par le sang artériel est dissous ou combiné, et qui regardent l'organisme comme constitué par des solides dont les intervalles sont partout remplis par des liquides, les échanges gazeux entre le sang et les tissus ne peuvent consister qu'en de simples déplacements de gaz dissous; mais s'il en était réellement ainsi, ces échanges ne s'opèreraient qu'avec une extrême lenteur, et l'on sait, au contraire, qu'ils sont remarquables par leur grande rapidité.

On se rendrait facilement compte de cette rapidité s'il était vrai que les échanges eussent lieu entre des gaz libres séparés par une membrane très mince, et c'est bien ainsi que les choses semblent se passer.

D'une part, en effet, les globules arrivent dans les capillaires de la circulation générale avec une atmosphère formée d'azote et d'oxygène qui se trouve immédiatement en contact avec la face interne de la paroi de ces vaisseaux; d'autre part, des expériences faites par la méthode de Gernez autorisent à croire que le tissu conjonctif répandu dans tout l'organisme est formé d'éléments dont le rôle est de servir de support à des couches gazeuses adhérentes.

Autour des capillaires, ces couches forment des atmosphères limitées en rapport avec la face interne de leurs parois, et contenant de l'azote et de l'acide carbonique. Entre cette atmosphère et celle du globule qui contient de l'azote et de l'oxygène, il y a diffusion sortante de l'oxygène et diffusion rentrante d'acide carbonique; mais comme celui-ci est emporté par le sang veineux et que de nouveaux globules arrivent apportant de l'oxygène, pendant que celui qui a pénétré dans les tissus sert à des combustions respiratoires dans lesquelles il disparaît en donnant naissance à de l'acide carbonique, ces conditions assurent le renouvellement indéfini des échanges qui constituent la respiration interne.

Le mécanisme des deux respirations est identiquement le même pour les animaux aquatiques et pour les animaux aériens.

Séance du 4 mai 1882. — M. Forquignon est élu secrétaire adjoint, en remplacement de M. Mondiet, démissionnaire.

M. Cagnieul est élu secrétaire suppléant.

— M. Raulin rappelle que, dans la séance du 15 mai 1879 (t. III, p. xxxviii), il a donné un aperçu de la constitution géologique de la plaine de Vitoria et des montagnes qui l'entourent, d'après une excursion qu'il venait de faire, en vue de rechercher les chances de réussite d'un sondage artésien, entrepris par M. de Lopidano, dans la Plaza Vieja, et arrivé alors à la profondeur de 507 mètres.

Depuis cette époque les travaux ont été continués, et malgré diverses interruptions, on est arrivé, le 25 novembre 1881, à la profondeur énorme, et peut-être sans exemple en Europe, de 1022 mètres, dans une même grande assise de calcaire noir, sans fossiles, appartenant au terrain crétacé moyen, et sans avoir rencontré la moindre trace de nappe jaillissante. A cette profondeur le trépan s'est trouvé pris et il a été impossible de le dégager. Le terme extrême du délai convenu avec la municipalité pour l'exécution des travaux étant arrivé et une prolongation de celui-ci ayant été refusée, la Société a renoncé à continuer le sondage.

M. Raulin propose de rédiger pour les mémoires une note exposant les résultats de la reconnaissance géologique qu'il a faite et ceux procurés par le sondage, tant au point de vue des assises trouvées que des températures constatées à diverses profondeurs.

— M. de Lacolonge dit qu'ayant été amené à étudier la cycloïde, il est arrivé, entre autres résultats, à un théorème qui lui semble curieux.

Une circonférence de rayon R roule, sans glisser, sur une ligne horizontale. On prend, sur le prolongement d'un rayon, un point situé à une distance nR du centre, n étant plus grand que l'unité. Pendant le mouvement ce point décrira une cycloïde raccourcie.

Si on trace la développée de cette courbe, et si on cherche la longueur rectifiée de son arc correspondant à un tour entier de la circonférence, on trouve que cette longueur est indépendante de n et égale à 4 fois le diamètre du cercle générateur.

Séance du 25 mai 1882. — M. Castet expose un moyen d'utiliser la marée comme force motrice. On établirait près de la mer un réservoir communiquant par un chenal avec l'Océan; dans ce réservoir se déplacerait verticalement, en suivant les oscillations de la mer, un radeau vide au jusant, et ne montant avec le flot que lorsqu'il serait complètement immergé. Arrivé au haut de sa course, le radeau serait empli d'eau et descendrait par son poids en même temps que la marée. Le mouvement d'oscillation du radeau serait transmis aux organes mécaniques par des crémaillères et des engrenages.

— M. RAULIN appelle l'attention de la Société sur les conclusions du mémoire que M. Roche, professeur à la Faculté de Montpellier, vient de publier *Sur l'état intérieur du globe terrestre,* et sur celles qu'il a lui-même données en 1867, dans ses *Vues générales sur les variations séculaires du magnétisme terrestre.*

On lit dans le travail de M. Roche (*Mémoires de l'Académie de Montpellier : Sciences,* t. X, 1881) : « La contraction amène une accélération progressive de la vitesse angulaire. Mais, si le globe est fluide, la figure des diverses couches s'adapte incessamment à la rotation, telle qu'elle est à chaque instant, de manière que finalement il ne reste plus de trace des variations successives que leur aplatissement a subies depuis l'origine. Chacune de ces couches possèderait aujourd'hui l'aplatissement qui convient à la rotation actuelle, conformément aux lois de l'équilibre des fluides. Si, au contraire, à une certaine époque du refroidissement, la région centrale est devenue solide, les couches constituant ce bloc ont pris leur forme définitive sous l'influence d'une rotation moins rapide qu'elle n'est en ce moment : l'aplatissement qu'elles ont conservé est donc tout différent de celui que leur attribuerait l'équation générale de l'hydrostatique, appliquée à une masse entièrement fluide douée d'un mouvement de rotation commun à toutes ses parties.

» En résumé, l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe ne pouvant plus être soutenue, puisqu'elle est en contradiction avec les données récentes sur l'aplatissement superficiel et la grandeur de la précession, nous en avons adopté une nouvelle qui échappe aux mêmes objections. La terre étant en majeure partie solide, nous la supposons formée d'un noyau sensiblement homogène, avec une légère condensation vers le centre, puis d'une couche extérieure, beaucoup plus légère, dont la densité peut être estimée à 3 par rapport à l'eau, et qui est fluide à une certaine profondeur. — Cette constitution de la terre permet de satisfaire très exactement à toutes les conditions relatives à la précession et à l'aplatissement. Ces conditions elles-mêmes déterminent les dimensions et le poids spécifique du bloc terrestre. Tout à fait comparable aux aérolithes entièrement composés de fer, ce bloc aurait une densité égale à 7, — abstraction faite de l'écorce purement superficielle, l'enveloppe externe du bloc doit être assimilée aux météorites alumineuses ou péridotiques. Sa densité est donc peu supérieure à 3; et l'on trouve que l'épaisseur de cette couche n'atteint pas un sixième du rayon de la terre. »

On lit dans le travail de M. Raulin (*Actes de la Société Linnéenne*

de Bordeaux, t. XXVI, 1867) : « Quelle serait maintenant la supposition qui rendrait le mieux et le plus simplement raison des changements séculaires qui se produisent lentement dans la déclinaison et l'inclinaison, et qui semblent découler si naturellement de l'hypothèse de la rotation du pôle magnétique autour du pôle terrestre? Il me semble qu'il serait fort difficile, pour expliquer ces divers effets, d'avoir recours à une hypothèse plus simple et plus satisfaisante que celle d'un *corps fusiforme,* probablement ferrugineux, plus ou moins irrégulier, doué de la propriété magnétique à l'égal d'un barreau aimanté, dont les extrémités seraient alignées suivant une *corde* du sphéroïde terrestre aboutissant aux pôles magnétiques de la terre, corde placée à une certaine distance de l'axe terrestre, et plus ou moins obliquement par rapport à lui.

» Quant au déplacement nécessaire pour expliquer celui de tout le système magnétique superficiel du globe vers l'ouest, il suffirait, pour le comprendre, d'admettre que le corps fusiforme ou noyau magnétique excentrique, d'une densité plus forte que le reste des masses qui entrent dans la composition du noyau fluide interne de la terre, est entraîné un peu moins rapidement que l'écorce consolidée externe dans le mouvement de rotation diurne de l'O. à l'E., d'une quantité qui serait 1/600e de la vitesse de l'écorce terrestre à ses diverses latitudes. Ce retard serait suffisant pour expliquer le déplacement du système isogonique de 1/4 de circonférence qui s'est produit sur le 70e degré de latitude boréale, de 1664 à 1814, c'est-à-dire en un siècle et demi, qui s'était poursuivi pendant près d'un siècle auparavant, à partir de 1580, et qui se poursuit encore depuis un demi-siècle.

» Dans les *Archives des sciences physiques et naturelles* de Genève (juillet 1867), M. A. Gautier, professeur de physique, a terminé ainsi une analyse assez détaillée de mon travail : « Nous devons » reconnaître que l'hypothèse de M. Raulin paraît simple et bien » en rapport avec les faits, tandis qu'on ne voit pas trop, du moins » au premier abord, comment l'autre hypothèse (celle des courants » électriques préférée par M. Gautier) peut en rendre compte » suffisamment. »

Il y a, on le voit, entre ces conclusions émises à quinze années d'intervalle une concordance des plus remarquables, qui doit leur donner un degré de probabilité très grand, puisqu'elles dérivent de recherches fort différentes : d'une part, l'étude mathématique de la forme du sphéroïde terrestre, et, d'autre part, celle de la variation des propriétés magnétiques de celui-ci.

— M. Forquignon observe que la température de fusion du fer

étant de 1500° environ, il est difficile d'admettre qu'il y ait au centre du globe une masse ferrugineuse solide, alors que des roches d'une fusibilité moindre, répandues près de la surface, sont cependant fondues.

— MM. Raulin et de Lacolonge répondent que le fer peut rester solide au centre de la terre, malgré la haute température, à cause de la pression qu'il supporte ; on ne connaît pas d'ailleurs le mode de distribution de la chaleur dans les diverses parties du sphéroïde terrestre.

— M. Jolyet fait une communication sur *la limite supérieure de fréquence des excitations appliquées aux nerfs pour qu'il y ait tétanos du muscle ou sensation.*

Quand on excite un nerf moteur par un courant d'induction, le muscle répond par une secousse complète et isolée. Mais si les excitations sont multiples et suffisamment rapprochées, les secousses se fusionnent et le muscle entre en *tétanos*. Quand le nombre des excitations par seconde dépasse une certaine limite, les physiologistes admettent généralement que le tétanos ne se produit plus, mais ils ne sont pas d'accord sur cette limite supérieure de fréquence des excitations.

Voici quelques résultats d'expériences faites à ce sujet par M. Jolyet.

Soit le chariot de Du Bois-Reymond, le courant de la bobine inductrice est interrompu au moyen de la roue que MM. Jolyet et Bergonié ont déjà fait connaître à propos de leur étude du courant musculaire par le téléphone. Les courants de la bobine induite sont employés pour exciter le nerf de la grenouille, et cette bobine est éloignée de la première jusqu'à ce que l'on n'obtienne plus de contractions du muscle qu'à la rupture du courant. La roue interruptrice est mise en mouvement par le moteur hydraulique de Schmit, et peut donner depuis quelques interruptions jusqu'à 2400 et plus à la seconde.

On observe qu'en excitant le nerf par le courant induit, on obtient le tétanos du muscle jusqu'à 1012 excitations à la seconde.

Avec 1160 excitations, on n'a plus qu'une secousse unique au début et rien pendant tout le temps du passage du courant,

La limite supérieure de fréquence des excitations par seconde pour obtenir une contraction initiale faible a été de 1240 dans l'expérience relatée. A partir de ce point jusqu'à 2200 excitations du nerf par seconde, le muscle reste au repos complet.

Si on rapproche la bobine induite de la bobine inductrice jusqu'à ce que le courant donne une contraction à l'ouverture et une à la

fermeture, la limite supérieure de fréquence des excitations du nerf doit être portée à 2200 à la seconde pour qu'il n'y ait plus de contraction du muscle.

M. Jolyet, a déterminé également la limite supérieure de fréquence des excitations du nerf sensitif lingual de l'homme qu'il faut atteindre pour qu'il n'y ait plus sensation.

Avec un courant d'induction sensible à la langue, mais non douloureux, les deux fils étant distants de 1 centimètre, on obtient une sensation très nette avec 975 excitations à la seconde, mais cette sensation diminue déjà beaucoup avec 1460 excitations. La limite de la sensation est vers 1800 excitations à la seconde, et l'on n'obtient plus rien à partir de 1900 jusqu'à 2200 excitations.

Si l'on augmente l'intensité du courant induit jusqu'au point où il devient douloureux et peu supportable à la langue, la *limite* de la sensation est portée dans le voisinage et même au delà de 2200 excitations du nerf par seconde.

Dans toutes ces expériences on s'est assuré d'ailleurs que le courant induit se produisait bien, malgré la rapidité des interruptions du courant inducteur, et cela en remplaçant le nerf excité par les fils d'un teléphone : celui-ci, pour 2200 interruptions à la seconde et plus, vibrait à l'unisson du nombre des courants lancés par l'instrument.

— M. de Lacolonge annonce que, dans la suite de ses recherches sur les cycloïdes, il est arrivé au théorème suivant : la développée de la demi-cycloïde raccourcie, est, en un point, tangente à l'axe des x et son rayon de courbure, en ce point, est indépendant de n et égal au diamètre du cercle générateur.

Séance du 1er juin 1882. — M. Micé donne lecture de la lettre suivante qui lui a été adressée par M. Fournet.

« Bordeaux, le 26 mai 1882.

» Mon cher Monsieur Micé.

» Ce n'est pas sans émotion profonde, vous le savez, que j'entre » dans l'amphithéâtre de la Faculté des sciences, où je suis venu » en sortant du laboratoire de Gay-Lussac, et où je retrouve les » souvenirs d'Auguste Laurent, Isidore Pierre, Baudrimont, mes » anciens maîtres à Bordeaux, que j'ai vus à l'œuvre de si près et » pendant de si longues années.

» J'ai aussi pour la Société des Sciences physiques et naturelles,

» dont vous êtes l'un des plus dévoués serviteurs, et qui, jeune et » pleine d'avenir, compte tant d'intelligences dans ses rangs, une » estime et une reconnaissance particulières pour l'activité » scientifique dont elle donne tant de preuves dans ses réunions et » dans ses publications.

» J'offre donc à notre Société une somme de *dix mille francs* » qui, convenablement placée en son nom, lui permettra, par » l'emploi des revenus, de venir plus efficacement à l'aide du » progrès des sciences.

» Je n'ai pas oublié, en effet, que, dans les luttes si longues et » si acharnées que j'ai soutenues pour acclimater l'indus- » trie sur le sol girondin, ce sont les conseils de nos illustres » maîtres en sciences chimiques qui m'ont permis de résister » vigoureusement à la concurrence, en transformant sans cesse » mes procédés de fabrication, et de conquérir ainsi ma part de » soleil et d'indépendance.

» Ce n'est donc qu'une simple dette de reconnaissance payée » par moi aujourd'hui à la Faculté des sciences de Bordeaux, cette » véritable *alma mater* de notre Société, et, si vous voulez bien » vous faire l'interprète de mes sentiments, j'espère apprendre » bientôt de vous que mon offre est acceptée. Peut-être aurai-je » des imitateurs.

» Agréez.... » FOURNET. »

Sur la proposition de M. le Président et du Conseil, la Société vote d'unanimes remerciements à M. Fournet, et décide qu'une délégation, composée de MM. de Lagrandval, Micé et Forquignon, se rendra, à l'issue de la séance, auprès de M. Fournet, pour lui exprimer la reconnaissance de la Société pour son don généreux.

La Société décide également que M. Fournet sera inscrit en tête de la liste de ses membres perpétuels.

— M. RAULIN lit un passage du travail récent de M. Roche qui réfute une objection que M. Forquignon avait présentée dans la dernière séance, au sujet de la constitution interne du globe.

— M. FORQUIGNON répond que ses objections ne portaient que sur la fusibilité des roches granitiques proprement dites. Celles-ci forment, pour ainsi dire, le substratum de l'écorce terrestre accessible à nos investigations, et leur fusibilité moyenne est certainement moindre que celle du fer doux. Mais les laves, au contraire, ont une fusibilité qui n'est guère inférieure à celle des laitiers des hauts-fourneaux. Rien ne s'oppose donc à ce qu'on puisse concevoir une masse de fer à l'état solide, en contact avec

un bain de lave fondue, conformément à la théorie émise d'abord par M. Raulin et confirmée depuis par M. Roche.

— M. MILLARDET présente à la Société un pot de fleurs contenant quatre jeunes vignes de semis, âgées de huit à quinze jours, qui, à l'exception d'une seule, présentent à la face inférieure des cotylédons une abondante production de mildiou (*Peronospora viticola,* De Bary.) Il rend compte de ses expériences sur le rôle que jouent les spores d'hiver ou *oospores* de ce parasite dans la réinvasion vernale de nos vignobles par le mildiou, en ces termes :

« M. de Bary, dans un remarquable travail publié en 1863 (1), a constaté que les *oospores* du *Cystopus candidus* produisent des *zoospores*. Il a démontré, par des expériences qui ne laissent aucune prise à la critique, que les zoospores n'opèrent l'infection des Crucifères dont le *Cystopus* est parasite que par une seule voie, à savoir par les cotylédons des jeunes plantes en germination

» D'un autre côté, il est vraisemblable, d'après les recherches de M. Farlow (2) et les miennes (3), que les oospores du *Peronospora* de la vigne, comme celles du *Cystopus,* produisent des zoospores. Mais comment ces dernières opèrent-elles l'infection des feuilles, dans les vignobles, périodiquement à chaque printemps? C'est ce qui n'a pas encore été expliqué.

» J'ai supposé que cela pouvait avoir lieu comme dans le *Cystopus* dont il a été question plus haut, et dans le but de vérifier cette hypothèse, j'ai institué l'expérience suivante :

» Le 11 avril dernier, je semai dans huit pots à fleurs des graines de chasselas : une douzaine par pot. La terre venait du jardin et était la même pour tous les pots.

» Six de ces pots reçurent, par dessus la terre qui couvrait les graines, une couche de deux centimètres d'épaisseur de feuilles de vigne renfermant des oospores. Deux pots n'en reçurent pas et servirent de témoins. — Les feuilles de vignes à oospores avaient passé l'hiver au pied d'un mur dans un endroit humide du jardin; elles étaient à demi pourries. — Les pots numérotés furent placés dans une orangerie, couverts chacun d'une plaque de verre et arrosés régulièrement avec de l'eau de pluie ou de l'eau de puits, suivant le temps qu'il faisait.

» Le 16 mai, 13 plantes pour les huit pots étaient sorties de terre.

(1) A. de Bary, *Recherches sur le développement de quelques champignons parasites* (*Annales des Sciences naturelles,* 4e série, T. XX).

(2) W. G. Farlow, *On the american grape-vine mildew. Bulletin of the Bussey Institution,* March 1876.

(3) Non encore complètement terminées et inédites.

Dans le pot n° 3 qui avait été couvert de feuilles mildiousées se trouvaient deux jeunes plantes. L'une dont les cotylédons étaient à moitié seulement sortis de terre, n'offrait rien de particulier; l'autre plus âgée, haute de 2 à 3 centimètres, à cotylédons complètement étalés, présentait sur toute la surface inférieure de ces derniers un abondant tapis de *Peronospora*.

» Toutes les autres plantes, aussi bien dans les pots couverts de feuilles mildiousées que dans les pots témoins, étaient complètement saines.

» Du 15 au 30 mai, un grand nombre de plantes germèrent successivement dans les divers pots, sans présenter rien d'anormal. Dans le pot n° 3, où se trouvait la jeune vigne mildiousée, naquirent pendant cet intervalle deux autres plantes. Sur les quatre vignes que contient aujourd'hui ce pot, trois montrent le *Peronospora* à la face inférieure des cotylédons, la plus grande seule n'est pas infectée.

» Hier, dans le pot n° 4, qui, comme le n° 3, avait reçu des feuilles à oospores, une jeune plante dont les cotylédons venaient de s'étaler a présenté à la face inférieure de ces derniers un abondant tapis de *Peronospora*. Les deux autres plantules que contient ce pot étaient complètement saines, aussi bien que toutes celles des autres pots couverts de feuilles à oospores et celles des pots témoins.

» En résumé, aujourd'hui, 1er juin, l'expérience donne les résultats suivants: sur les six pots qui ont été couverts d'une couche de feuilles à oospores, deux (je rappelle que les pots étaient tous couverts d'une plaque de verre) contiennent des jeunes plantes infectées de *Peronospora*. Les plantes des quatre autres pots de la même série, ainsi que celles des deux pots témoins, sont indemnes de parasites.

» La conclusion qui découle naturellement de ces essais est la suivante : Les oospores du *Peronospora* de la vigne, lorsqu'elles sont en contact pendant plusieurs semaines avec des graines de vigne en voie de germination, opèrent l'infection des jeunes semis. Les réceptacles fructifères du parasite apparaissent primitivement à la face inférieure des cotylédons et non ailleurs. Ce fait, qu'il est facile de constater sur le pot n° 3 qui est sous les yeux de la Société, suffit pour expliquer la réinvasion de nos vignobles par le mildiou à chaque printemps. Qu'une graine de vigne jetée par l'homme ou disséminée par les oiseaux germe, au commencement de mai, en contact avec quelque fragment de feuille mildiousée enfoui dans le sol, la plante qui en naîtra sera infectée par le *Peronospora*; les

conidies qui ne tarderont pas à se former par milliers sur les cotylédons, emportées par le vent, détermineront l'infection des feuilles sur les ceps du voisinage.

» De fait, je viens de constater chez M. Lespiault, à Nérac, dans une pépinière de Jacquez fumée avec des *marcs de raisin*, parmi une trentaine de jeunes vignes qui venaient de germer, un individu dont les cotylédons étaient couverts de *Peronospora*. Tous les Jacquez de cette pièce avaient les feuilles fortement atteintes de mildiou, tandis que sur les vignes environnantes, le parasite n'a pu être constaté.

» Je reconnais qu'il serait nécessaire, pour que cette dernière observation eût toute la valeur possible, qu'il eût été constaté que la maladie était apparue primitivement non sur les Jacquez, mais sur les jeunes plantes de semis. Bien que le fait n'ait pas été noté, cette observation m'a paru avoir assez d'importance pour mériter d'être signalée.

» Nous connaissons à présent un mode de propagation du *Peronospora* après la saison hivernale. Mais est-il le seul?

» Il semblerait présumable que les oospores germant au printemps, en contact avec les bourgeons en voie de développement d'un sarment traînant à terre ou de boutures en pépinière, pourraient opérer également l'infection des jeunes feuilles.

» Dans le but de savoir à quoi m'en tenir sur la possibilité de ce second mode d'infection, j'ai couché en terre, dans une rigole de six centimètres de profondeur, deux sarments de chasselas tenant encore à la souche. Les sarments furent ensuite recouverts des mêmes feuilles mildiousées, qui, dans l'expérience précédente, ont opéré l'infection des jeunes semis. Les arrosages eurent lieu de la même façon.

» Les six bourgeons portés par les deux sarments mis en expérience ont aujourd'hui un à deux pieds de hauteur; aucun d'eux n'offre la moindre trace de maladie.

» On doit donc admettre, en tenant compte des limites de certitude que nous porte un résultat négatif de ce genre, que l'infection des jeunes bourgeons par les oospores est très peu probable.

» Cette conclusion se trouve fortifiée encore par l'analogie. En effet, M. de Bary a montré que les oospores du *Cystopus* sont incapables d'opérer l'infection d'un organe quelconque de la plante sur laquelle ce dernier vit en parasite, tige, feuilles ou racine. Les zoospores qu'elles produisent ne se développent d'une manière normale que lorsqu'elles sont mises en contact avec les cotylédons.

» Il y a encore dans le développement du mildiou plusieurs points mal connus dont je continue l'étude. »

Séance du 8 juin 1882. — M. Couperie est élu membre titulaire.

M. Raulin annonce à la Société la mort de M. Delbos, professeur de minéralogie et de géologie à la Faculté des sciences de Nancy.

M. Delbos a été l'un des membres les plus actifs de la Société à ses débuts et il a rempli pendant longtemps les fonctions de secrétaire général. Sa mort est donc pour la Société une perte véritable.

— M. Bergonié a répété les expériences de M. Bayssellance sur le passage d'une balle de revolver au travers d'une membrane de caoutchouc, à des distances variant de 3 à 6 mètres. M. Bergonié met sous les yeux de la Société ces plaques de caoutchouc percées et fait remarquer le faible diamètre des trous, eu égard au calibre assez fort du projectile.

— M. Hautreux présente le résumé des *observations sur la densité de l'eau, faites à Royan pendant le mois de mai dernier.*

La concordance du maximum de salure avec les marées de syzygies, et celles du minimum avec les marées de quadrature est parfaitement marquée :

En syzygie, le	4, on obtient au densimètre		21°
»	16	» »	21
En quadrature, le	9, on obtient au densimètre		13°
»	24	» »	16

Plusieurs anomalies se remarquent dans les densités, par rapport à la direction du courant, et prouvent que pendant la dernière partie du flot il y a transport des sables du canal du Médoc vers la passe de Saintonge.

L'observation du 2 mai est surtout intéressante : le vapeur *Sonora* ayant quitté le mouillage de Royan pour aller secourir un navire à La Coubre et l'ayant ramené à Richard, cette excursion donne un point de comparaison très sérieux de la salure de ces différents points et montre très nettement que les eaux pluviales s'écoulent surtout par la passe du Médoc. En effet, à 8 heures du matin, à Royan, on observe une densité de 19° ; c'est le jour de la pleine lune, et, d'après les jours précédents et suivants, on aurait dû trouver, à 4 heures du soir, de 19 à 20° sur la rade de Royan. A 4 heures du soir, la *Sonora* était à Talais et y observait seulement 14°. C'était donc une différence de salure de 5 à 6° d'une rive de la rivière à l'autre.

Séance du 22 juin 1882. — M. Simonnet est élu membre titulaire.

— M. de Lacolonge ajoute quelques mots à ce qu'il disait dans une des précédentes séances, où il faisait remarquer que la théorie de la cycloïde servait de base à celle des roues à aubes des bateaux à vapeur. M. Hautreux lui ayant demandé s'il connaissait celles où les pales agissent toujours normalement au fil de l'eau, il lui avait répondu affirmativement, ajoutant qu'il en avait même vu dans le port de Bordeaux. Depuis, recueillant ses souvenirs, il s'est rappelé avoir vu à Besançon, en 1838, dans une petite exposition locale organisée par la Société d'émulation du Doubs, un modèle de roues à pales mobiles qui a vivement fixé son attention. Il avait environ 1m50 de diamètre, était fort simple et présentait toutes les dispositions attribuées aujourd'hui à MM. Buchanan et Morgan.

M. de Lacolonge peut ajouter que les auteurs qui ont écrit sur ces roues, examinent aussi et traitent le cas signalé par M. Hautreux. L'un d'eux, M. Weissbach, professeur à Fribourg, que M. Poncelet avait en grande estime, ajoute que, malgré tous les perfectionnements inventés, la pratique en est toujours revenue aux roues à pales fixes.

Dans une autre séance où il a été question des moulins de marée, M. de Lacolonge a oublié de parler d'une note qu'il avait prise dans le *Million de faits*, ouvrage qui date d'une quarantaine d'années. Ce livre cite un moulin, non de marée puisque la Méditerranée n'en a que peu ou point, mais mu par la mer. C'est à Argostoli, petit port de Céphalonie, l'une des sept îles Ioniennes. Une cavité naturelle, ou gouffre, reçoit l'eau de mer qui a mis les meules en mouvement. Plusieurs membres font observer qu'il existe en France des gouffres pareils où se perdent des ruisseaux. M. de Lacolonge reprend que, pour son compte, il en connaît au moins deux : celui où disparaît le ruisseau de Saunes, près Besançon, et celui où se jette le Boudin, près La Rochefoucaud (Charente). Il termine en disant qu'il serait intéressant de savoir si les géologues s'en sont occupés.

— M. Rayet ajoute que des gouffres analogues sont très nombreux dans la Grèce continentale.

Séance du 6 juillet 1882. — MM. le Dr Piéchaud, Roche et Lagache sont élus membres titulaires.

— M. de Lacolonge cite un extrait d'une lettre de M. Tresca, qui laisse peu d'espoir au sujet de la transmission économique du travail moteur par l'intermédiaire des câbles électriques. M. de

Lacolonge pense néanmoins qu'il ne faut pas encore désespérer, en présence des efforts dirigés dans cette voie par un grand nombre de savants distingués.

— M. ABRIA rappelle les travaux récents de M. Marcel Deprez et M. FORQUIGNON cite quelques chiffres assez encourageants empruntés au dernier mémoire de ce physicien.

— M. PÉREZ parle de la constitution de la cellule spermatique chez les Insectes, en particulier chez les Lépidoptères. On sait que divers auteurs ont signalé dans cet élément, au lieu de la simple paroi de cellule qui se voit chez les autres animaux, une sorte d'enveloppe multicellulaire, formée de nombreuses cellules aplaties.

M. Balbiani a cru voir, chez les Aphides, que ce revêtement est formé par les cellules épithéliales de la paroi testiculaire, qui, à un moment donné, se détacheraient pour former un revêtement tout autour de la cellule spermatique. M. Pérez a reconnu une tout autre origine pour ces cellules enveloppantes. Les cellules primordiales que l'on trouve dans l'organe mâle encore peu développé, sont, chez les Insectes, comme partout ailleurs, entourées d'une membrane cellulaire simple. Bientôt elles produisent, par génération endogène, 2, 4, 8, enfin 16 cellules-filles dont 15 s'accolent sous la paroi cellulaire, tandis qu'une seule demeure au centre de cette enveloppe complexe, et, se substituant à la cellule-mère primordiale, prolifère ultérieurement à son tour, et engendre un grand nombre de cellules destinées à donner naissance aux éléments spermatiques.

Séance du 20 juillet 1882. — M. HAUTREUX fait une communication relative à la *direction des vents à l'embouchure de la Gironde;* le mémoire de M. Hautreux est inséré dans le tome V (2e série) des *Mémoires de la Société.*

M. RAULIN présente deux modèles en plâtre d'une pointe de flèche en silex de 6 centimètres de longueur qu'il vient de recevoir de M. L. Martres, juge de paix à Castets-des-Landes, et qui étaient accompagnés de la note suivante :

« Le ruisseau qui coule du bourg de Sabres vers le N.-O. à la Leyre, ravine le sol et le sous-sol sur une profondeur d'environ 5 à 6 mètres. Les berges laissent voir à 1 mètre au-dessous du sous-sol un banc d'*alios* (noir à ciment d'humus) de 1m20; puis continuent les sables quartzeux des Landes à une grande profondeur, comme cela ressort du forage de Sabres. A 2 mètres au-dessous de l'alios et à 1 mètre au-dessus du ruisseau est intercalée une

couche d'argile bleue par dessus, passant au rouge au-dessous, et parfois mise à nu. L'argile est exploitée à 5 kilomètres en aval de Sabres pour une fabrique de récipients à résine; elle est d'abord décapée pour l'enlèvement des couches supérieures de 4 mètres de hauteur, sur une surface de plusieurs mètres carrés le long du ruisseau.

» Il y a environ deux ans, en 1882, le propriétaire faisait extraire de l'argile et on voyait la coupe suivante à 10 mètres du ruisseau:

Sol végétal sablonneux..................	$0^{m}80$
Alios noir et dur supérieurement..........	1 50
Sables jaunâtres stratifiés..........	0 70
Lit de lignite tourbeux...................	0 10
Sables grossiers stratifiés.................	0 75
Lit d'argile..............................	0 10
Lit de sable..............................	0 15
Argile bleue..............................	0 45
Sable jaunâtre...........................	1 00

» Un des ouvriers, en entamant la couche d'argile bleue, brisa d'un coup de bêche un filon noir inclus à la partie supérieure; son instrument en ayant rencontré un second, il retira ce qu'il appelait un *pericle.* C'est une magnifique tête de flèche en silex du plus beau noir; il est plat en dessous, par l'effet d'un seul éclat; les deux autres côtés ont été obtenus par deux éclats et quelques légères retouches à la pointe qui est un peu obtuse, et au talon pour les attacher. C'est un silex *solutréen* (type de St-Germain d'Excideuil, donné par M. de Mortillet).

» Le propriétaire était présent avec ses cinq ouvriers, ne se doutant ni l'un ni les autres de l'intérêt qui pourrait se rattacher à une pareille situation d'un si petit objet; aussi on ne saurait attribuer à cette découverte la moindre supercherie de leur part, et ils se souviennent fort bien qu'il n'y avait autour du silex aucune trace de dérangement des couches voisines et supérieures ayant permis son intrusion accidentelle. L'ouvrier, qui a des souvenirs très précis, est certain que le dépôt des sables et celui du silex sont contemporains. Quant à l'inviolabilité préalable des couches encaissantes, après mon enquête, une enquête de magistrat instructeur, s'il vous plaît, je n'en puis plus douter.

» Il faut donc bien admettre, quelle que soit l'habileté de la main qui l'a taillée, que cette main était contemporaine du sable des Landes, c'est-à-dire pliocène. »

— M. Raulin ajoute qu'il ne voit aucune impossibilité à ce que l'on admette comme vraie l'assertion de l'ouvrier, puisque l'abbé Bourgeois, ainsi qu'il l'a vérifié avec ce savant, en 1870, a trouvé

à Thenay près de Blois des silex taillés à la base de l'assise beaucoup plus ancienne du calcaire de la Beauce ; mais il ne croit pas que l'on doive admettre que l'être intelligent qui a taillé ce silex ait appartenu à l'espèce humaine actuelle, *Homo sapiens* L. De l'époque pliocène à l'époque actuelle, les genres *Rhinoceros*, *Mastodon*, *Elephas* ont été représentés par plusieurs espèces successives, et il lui semble infiniment probable qu'il en a été de même pour le genre *Homo*.

— M. Gayon, en collaboration avec M. Dupetit, annonce que du nitrate de potasse dissous dans l'eau d'égout y disparaît rapidement sous l'influence d'organismes microscopiques anaérobies. L'expérience, faite d'abord avec 20 milligrammes de sel par litre, a très bien réussi successivement avec 100 et même 200 milligrammes par litre. — Les nitrates contenus dans les terres végétales disparaissent de même lorsqu'on les place dans une atmosphère dépouillée d'oxygène ; bien plus, si l'on fait tomber goutte à goutte sur cette terre de l'eau d'égout nitratée, le liquide sort très fortement appauvri en nitrate. La réaction dont il s'agit est l'œuvre des microbes, car elle est empêchée par la présence du chloroforme.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1882-83.

Présidence de M. G. RAYET.

Séance du 23 novembre 1882. — La Société procède au renouvellement de son Bureau; sont élus :

Président	M. G. RAYET.
Vice-Président	M. FOURNET.
Secrétaire général	M. ABRIA.
Secrétaires adjoints	MM. FORQUIGNON et CAGNIEUL.
Archiviste	M. HOÜEL.
Trésorier	M. POTOCKI.
Membres du Conseil d'administration.	MM. DUPUY, CAYON, GLOTIN, HAUTREUX, KOWALSKI, LACOLONGE, DE LAGRANDVAL, LESPIAULT, LOQUIN, MILLARDET.

— M. DILLNER, professeur à l'Université d'Upsal, est nommé membre correspondant.

— M. HOÜEL communique à la Société quelques détails sur la *vie d'Abel.* « Tous ceux qui se sont occupés de hautes mathématiques connaissent le nom d'Abel, ce jeune Norvégien, né la même année que notre grand poète Hugo, et mort à l'âge de 27 ans, laissant un nom que l'on ne peut comparer qu'aux plus illustres, aux noms des Euler, des Gauss, des Cauchy,....

» La biographie de ce grand génie était encore à faire; tout ce qu'on en connaissait se bornait à une notice très courte, écrite par son ancien professeur Holmboe, devenu plus tard son intime ami et le premier éditeur de ses œuvres.

» Tout dernièrement, un savant professeur de l'Université de Christiania, M. Bjerknes, a publié dans une revue de Stockholm une biographie détaillée de son illustre compatriote. Il ne se borne pas à rapporter les détails intéressants de cette existence si courte et si bien remplie. Il a fait en même temps l'historique de ses immortels travaux, en indiquant avec le plus grand soin les relations des découvertes d'Abel avec celles de ses émules. Ce travail est donc à la fois un récit attachant de la vie d'un grand homme et une page importante de l'histoire scientifique.

» Déjà un savant bien connu par ses travaux sur l'histoire des sciences et en même temps un savant linguiste, M. Aristide Marre, m'avait proposé d'entreprendre cette traduction. Je refléchissais sur les moyens de lui procurer un exemplaire de la brochure de M. Bjerknes, quand M. Dillner est arrivé à Bordeaux, et une des premières pensées du savant professeur d'Upsal a été la traduction en français de la biographie du grand géomètre scandinave.

» La langue norvégienne n'est pas des plus faciles à apprendre, et les difficultés sont considérablement accrues dans un ouvrage qui, comme le livre de M. Bjerknes, abonde en détails familiers, en expressions locales, dont une partie peut même embarrasser quelquefois les habitants de l'autre extrémité de la péninsule scandinave.

» Je ne pouvais, dans ces circonstances, me charger de cette traduction, sans m'être assuré un secours compétent. J'ai donc été très heureux quand M. Dillner m'a proposé d'obtenir pour cette traduction le secours de l'auteur lui-même. Il a écrit en conséquence à M. Bjerknes, dont, malgré la longueur et les difficultés du trajet, la réponse ne s'est pas fait attendre, et qui m'autorise à traduire en français la vie d'Abel. Je compte sur l'aide bienveillante de M. Bjerknes pour réviser mon travail. »

M. Hoüel demande en outre à la Société de vouloir bien décider la publication de cette traduction dans ses *Mémoires*.

A l'unanimité des membres présents et après avis du comité d'impression, la Société décide que la traduction de la *Biographie d'Abel* sera imprimée en tête du tome I (3e série) de ses *Mémoires*.

— M. Hoüel présente à la Société, au nom de son savant auteur M. Dillner, un travail intitulé : *Aperçu d'une nouvelle manière de représenter les inversions des intégrales hyperelliptiques*. Ces recherches sont relatives à une note d'Abel, dont l'importance a été jusqu'ici méconnue; déjà un géomètre italien, M. Casorati, avait remarqué que le problème posé par Abel était différent de celui que Jacobi avait traité et qui l'avait conduit à des conclusions opposées.

« M. Dillner, profondément versé dans la branche des mathématiques dans laquelle Abel s'est illustré, a repris et étendu les recherches du professeur de Pavie, et, à ma prière, il a bien voulu communiquer à la Société une note sur ce cas intéressant du problème de l'inversion des fonctions représentées par des intégrales.

» Il résulte des recherches d'Abel, confirmées par celles des deux géomètres contemporains, que, si l'on considère les périodes de

l'intégrale hyperelliptique seulement deux à deux, à chacune de ces combinaisons correspond une fonction inverse, parfaitement déterminée, comme cela a lieu dans l'inversion de l'intégrale elliptique. Seulement les calculs, comme on doit s'y attendre, sont beaucoup plus compliqués. De plus, dans cette inversion, les fonctions correspondantes aux fonctions ϑ ne sont plus des fonctions holomorphes et uniformes comme dans le cas des fonctions elliptiques et dans les formules de Jacobi relatives aux fonctions hyperelliptiques; elles sont multiformes, à cause des exposants fractionnaires qu'elles renferment.

» Ce travail de M. Dillner contribuera essentiellement à rectifier une idée accréditée depuis les travaux de Jacobi, et à faire rendre justice à une conception d'Abel que jusqu'ici on avait considérée comme une erreur de ce grand génie, et qui est en réalité une de ses belles découvertes. »

Le mémoire de M. G. Dillner est inséré dans le tome V (2e série) des *Mémoires de la Société.*

— M. Gayon, en collaboration avec M. Dupetit, fait connaître quelques-unes des conditions les plus favorables à *la fermentation des nitrates.*

1° *La dénitrification est l'œuvre des microbes.* En effet, des liquides nitratés, stérilisés par la chaleur, se conservent sans modification; une trace de semence, prise dans une fermentation en pleine activité, et déposée dans un liquide stérilisé donne lieu rapidement à un dégagement de gaz, avec production de trouble et développement de milliers d'organismes microscopiques.

2° *L'air nuit au développement des microbes.* La dénitrification est en effet plus rapide et plus complète dans des vases complètement remplis de liquide que dans des flacons à moitié pleins. Si même on exagère le volume de l'air, et si l'on diminue l'épaisseur de la liqueur, comme dans des fioles à camphre, la proportion des nitrates, au lieu de diminuer, augmente par suite de la fixation de l'oxygène sur les matières organiques ou ammoniacales.

La réduction des nitrates se fait d'ailleurs très bien dans une atmosphère d'acide carbonique.

3° *La matière organique est nécessaire à la dénitrification.* Les nitrates disparaissent plus vite dans de l'eau d'égout recouverte d'une couche d'huile que dans de l'eau d'égout exposée librement à l'air, quelque limité que soit le volume de cet air : l'huile n'agit pas seulement pour diminuer l'accès de l'oxygène, elle est elle-même décomposée et saponifiée.

Le bouillon de poulet, riche en matière organique, est un

excellent milieu pour la fermentation des nitrates. On peut le remplacer par des liquides artificiels, c'est-à-dire par des dissolutions de principes définis, cristallisables, et de composition connue. Dans ce cas, il faut joindre aux sels minéraux une matière organique convenable. Le sucre, l'acide tartrique, l'acide citrique, l'alcool propylique, l'asparagine ont donné d'excellents résultats.

4° *Rapidité de la nitrification.* Avec l'eau d'égout, les nitrates fermentent lentement, mais avec le bouillon de poulet et les liquides artificiels, on a détruit d'abord 1 gramme de nitrate de potasse par litre et par jour, puis, progressivement, avec des semences plus pures et plus actives, on a atteint 4, 6 et même 9 grammes par jour.

5° *Rôle de l'hydrogène naissant.* On pourrait supposer que la dénitrification est un simple phénomène de réduction causé par de l'hydrogène, dégagé de la matière organique et naissant à la faveur de la vie des microbes. L'expérience paraît infirmer cette hypothèse. Le ferment dénitrificateur se développe en effet dans le bouillon de poulet, non nitraté, sans donner de l'hydrogène. Comment concevoir que le seul fait d'ajouter des nitrates puisse déterminer la formation de l'hydrogène?

6° MM. Gayon et Dupetit ont aussi étudié la transformation des nitrates en nitrites sous l'influence des microbes. Ils possèdent plusieurs organismes à l'état de pureté, jouissant de cette propriété : la bactéridie charbonneuse, le microbe du choléra des poules, un ferment aérobie et deux anaérobies dont un seul se développe dans les liquides artificiels.

Ils annonçent en outre qu'ils ont le ferment capable de donner du bioxyde d'azote avec les nitrates; mais ils ne l'ont pas encore isolé à l'état de pureté.

Séance du 7 décembre 1882. — L'ordre du jour appelle la nomination d'un trésorier en remplacement de M. Potocki, démissionnaire, M. Fougeroux est nommé trésorier.

MM. le général Peaucellier, Rodier et Garnault sont élus membres titulaires.

M. Hoüel présente à la Société un mémoire de M. le professeur Vachtchenko-Zakhartchenko, intitulé : *Considérations sur le développement des Mathématiques depuis les temps les plus reculés jusqu'au XVe siècle.*

Le mémoire de M. V.-Zakhartchenko est inséré dans le tome V (2e série) des *Mémoires* de la Société.

— M. Rayet examine les *Éléments de la grande comète* qui vient

d'être observée en septembre et octobre 1882, et qui offrent des ressemblances avec ceux des comètes de 1668, 1843 I et 1880 I. Ce résultat est mis en évidence par le tableau suivant :

Comètes.	τ	π	☊	i	log. q.	e	Révol.	Calculateurs.
1668	Février 28	277° 2′	357°17′	144° 2′	$\bar{3}$,680			Hind.
1843. I	Février 27	278 40	361 15	144 19	$\bar{3}$,74338	0,999915	376 ans	Hubbard.
1880. I	Janvier 27	282 20	355 54	143 2	$\bar{3}$,77785	0,999459	37	Meyer.
1882. IV	Septembre 17	249 22	345 55	141 55	$\bar{3}$,88336	0,999970	»	Schandler.

Toutes ces comètes ont cela de remarquable que leur distance périhélie est très faible et que les inclinaisons de leurs orbites sont voisines; mais les nœuds et les périhélies ont des longitudes très différentes. Il paraît donc peu probable (E. Weiss, *Astronomische Nachrichten,* 2465) que la comète actuelle soit un retour de l'une quelconque des comètes précédentes; M. Weiss a en effet essayé en vain de représenter les positions de la comète de 1882 avec les éléments de la comète de 1843 I (période de 36 ans 9), supposée identique à celle de 1668.

Quant à l'identité des grandes comètes de 1880 et 1882, il faut remarquer que la première n'a été observée que pendant peu de jours, au voisinage de l'horizon, et dans de très mauvaises conditions; il serait donc téméraire de conclure de la vague ressemblance des deux orbites à une identité des deux astres.

La comète de 1882 a au contraire été observée dans de bonnes conditions et sur une portion étendue de sa trajectoire; il sera donc possible de déduire des seules observations de l'apparition actuelle une orbite elliptique, et une durée de révolution qui sera très courte, s'il est vrai que l'astre soit identique aux comètes de 1668, 1843 et 1880, dont les révolutions sidérales diminueraient avec une rapidité extrême. J'ajoute que les observations semblent absolument contraires à cette hypothèse trop rapidement produite.

La comète de 1882 IV, a été observée :

Le 7 septembre au Cap, par M. Finlay.
Le 9 — à Melbourne, par M. Ellery.
Le 11 — à Rio, par M. Cruls.
Le 16 — à Ealing (Londres), par M. Common.

Ces quatre observations sont antérieures au passage périhélie et pourront servir de contrôle aux orbites calculés à l'aide de positions correspondantes à la seconde partie de la trajectoire; elles décideront si la comète a subi une résistance mesurable dans son passage au voisinage du soleil.

A partir du 17 septembre, la comète, visible le matin avant le

lever du soleil, a été observée en un très grand nombre de points; elle était dans les premiers jours visible à l'œil nu en plein midi.

Les observateurs du Cap, MM. Finlay et Elkin ont même pu, le 17 septembre, la suivre jusqu'au bord du soleil sur lequel elle est entrée à $4^h\ 50^m\ 55^s$ (T. M. du Cap); la comète, dont la lumière paraissait absolument blanche lorsque elle était en contact avec le soleil, n'a point été visible pendant son passage sur le disque de cet astre. Ceci rend peu vraisemblable l'observation de Pastorff sur la comète de 1819.

Le noyau de la comète, qui était sphérique vers le 20 septembre, s'est peu à peu allongé et avait le 3 octobre une longueur de 25" sur une largeur de 6" (prof. Ricco, *Astronomische Nachrichten*, 2462); ce noyau est devenu double le 7 (A. Krueger, *Astr. Nach.*, 2469) et est resté double jusqu'à la fin d'oct. (Palissa, *Astr. Nach.*, 2469).

Diverses enveloppes et des panaches dissymétriques se sont d'ailleurs montrés en avant et sur les côtés du noyau; mais ces apparences me sont encore mal connues.

La queue, qui a atteint à la nouvelle lune d'octobre une longueur d'environ 20°, était légèrement convexe vers le nord et très sensiblement plus brillante sur le bord austral; pendant quelques jours, la prédominance de la clarté des bords a été très sensible et la queue semblait presque divisée en deux parties par une bande obscure.

Vers le 25 septembre, une seconde queue très vive s'est montrée sur le côté convexe, sur une longueur d'environ 30° (Cruls, *Comptes rendus du 6 novembre*); c'est ce prolongement anormal d'un des côtés de la queue qui a, sans doute, fait croire que cette dernière se terminait brusquement.

Le spectre du noyau de la comète était, à l'époque de son périhélie, formé d'un spectre continu très vif, s'étendant de B à C, coupé par les trois lignes brillantes ordinaires des hydrogènes carbonés et par la ligne du sodium (Lohse, Thollon et Gouy); cette dernière ligne a d'ailleurs disparu lorsque la comète s'est éloignée du soleil.

Séance du 22 décembre 1882. — M. Dubourg est élu membre titulaire.

— MM. Gayon et Simonnet signalent l'existence de deux microbes chromogènes, qu'ils ont préparés à l'état de pureté.

1° Une bactérie cyanogène, colorant en bleu les liquides de culture, et donnant de la pyocyanine toute semblable à celle qui se trouve dans le pus bleu.

2° Une bactérie chlorogène, colorant les liquides en vert dichroïque, et paraissant différente de celle que M. Gayon a déjà fait connaître à la Société à la fin de l'année dernière.

Le premier de ces organismes, recueilli loin des hôpitaux, dans le laboratoire même de la Faculté des Sciences, prouve combien sont grandes la diffusion et la résistance vitales de ces êtres.

— M. Azam constate que la coloration bleue du pus se produit très rarement; ce phénomène ne paraît pas avoir une signification pathologique importante.

— M. Gayon confirme les remarques de M. Azam et donne quelques détails sur la diffusion des germes microscopiques.

— M. Raulin signale la grande quantité de pluie tombée dans les Landes pendant la dernière période de l'année 1882.

Séance du 11 janvier 1883. — M. Delézinier est élu membre titulaire.

— M. Rayet entretient la Société de *la quantité de pluie tombée à l'Observatoire pendant l'année météorologique 1882.* Le temps exceptionnellement mauvais de l'année 1882, les pluies continues que nous subissons depuis trois mois donneront à l'année météorologique 1882 un caractère néfaste spécial; ce caractère spécial tient bien plus à la répartition des chutes d'eau entre les divers mois, qu'à une variation considérable dans le total annuel de pluie. C'est ce que montre pour Bordeaux, le tableau suivant :

	Mois.	Moyenne mensuelle M. Petit-Lafitte (1848 à 1880).	Année 1882 (Floirac)	Rapport de 1882 à la moyenne.
		mm	mm	mm
1881.	Décembre.	68,6	88,1	1,28
1882.	Janvier.	74,2	9,7	0,13
	Février.	53,8	29,3	0,50
	Mars.	61,2	58,8	0,95
	Avril.	63,9	94,1	1,47
	Mai.	67,0	121,6	1,82
	Juin.	70,7	38,2	0,54
	Juillet.	45,5	54,1	1,19
	Août.	59,4	56,9	0,96
	Septembre.	71,8	146,6	2,04
	Octobre.	88,5	162,4	1,84
	Novembre.	80,1	122,7	1,53
	Hiver.	196,1	127,1	0,65
	Printemps.	192,1	274,5	1,43
	Été.	175,6	149,2	0,85
	Automne.	240,4	431,7	1,79

Un hiver et un été un peu secs, un printemps et un automne très humides sont, au point de vue des chiffres, la caractéristique

de 1882. L'humidité excessive des trois derniers mois, qui ont fourni une quantité de pluie presque double de la moyenne, a été d'ailleurs rendue particulièrement sensible par la continuité absolue des chutes d'eau. Le nombre des jours de pluie a été de 22 en septembre, 25 en octobre, 25 en novembre soit 72 jours en trois mois.

Quant au total de la pluie annuelle, 983^{mm}, il est inférieur à celui de 1877 et de 1879.

— M. Raulin dit que les quantités de pluie recueillies à Bordeaux pendant l'année météorologique 1882 sont assez différentes d'après les divers observateurs; ainsi aux Eaux de la Ville, rue Paulin, on a eu 876,0, la moyenne décennale 1871-80 étant 862,1, tandis que M. Petit-Laffite, rue du Tondu, 73 *bis*, a obtenu 1263,1, la moyenne étant 870,1.

Il ajoute que la quantité de pluie augmente considérablement dans le Sud-Ouest, à mesure qu'on se rapproche de l'embouchure de la Bidassoa où se produit une moyenne. A Morcenx on a recueilli 1158,3, la moyenne étant 1179,2. A Saint-Martin-de-Hinx (entre Dax et Bayonne), il est tombé 1896,8, la moyenne étant 1429,2.

Dans toutes ces stations, l'aûtomne a été extraordinairement pluvieux; l'hiver et l'été ont été les saisons les plus sèches; l'année est fortement pluvieuse. Toutefois à Morcenx la quantité annuelle est exceptionnellement un peu inférieure à la moyenne.

	EAUX VILLE.	PETIT-LAFITTE.	MORCENX.	St-MARTIN-DE-HINX.
	mm	mm	mm	mm
Hiver........	83,0	153,0	99,3	204,9
Printemps...	229,0	284,0	147,6	349,5
Été..........	136,0	180,0	123,8	238,2
Automne.....	428,0	510,5	787,0	1104,2
Année mét...	876,0	1127,5	1158,3	1896,8
Moyenne déc.	762,1	870,1	1179,2	1429,2

Dans la France septentrionale, la pluviosité des saisons n'a pas été la même; à Bourges, l'été et l'automne ont été très pluvieux et cependant l'année a été peu supérieure à la moyenne. A Marly-le-Roy, près Versailles, l'été a également été presque aussi pluvieux que l'automne.

	BOURGES.	MARLY-LE-ROY.
	mm	mm
Hiver........	61,0	73,0
Printemps ...	75,6	137,8
Été..........	268,1	226,0
Automne.....	291,3	296,3
Année mét...	696,0	733,1
Moyenne déc.	672,3	

Séance du 25 janvier 1883. — M. le Président présente à la Société :

1° Un mémoire de M. le général Peaucellier, intitulé : *Note sur la déformation des images réfractées et sur l'aplanétisme d'un système de lentilles ;*

2° Un mémoire de M. Bonel, intitulé : *Notice sur les câbles électriques.* Ces deux mémoires sont publiés dans le présent volume.

— M. Jolyet rend compte des expériences qu'il a exécutées sur l'organe électrique de la torpille. Le mémoire de M. Jolyet est inséré dans le tome V (2e série) des *Mémoires* de la Société.

Séance du 8 février 1883. — MM. Morand et Vandercruyce sont élus membres titulaires.

M. le Président prononce le discours suivant :

« Nos nouveaux statuts et notre règlement intérieur, en décidant que notre première réunion de février serait une assemblée générale, ont créé pour votre Président le devoir de vous faire connaître en quelques mots les résultats de l'administration scientifique et financière de votre Conseil pendant l'année précédente.

» En 1882, il vous a été distribué :

» Le 3e fascicule du tome IV de la 2e série de nos *Mémoires ;*

» Le 1er fascicule du tome V de la 2e série de nos *Mémoires,* et j'ai la satisfaction de déposer aujourd'hui sur le bureau le 2e fascicule du tome V, fascicule qui renferme le résumé des procès-verbaux de nos séances de 1881-1882.

» Dans ces trois fascicules, je note les mémoires suivants :

» MM. *Abria* et *Kowalski :* Sur les unités électriques et magnétiques;

» M. *S. Günther :* Sur la dépendance entre certaines méthodes d'extraction de la racine carrée et l'algorithme des fractions continues;

» M. *Hautreux :* Sur les températures de la mer;

» M. *Hoüel :* Sur la généralisation de l'idée de quantité et l'enseignement de la trigonométrie;

» M. *de Lacolonge :* Sur le Pendule de Foucault;

» M. *Saltel :* Sur le cercle osculateur et la décomposition des enveloppes;

» M. *P. Tannery :* Sur la mesure du cercle d'Archimède; sur la solution des problèmes du 2e degré; sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède; sur le système astronomique d'Eudoxe, d'Aristarque de Samos, et sur un fragment géométrique d'Eudoxe.

» Le 3e et dernier fascicule du tome V qui est sous pres doit

contenir, entres autres choses, des mémoires du général Peaucellier, de MM. les professeurs V.-Zakhartchenko et G. Dillner, et de M. P. Tannery.

» C'est à coup sûr une bonne fortune pour la Société que d'avoir publié la série des recherches de M. Tannery sur l'histoire des mathématiques et de l'astronomie grecque. En tout cas il me semble que nous avons le droit d'être satisfaits de nos publications récentes; nous le serions encore davantage si ceux d'entre nous qui cultivent les sciences chimiques ou naturelles voulaient bien développer dans quelques mémoires les attachantes communications dont ils trouvent les éléments dans leurs ballons ou dans leurs expériences de laboratoire.

» L'année 1882 a été également prospère au point de vue financier; l'exercice se solde par un encaisse de 3920 fr. 10, et je ne comprends pas dans ce chiffre la somme de 10000 fr. que nous devons à la généreuse libéralité de M. Fournet. »

— M. Doumer fait la communication suivante sur quelques expériences de photochimie. Lorsqu'on soumet à l'action des rayons lumineux, sous écran percé, une feuille de papier écolier ordinaire, on constate qu'elle acquiert la propriété de décomposer l'iodure de potassium, les parties insolées deviennent brunes, les parties soustraites à l'action de la lumière restent incolores.

La durée de l'exposition n'a pas besoin d'être fort longue, quelques minutes (5 à 10) suffisent habituellement. Pour l'immersion dans la solution d'iodure de potassium (10 p. 100), on peut attendre plusieurs semaines et même plusieurs mois après l'insolation, pourvu, bien entendu, que le papier insolé ait été conservé à l'obscurité.

L'image apparaît quelques secondes après une immersion de 30 secondes à 2 minutes; mais dans tous les cas elle est beaucoup diminuée, si l'on reporte au soleil le papier imbibé de la solution iodurée; alors le soleil agit plus spécialement sur les parties primitivement insolées.

Le phénomène se reproduit avec du papier conservé dans l'eau bouillie. Toute la manipulation étant faite sous l'eau.

Il se reproduit également avec un papier conservé dans l'acide carbonique, dans l'hydrogène et dans l'oxyde de carbone. Ces faits démontrent qu'il n'est pas dû à l'ozonisation de l'air.

Les carbures favorisent ces phénomènes; ainsi, le papier imbibé soit d'essence de pétrole, soit d'essence de térébenthine, soit d'une essence quelconque s'insole bien plus rapidement.

Un papier insolé décompose l'iodure de potassium bien plus

rapidement si on l'humecte avec de l'essence de pétrole. Ces faits peuvent tenir soit à une modification de la substance même du papier, soit à la conservation de l'image lumineuse. C'est là un point que je me propose d'étudier.

M. Doumer présente également le résumé de ses expériences sur le dosage de strontium. On sait combien il est difficile de séparer le calcium et le strontium par les procédés chimiques habituels. Cette séparation serait toutefois fort utile pour la connaissance exacte de la composition des eaux minérales. Le strontium y est, en effet, constant et dans certains cas même très abondant. Ses propriétés, si voisines de celles du calcium, font que les procédés de dosage employés pour déterminer le poids de ce dernier élément entraînent en même temps le strontium et, par conséquent, ne permettent pas d'obtenir des chiffres exacts.

Le spectre du strontium comprend un grand nombre de raies. Toutes ne sont pas également bonnes; il faut, en effet, pour que la lecture soit facile : 1° que la raie soit nette; 2° vive; 3° assez éloignée de raies brillantes; la raie 460,7 est la seule qui satisfasse entièrement à ces trois conditions. C'est par conséquent celle qu'il convient de choisir.

Il faut, en outre, posséder une source de chaleur constante et ne dénaturant pas le spectre du chlorure de strontium. La flamme chlorhydrique remplit parfaitement ces conditions.

Le dosage peut se faire soit par des dilutions successives, soit par la durée de la radiation spectrale.

Le premier procédé, imaginé par M. Dieulafait, consiste à diluer jusqu'à extinction complète du spectre. Il vaut mieux ne pas attendre ce degré extrême de dilution et s'arrêter lorsque un centimètre cube de solution, évaporé avec précaution sur une spirale de platine, ne donne la raie 460,7 que pendant 2 secondes au plus. Alors on peut être certain qu'il contient 0mg00029 de strontium métallique pur.

En opérant par la mesure de la durée du spectre, on se base sur les faits suivants :

0mg00029 de strontium	dans 1 cent. cube donne un spectre de	2s	de durée.
— 58	—	3	—
— 87	—	5	—
— 116	—	8	—
— 145	—	10	—
— 194	—	20	—

Ces nombres sont absolument constants, pourvu, bien entendu, que les solutions soient pures. Il convient dans ce dernier procédé

de diluer assez fortement, afin que la durée n'excède pas vingt secondes.

Ces résultats sont troublés par la présence des autres métaux. Dans les eaux minérales, il n'y a à tenir compte que du trouble causé soit par les métaux alcalins, soit par le calcium. On élimine les premiers en les précipitant à l'état d'oxalate. On élimine la plus grande partie du calcium en précipitant ce dernier par du carbonate d'ammoniaque en présence d'un grand excès de sel ammoniac. La liqueur filtrée contient toute la strontiane et un reste de chaux, le tout est précipité par l'ammoniaque. La strontiane ainsi obtenue, malgré la petite quantité de chaux qu'elle contient, peut très bien servir au dosage, car la présence de la chaux, lorsque son poids ne dépasse pas la moitié de celui du strontium, ne nuit en aucune façon.

— M. Dupetit présente à la Société un *nouveau régulateur de température.* Cet appareil a sur les régulateurs ordinairement employés l'avantage d'être graduable, en sorte qu'une étuve pourra prendre d'elle-même la température voulue et fixée d'avance par la position du piston du régulateur. De plus, ce régulateur est construit de façon à n'avoir plus à redouter la rupture de la membrane élastique, accident qui se produit souvent avec l'appareil de Schlœsing. La sensibilité du nouveau régulateur est égale à celle du régulateur de Schlœsing.

Séance du 22 février 1883. — M. Raulin donne sur la grande dépression barométrique qui s'est produite le 31 janvier dernier, sur le sud-ouest de la France, les indications suivantes basées sur ses observations à Bordeaux et sur celles qui lui ont été communiquées par M. Vaussenat, directeur de l'observatoire du Pic-du-Midi, pour cette station, Bagnères-de-Bigorre et l'École normale de Tarbes.

La grande dépression s'est produite à Bordeaux de minuit du 30 janvier à midi du 1er février, pendant trente-six heures, avec un minimum le 31, à 6 ou 7 heures du soir. A Tarbes, sa durée a été exactement la même, mais le minimum a eu lieu à 3 heures du soir. A Bagnères-de-Bigorre, la durée doit avoir été à peu près la même, mais le minimum paraît s'être produit à une heure du soir. Au Pic-du-Midi, la grande dépression, commencée probablement en même temps, s'est prolongée le 1er jusqu'à 3 heures du soir, durant ainsi au moins 39 heures; le minimum a été atteint le 31, à 7 heures du soir, comme à Bordeaux.

A Bordeaux et à Tarbes, la grande dépression a été précédée

d'une plus petite le 29, vingt-quatre heures auparavant. A Bordeaux, à Tarbes et à Bagnères-de-Bigorre, elle a été suivie par une autre dépression petite quinze heures après. Le défaut d'observations n'a pas permis de constater l'existence de cette dernière à Bagnères, et l'existence d'aucune des deux au Pic-du-Midi; la dernière cependant y paraît probable.

La grande dépression s'est produite, on peut dire, simultanément à Bordeaux et au Pic-du-Midi; il est fort à regretter qu'aucune observation ne soit faite au Pic-du-Midi pendant les douze heures de nuit, et surtout qu'on n'y possède pas un baromètre enregistreur. Cet observatoire ne rend pas ainsi tous les services qu'il pourrait rendre.

L'amplitude de l'oscillation barométrique va en diminuant à mesure que l'altitude augmente, c'est-à-dire à mesure que la densité de l'atmosphère diminue; celle du Pic-du-Midi n'est que les deux tiers de celle de Bordeaux; ainsi :

	ALTITUDE.	MAXIMUM.	MINIMUM.	DIFFÉRENCE.
Pic-du-Midi...	2859^m	28 7 h. soir 546.0	31 7 h. soir 520.0	26.0
Bagnères....	551	28 7 h. mat. 726.0	31 1 h. soir 694.0	32.0
Tarbes......	308	28 3 h. soir 747.8	31 3 h. soir 714.2	33.6
Bordeaux....	18	28 midi 772.5	31 6 h. soir 734.2	38.3

Il est donc passé sur le sud-ouest de la France une légère dépression suivie, vingt-quatre heures après, d'une très grande, et quinze heures après, d'une seconde petite, c'est-à-dire trois ondes successives. La carte du Bureau central du 31 janvier, à 8 heures du matin, montrant le golfe de Gascogne centre d'une dépression cyclonique semi-circulaire, on pourrait supposer celle-ci entourée d'un fossé ovalaire dont ces deux passages, suivant une trajectoire, auraient produit les trois ondes.

Cependant il y a une certaine incertitude, car ce cyclone n'était pas un de ceux qui, venant de l'Atlantique et des États-Unis, traversent l'Europe en se dirigeant vers l'Est; les cartes de M. Mascart le montrent oscillant pendant une huitaine de jours sur l'Europe occidentale; ainsi il était :

Les 27 et 28 janvier, sur la Norvège;
Les 29 et 30 — sur la mer du Nord;
Le 31 — sur le golfe de Gascogne;
Le 1er févr. sur l'Atlantique à l'ouest de l'Écosse.
Le 2 — sur l'entrée sud de la mer d'Irlande.
Le 3 — sur l'Écosse et la Norvège;
Les 29, 31 et 2, c'était un véritable cyclone circulaire bien circonscrit.

— M. Rayet annonce qu'il a observé, il y a quelque temps, un halo lunaire d'une grande beauté. Le bord de ce halo coïncidait

fortuitement, d'une manière très exacte, avec la planète Jupiter, et M. Rayet a tiré parti de cette circonstance pour mesurer le diamètre du halo, par la résolution d'un triangle sphérique dont tous les éléments se trouvaient connus au moment de l'observation. Le diamètre trouvé était de 22°7' tandis que, d'après les calculs de Bravais, ce diamètre aurait dû être de 21°45' pour la couleur orangée. On ne peut guère espérer une approximation plus grande, étant donnée la difficulté de déterminer exactement la position de l'extrême bord d'un halo de ce genre.

Séance du 8 mars 1883. — M. Künstler est élu membre titulaire.

— MM. Azam et Jolyet sont nommés membres du Conseil d'Administration.

— M. Dupetit communique à la Société les premiers résultats de ses recherches sur les matières colorantes des champignons; du *Clathrus cancellatus,* l'auteur a extrait un principe cristallisé qu'il nomme clathrine. Cette substance est soluble dans le sulfure de carbone en pourpre magnifique; traitée par l'acide sulfurique concentré, elle prend une belle coloration bleue.

Il y a, en outre, dans le même champignon, une matière colorante jaune analogue à l'autoxantine.

La clathrine est indécomposable par la lumière à l'abri de l'air, mais, sous l'influence simultanée de l'oxygène de l'air et de la lumière, elle s'altère rapidement en fournissant successivement deux produits d'oxydation. Ces propriétés que M. Dupetit signale à l'attention des botanistes semblent indiquer que la clathrine joue un rôle physiologique important.

La solanorubine, découverte par M. Millardet dans la tomate, a de très grandes analogies de caractère et de propriétés avec la clathrine.

M. Dupetit, répondant à une observation de M. Raulin, dit qu'il n'a pu obtenir assez de clathrine pure pour en déterminer la formule, le clathrus étant fort rare dans les environs de Bordeaux.

— M. Lespiault communique à la Société un certain nombre de documents qu'il a reçus d'Amérique, et qui lui paraissent de nature à confirmer les idées météorologiques qu'il a, à plusieurs reprises, développées devant ses collègues.

En résumé, voici les points sur lesquels M. Lespiault croit devoir appeler l'attention des météorologistes :

1° Les accidents météorologiques qui se multiplient depuis quelques années sont assez fréquents et assez graves pour qu'il y

ait lieu de rechercher si l'on ne doit pas les attribuer à une cause permanente;

2° L'ensemble des phénomènes constatés s'expliquerait par une hypothèse très simple; il suffirait d'admettre un accroissement graduel d'énergie dans les cyclones qui nous arrivent d'Amérique;

3° La cause la plus probable de cet accroissement d'énergie est l'extension énorme que les déboisements américains ont pris dans ces dernières années.

— M. Lespiault présente à la Société une pierre, probablement météorique, et dont voici l'histoire : Le dimanche 28 janvier 1883, à 2 heures 3/4 de l'après-midi, la population tout entière de la commune de Saint-Caprais de Quinsac, canton de Créon (Gironde), fut mise en émoi par une série de cinq violentes détonations, comparables à des coups de canon et suivies d'un bruit pareil à une fusillade. Les personnes qui se trouvaient hors des maisons aperçurent alors, au point d'où paraissait partir le bruit, un nuage noir, pareil à la fumée produite par une explosion, et très distinct des nuages ordinaires qui parsemaient le ciel. Deux cultivateurs, MM. Jean Perrotin et son fils, virent en même temps un objet enflammé tomber rapidement, dans la direction du Sud-Est, à peu de distance de la route, dans une pièce de la propriété de M. de Canolle.

Ces cultivateurs, un peu effrayés, coururent vers le village et, au milieu de l'émotion ou même de la terreur générale, personne ne songea à se mettre, le jour même, à la recherche de l'aérolithe. Mais, le lendemain, un propriétaire de Cambes, M. Elliot, mit en réquisition les témoins du phénomène et, à l'endroit même qu'ils avaient indiqué, on déterra une pierre très dense, pesant 282 gr. 5 et enfoncée dans la terre à 10 centimètres de profondeur. Les dimensions du trou, à la surface, étaient 0^m06 sur 0^m04.

Cette pierre, remise à M. Lespiault par M. Labouchède, oncle de M. Elliot, a beaucoup des apparences d'un caillou ordinaire. Cependant, indépendamment de sa grande densité, elle présente sur un de ses côtés de fines craquelures très caractéristiques, et sur l'autre une teinte noire aussi marquée que si elle était entièrement tachée d'encre.

On ne pourra évidemment se prononcer sur l'authenticité de cette météorite qu'après un examen détaillé de laboratoire. Notre collègue, M. Forquignon, a bien voulu se charger de cet examen.

M. Lespiault ajoute, en terminant, que le bruit a été entendu des communes voisines. Il y a lieu de se demander, d'après le nombre des détonations, s'il n'y a pas eu d'autres fragments; mais

ces fragments, s'ils existent, n'ont pas été recueillis. La pierre, du reste, ne présente aucune cassure.

— M. Forquignon a examiné cette pierre et en a déterminé la densité qui s'est trouvée égale à 3,3. Les minéraux les plus répandus tels que la silice, le quartz, la calcite, etc., ont une densité qui varie de 2,2 à 2,7; il y a donc probablement une masse métallique à l'intérieur de cette pierre.

Séance du 5 avril 1883. — M. Goguel est élu membre titulaire.

— M. Lespiault ajoute quelques mots à la communication qu'il a faite, dans la séance du 8 mars, au sujet de la pierre météorique tombée dans le mois de janvier à Saint-Caprais de Quinsac (Gironde). Les journaux ont signalé, vers la même époque, la chute d'un assez grand nombre de bolides, sur divers points de l'Europe. Le journal anglais « *Nature* » signale en particulier la pierre météorique tombée à Alfianello en Italie, d'un poids considérable, de forme ovoïde, qui fit dans la terre un trou d'un mètre de profondeur. Les phénomènes extérieurs qui ont accompagné la chute du bolide rappellent ceux qui ont été observés à Quinsac.

— M. Garnault a trouvé chez l'*Asterias Rubens* des pédicellaires à trois branches. Cette forme de pédicellaires n'avait été signalée que chez les Échinides; on ne connaissait chez les Stellérides que des pédicellaires à deux branches. Le genre *Luidia* seul, chez les Stellérides, présente des pédicellaires à deux branches, mais ce genre est très éloigné du genre *Asteria*.

Séance du 19 avril 1883. — M. Raulin, revenant sur les communications faites par M. Lespiault, les 23 mars 1882 et 8 mars 1883, dit que pour faire adopter l'opinion de l'influence des déboisements américains il ne suffit pas de quelques faits peut-être simplement accidentels.

Il pourrait citer l'année 1821, qui a offert les pressions les plus extrêmes qui aient jamais été observées à Paris, $780^{mm}8$ et $713^{mm}2$ avec un écart de $67^{mm}6$. Personne à cette époque, ni depuis, ne l'a considérée comme l'aurore d'une ère météorologique nouvelle. A cette époque on ne déboisait pas l'Amérique du Nord.

Pour arriver à établir scientifiquement quels changements généraux se produisent dans la constitution de l'atmosphère en France et en Europe, il faut étudier les observations faites pendant deux périodes assez éloignées, l'une antérieure et l'autre contemporaine des grands déboisements américains. M. Raulin a examiné à ce point de vue les observations barométriques faites à l'Obser-

vatoire de Paris. Une première période de dix ans comprend les premières publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, de 1836 à 1845, moyenne 1840; la seconde, de dix ans aussi, a été dressée pour 1871 à 1881, moyenne 1875, d'après les *Annales de l'Observatoire* et les registres manuscrits mis à sa disposition par M. Mouchez.

Le relevé, pour 9 heures du matin, des plus grandes dépressions cycloniques pendant ces vingt années, séparées par un intervalle de trente-cinq ans, montre qu'il se produit en moyenne vingt-cinq grandes dépressions chaque année. Il n'était nécessaire de prendre en considération que les cyclones dans lesquels la pression barométrique est descendue au-dessous de 740 et de 730^{mm}. Les résultats obtenus pour chacune des deux périodes établissent la vérité scientifique et sont les suivants.

	1836-45 (10)		1871-81 (10)	
Cyclones au-dessous de 740^{mm}.	47	minimum de	36	minimum de
Cyclones au-dessous de 730^{mm}.	(4)	727^{mm},8 en 1847	(1)	728^{mm},6 en 1876

Si, considérant ces données incontestables on voulait en déduire quelque chose, ne devrait-on pas au contraire conclure qu'il s'est produit une modification favorable, une amélioration notable dans notre climat européen, puisque le nombre des plus forts cyclones est descendu de 47 à 36, après un intervalle de trente-cinq années.

Et si les déboisements américains avaient, comme le croit M. Lespiault, une influence capitale, ne serait-ce pas une influence bienfaisante et non une influence funeste; et l'Europe n'aurait-elle pas lieu de désirer le progrès d'un déboisement qui aurait déjà empêché la production d'un quart des grands cyclones.

Mais, dit-il en terminant, je n'attache pas une pareille influence à cette couche si mince de forêts séculaires qui tapisse le sol américain; je crois qu'elle a, sur la marche des ondes atmosphériques si immenses, encore moins d'action que n'en a dans le déferlement des vagues la surface plus ou moins raboteuse (sableuse ou caillouteuse) des plages; et l'on sait que celle-ci n'est pas bien grande.

Les différences constatées entre les deux périodes précitées, éloignées de trente-cinq ans, ne me paraissent, comme aux météorologistes du Bureau central, que des fluctuations temporaires; fluctuations auxquelles on arrivera peut-être quelque jour à reconnaître une certaine périodicité.

— M. Lespiault répond qu'il a toujours rappelé, dans ses communications, que les observations faites sur un seul point, quel qu'il fût,

étaient absolument impropres à donner aucune indication précise sur les mouvements généraux de l'atmosphère. Il peut ajouter aujourd'hui qu'il serait difficile de choisir une station plus ingrate que celle de Paris. Les centres des grandes dépressions (lesquelles du reste ne sont pas toutes des tempêtes tournantes, encore moins des cyclones) passent à peu près tous au nord de l'Irlande et de l'Écosse, marchant vers les côtes septentrionales de Norvège, et se tenant en moyenne à 4 ou 500 lieues de la France. Dans les excellents résumés mensuels que publie, depuis le mois de novembre 1880, le bureau météorologique, on trouve pour les 28 mois qui s'arrêtent à février 1883 inclusivement, les trajectoires de 4 dépressions *de premier ordre,* c'est-à-dire inférieures à 720^{mm}; celles de 22 dépressions de 2e ordre (entre 720 et 730), et celles de 78 dépressions de 3e ordre. *Pas un seul des 26 centres de premier ou de second ordre* ne passe *à moins de cent lieues* de nos côtes, et, sur les 78 centres de dépressions du 3e ordre, 5 seulement pénètrent plus ou moins en France, restant d'ailleurs, à l'exception d'un seul, fort éloignés de Paris. On peut remarquer, sans qu'il y ait du reste rien à en conclure pour le moment, que, sur ces cinq dépressions, trois se rapportent aux deux premiers mois de 1883.

La raison physique de ce fait est facile à saisir. Les grandes dépressions traversent généralement l'Atlantique, au nord du 40e degré de latitude, en marchant vers l'Est ou le Nord-Est. A l'approche du continent européen, leurs bords sont maintenus par le triple massif des Pyrénées, du plateau central et des Alpes, ce qui repousse leur centre à 4 ou 500 lieues. Par suite, Paris est constamment sur les bords et il est facile d'en conclure que la hauteur du baromètre, dans cette station météorologique n'a à peu près aucun rapport avec la profondeur absolue des dépressions qui traversent l'Europe. *Vouloir mesurer l'énergie des tempêtes atmosphériques par la hauteur du baromètre à Paris, c'est vouloir mesurer l'énergie des tempêtes de l'Océan par la hauteur de la marée dans le port de Brest.*

Au surplus, la profondeur absolue de la dépression est loin d'être proportionnelle à l'énergie. D'abord, il est clair que cette énergie ne peut dépendre que de la profondeur *relative,* ce qui exige la connaissance des pressions au bord et au centre. En second lieu, même pour des bourrasques de profondeur relative égale, les météorologistes attachent une grande importance au *gradient* qui mesure l'*escarpement* de la bourrasque. On trouve un exemple remarquable de ces difficultés de mesure dans la tempête du 14 octobre 1881, que M. Symons juge, d'après les désastres

qu'elle a causés, la plus violente des cinquante dernières années; la hauteur barométrique minimum (toutes les hauteurs sont ici réduites au niveau de la mer) n'est que de 721^{mm}9, c'est-à-dire que la bourrasque qui produit la tempête n'est que de *second* ordre, tandis que, le 27 novembre suivant, on voit passer presque sur la même région, avec moins de désastres, une bourrasque dont la profondeur est marquée par 708^{mm}9, le plus bas chiffre barométrique qui ait été noté jusqu'ici, croyons-nous. Quant au gradient, il est à peu près le même dans la tempête du 14 octobre que dans celles du 16 novembre 1878 et du 20 février 1879, très violentes aussi, mais moins intenses.

Un des éléments les plus importants pour la mesure directe de l'énergie des bourrasques serait la connaissance, en tous leurs points, de la vitesse du vent. Mais la mesure en est malaisée par les gros temps, ce qui constitue une des principales difficultés de cette mesure directe.

Reste la mesure indirecte, c'est-à-dire *par les effets*. Une énergie croissante des bourrasques doit se traduire par l'apparition des phénomènes extrêmes. Ce sont ces phénomènes dont M. Lespiault a signalé la fréquence extraordinaire dans ces dernières années: il rappelle brièvement quelques-uns des faits les plus remarquables dont il a parlé, et qu'on trouvera, pour la plupart, consignés au bulletin météorologique.

I. *Pressions :* 1° Amplitude, permanence et hauteur extraordinaires des anticyclones de 1879-80 et de 1881-82.

2° Le 17 janvier 1882, le baromètre atteint à Paris la hauteur de 786^{mm}92, laquelle n'a été dépassée qu'une fois, en février 1821.

3° Le 27 juillet 1882, le baromètre s'élève à Paris à 775^{mm}, ce qui n'était jamais arrivé, dans le mois de juillet, depuis le commencement du siècle.

4° Le 23 février 1883, il s'élève à 783^{mm}90 (niveau de la mer), la plus grande hauteur qu'il ait jamais atteinte à Paris, dans le mois de février, sauf la pression de 1821 que nous venons de mentionner.

II. *Température :* 1° Paris, en moins de deux ans, a passé par les extrêmes de froid et de chaud qu'on a ressentis jusqu'ici dans notre région. Les extrêmes observés à Saint-Maur ont été de — 25°,6 en décembre 1879 et de 38°,4 le 19 juillet 1881.

2° Le 16 janvier 1881, froid de — 22° à Bordeaux et à Nérac, tandis que, le 18 juillet de la même année, la chaleur atteint 39°,1.

3° Dans la matinée du 23 au 24 octobre 1880, on observe à Bruxelles un froid de — 2°,5 ce qui n'avait jamais été constaté à

l'observatoire, dans le mois d'octobre. A Paris, le lendemain, le froid atteint — 4°,2. (Bulletin mensuel d'octobre 1880.)

4° Du 8 au 14 juin 1881, le thermomètre à minima descend plusieurs fois à Bordeaux jusqu'à 4°. Le 17 du même mois, il descend à Marac (Haute-Marne) à 2° avec gelée blanche. Les 28 et 31 juillet 1882, il marque 5° à Clermont et à Limoges.

III. *Tempêtes d'une violence extraordinaire :* 16 novembre 1878, 20 février et 23 décembre 1880, 19 mars, 13 octobre et 27 novembre 1881, 21 février, 24, 25, 26, 27, 28 octobre 1882; ouragan en Suisse le 31 octobre 1882; tempête de neige sans précédents, sur tout le littoral de la Méditerranée occidentale, du 9 au 13 mars 1883.

IV. *Inondations :* on ne rappellera que celles de l'année dernière : inondations désastreuses à Arcachon, en Italie, dans le Tyrol; crues extraordinaires du Rhin et de ses affluents; crues énormes et répétées de la Seine, etc., etc.

V. *Longues séries* de beaux jours. *Séries interminables* de pluies, de vents et de tempêtes.

VI. Enfin, comme *faits locaux* communiqués par M. l'Ingénieur du service maritime de Bordeaux : Soubernes de 1875 et de 1879, d'une fréquence et d'une soudaineté antérieurement inconnues; débit extraordinairement faible de la Garonne, dans les premiers mois de 1882; marée de janvier 1882, à la Pointe de Graves, la plus basse qu'on ait vue; marées exceptionnellement hautes en octobre, etc.

Des faits aussi multipliés montrent que, depuis sept à huit ans, depuis trois ans surtout, le temps est extraordinairement troublé. Ce point, du reste, semble assez généralement admis et a même été constaté, à l'Académie des Sciences, dans la séance du 20 mars 1881, où une commission composée de MM. Faye, Janssen, Daubrée et Jurien de La Gravière a été chargée d'en rechercher les causes.

Reste à savoir si cet ensemble de phénomènes tient à un changement de climat durable ou simplement périodique. A cet égard, M. Lespiault reconnaît qu'il n'y a aucune certitude. Il voudrait croire à un phénomène périodique; malheureusement, ce qui se passe lui fait craindre le contraire. Il a cherché du reste à établir que cet ensemble de faits, souvent contradictoires en apparence, peut s'expliquer par un *postulatum* très simple qui se formulerait ainsi :

Tout se passe, depuis sept à huit ans, comme si les bourrasques qui viennent d'Amérique en Europe augmentaient graduellement d'énergie.

Si ce postulatum est fondé, de toutes les causes physiques aux-

quelles on peut attribuer cet accroissement d'énergie, la plus probable lui paraît être le déboisement de l'Amérique.

Il n'admet pas du reste que ce déboisement puisse être sans effet sur les mouvements généraux de l'air et sur les allures du courant des bourrasques. Depuis longtemps déjà, les météorologistes savent qu'un sol même plat, diminue rapidement la vitesse du vent venant de la mer. En discutant les observations de M. Mohn, M. Peslin trouve que, pour avoir les vitesses sur terre, il faut appliquer aux vitesses sur mer un coefficient de correction de 0,40 pour les vents faibles et de 0,60 pour les tempêtes. (Bulletin du 6 juillet 1872.)

Les observations faites par le *Challenger*, en 1876, confirment cette diminution de vitesse aux approches de la terre, et plus encore dans l'intérieur du continent. En outre, les recherches de M. Stevenson à Édimbourg, de M. Köppen à Vienne, etc., montrent que le ralentissement de l'air est surtout dû au frottement du sol et qu'il se communique par le frottement mutuel des diverses couches, par la *viscosité* de l'air, aux parties supérieures de l'atmosphère. Il paraît évident que le frottement doit être plus considérable sur un sol couvert de forêts, que sur un sol nu.

— M. Dupetit communique à la Société le résultat de quelques recherches sur les causes des propriétés toxiques des moules. D'après M. Beunie, dont l'opinion a été adoptée par quelques auteurs classiques, les accidents graves, qui ont été parfois causés par l'ingestion des moules, seraient dus à un principe très caustique, contenu dans le frai des astéries qui se répand dans la mer, et qui serait absorbé par les moules.

M. Dupetit n'a pu constater l'existence d'aucune substance caustique ou même vénéneuse dans le frai des astéries. Chez les cobayes et les lapins qui ont reçu, en injection sous-cutanée, des préparations de frai d'astérie, il a seulement observé quelques accidents inflammatoires locaux peu graves, analogues à ceux qui se produisent généralement à la suite de l'injection de liquides organiques altérables non stérilisés. Le principe vénéneux des moules n'a donc pas pour origine le frai des astéries.

— M. Gayon présente à la Société deux flacons contenant de la houille en pleine fermentation forménique. Le gaz qui se dégage est exempt d'acide carbonique, et constitué par des protocarbures d'hydrogène. Le microbe qui détermine ce phénomène paraît avoir ses germes dans la houille elle-même; il y trouve tous les éléments nécessaires à son développement. La richesse de la houille en aliments pour les êtres organisés est prouvée d'ailleurs par les deux faits suivants que M. Gayon met sous les yeux de la Société:

1° des fragments de houille ensemencés accidentellement avec des graines de graminées et de légumineuses portent de petites plantes très vertes, mesurant 10 centimètres au moins de longueur; 2° des morceaux de coke, restés à l'air pendant plusieurs mois, se sont recouverts de mousses et de lichens.

M. Gayon pense que la présence du grisou dans les mines de houille peut s'expliquer, dans certains cas, par l'action, ancienne ou actuelle, des êtres infiniment petits.

Séance du 10 mai 1883. — M. Lespiault, avant de poursuivre l'exposition de ses recherches météorologiques, croit nécessaire de bien préciser de nouveau ses idées fondamentales.

Voici le point dont il part, comme établi par les faits qu'il a souvent rappelés : depuis six ou sept ans, peut-être dix, le temps a offert, à peu près sur tous les points de l'Europe et même de l'Afrique septentrionale, des anomalies fréquentes, caractérisées d'une manière générale, par des extrêmes de température, de pression, de sécheresse et d'humidité, par des séries prolongées de beau temps et de tempêtes, par de brusques passages d'un état à l'autre.

Tous ces faits, souvent contradictoires en apparence, peuvent s'expliquer par un postulatum très simple :

Les choses se passent, depuis quelques années, comme si les bourrasques qui abordent l'Europe occidentale avaient graduellement augmenté d'énergie. Dans ce cas, en effet, il doit s'en présenter de temps à autre, quelques-unes d'une profondeur exceptionnelle. Il en résulte des extrêmes de pression, ce qui entraîne des températures extrêmes ; il en résulte aussi des tempêtes plus étendues et plus intenses; il en résulte surtout un courant de bourrasques mieux canalisé, ce qui occasionne, sur le passage de ce courant, un mauvais temps prolongé, et sur les bords des calmes persistants, avec une étroite zone de séparation qu'un léger déplacement des anticyclones suffit à franchir en quelques heures.

Cet état de choses est-il permanent? c'est ce que l'avenir nous apprendra. S'il est effectivement dû à une cause permanente, M. Lespiault croit que cette cause est probablement le déboisement rapide de l'Amérique du Nord ; mais il ajoute que ce n'est là qu'une hypothèse tout à fait distincte de sa théorie.

Aujourd'hui, c'est cette théorie même qu'il se propose d'examiner sous un nouveau point de vue. Jusqu'ici il n'a abordé la mesure des bourrasques que par leurs effets; il va rechercher aujourd'hui jusqu'à quel point on peut essayer de les mesurer directement par

l'examen détaillé des cartes journalières du service météorologique.

Si l'on assimile une bourrasque à un système libre en mouvement, son énergie totale se compose : 1° de son énergie actuelle qui comprend elle-même l'énergie de translation et l'énergie de rotation ; 2° son énergie virtuelle dont la mesure serait relativement simple, si l'air était un gaz sec, mais devient très difficile à cause des changements qui s'opèrent, à chaque instant dans la quantité de vapeur d'eau qu'il renferme.

Laissons d'abord l'énergie virtuelle de côté, et occupons-nous seulement de l'énergie actuelle, en nous bornant même, pour le moment, à l'énergie de translation, parce que la mesure de l'énergie de rotation s'appuie sur des formules mathématiques qui doivent être présentées à part.

Alors même qu'on se borne à étudier l'énergie de translation, il y a de grandes difficultés, à cause des modifications incessantes de forme que subissent les bourrasques et de leurs fréquentes subdivisions. Cependant, dans les dix-huit années qui se sont écoulées, depuis que l'on construit chaque jour la carte du temps, il est possible de choisir un certain nombre de bourrasques à trajectoire très nette et facilement mesurable.

En tout cas, il faut, de toute nécessité, commencer par une étude d'ensemble pour dégager, si c'est possible, la loi générale de ces trajectoires.

Dans un premier relevé, on est conduit à distinguer les bourrasques d'hiver des bourrasques d'été. Ces dernières ne dépassent guère la profondeur de 735^{mm} (niveau de la mer), ce qui ne les empêche pas d'être souvent désastreuses, parce qu'elles arrivent au moment où les végétaux auraient besoin de chaleur. Les grandes bourrasques d'hiver atteignent des profondeurs beaucoup plus considérables; mais, par leur étendue même, leur centre est maintenu très loin de la France, parce que leurs bords ne peuvent que très exceptionnellement franchir la barrière formée par les Pyrénées, le Plateau central et les Alpes. Quand ces dépressions pénètrent en partie dans le bassin de la Méditerranée, soit par l'Espagne, soit par l'ithsme Pyrénéen, soit enfin par les vallées de la Saône et du Rhône, ce n'est que par suite d'une segmentation, et de telle sorte que le fond de la dépression partielle, qui s'est frayé un chemin entre les montagnes, ne dépasse guère la profondeur de 735^{mm}.

A cause de leur rareté même, ces dépressions, exceptionnelles pour la France, méritent attention. M. Lespiault examine, à cette

occasion, les deux plus fortes baisses barométriques pour Paris que M. Raulin a citées dans son travail. La baisse du 4 décembre 1876 (728^{mm} à l'Observatoire, 734^{mm} au niveau de la mer) a été produite par l'arrivée d'une bourrasque de second ordre (720^{mm}) qui marchait droit sur Brest et dont la répulsion par les montagnes est rendue évidente par les cartes des jours suivants.

La dépression du 24 au 25 décembre 1821 est encore plus remarquable; elle est de 715^{mm}4 à l'Observatoire, ce qui donne 722^{mm} au niveau de la mer. Cette dépression, la plus considérable qui se soit produite à Paris, a été étudiée avec détail par M. d'Hombres-Firmas, dont M. Lespiault soumet à la Société le mémoire accompagné de cartes. Ces cartes synoptiques montrent que la dépression a été aussi ce jour-là exceptionnelle à Alais, à Turin, à Genève et à Toulouse. Les éléments dont on dispose, d'après ce travail, sont insuffisants pour reconstituer pleinement la bourrasque qui a produit toutes ces baisses barométriques; mais ils suffisent pour montrer que cette bourrasque avait probablement, par une exception bien rare, totalement franchi le plateau central. M. Lespiault termine l'examen du mémoire de M. d'Hombres-Firmas en citant quelques phrases de ce météorologiste desquelles il résulte qu'il voyait très clairement, dès 1821, qu'on n'arriverait à de grands résultats en météorologie que par des observations faites simultanément sur des points très éloignés les uns des autres.

Reprenant l'étude de l'ensemble des bourrasques européennes depuis 1865, d'après les cartes du service météorologique, M. Lespiault a commencé par dresser un tableau général provisoire qu'il présente à la Société. Dans ce tableau, les bourrasques sont divisées en cinq classes, d'après leur profondeur, à cause de la facilité de cette classification, et bien que la profondeur ne soit qu'un des éléments de l'énergie. La première classe va de 710^{mm} à 715^{mm}, la deuxième de 715^{mm} à 720^{mm}, et ainsi de suite jusqu'à 735^{mm}. On s'est arrêté à 735^{mm} pour deux raisons : la première est que ce chiffre est une sorte de limite inférieure pour les bourrasques d'été, et la seconde c'est qu'entre 735^{mm} et 740^{mm}, les bourrasques, très nombreuses, semblent présenter des caractères communs qui pourraient donner lieu à une étude d'ensemble. On remarquera, en passant, que la pression 735^{mm} au niveau de la mer, correspond à 728^{mm}6 observée à Paris, de sorte que les bourrasques dont il est ici question sont *toutes*, à l'exception de celle du 4 décembre 1876, d'une profondeur inférieure à la plus forte baisse barométrique qui se soit produite à Paris, de 1870 à 1880.

Les bourrasques inscrites au tableau sont au nombre de 170 (sauf erreur possible). A l'aspect seul de ce tableau, on reconnaît la profonde différence qui distingue les mois d'hiver et les mois d'été. Il semble aussi que cette différence soit moins marquée dans ces dernières années.

Si d'autre part on relève les profondeurs inférieures à 720^{mm}, on croirait, au premier abord, que ces profondeurs ont éprouvé, dans ces dernières années, un accroissement énorme.

Voyons-en, en effet, la liste :

		mm			mm			mm
14 janv.	1865	719	16 janv.	1871	719,9	1er mars	1880	718,3
16 —	1866	719,2	18 —	1872	714,0 (Thursö).	19 —	1881	714,8 (Uleaborg).
6 févr.	1867	719,7	24 —	1872	718,3 (Scarboro).			711,5 (Arkangel).
1er —	1868	720,0	22 —	1873	713,8 (Thursö).	27 nov.	1881	713,9 (Dunroness)
4 nov.	1868	719,3			717,1 (Scarboro).			711,9 (Mullaghm).
12 déc.	1868	721	9 mars	1876	714,2			708,9 (Stornoway).
2 févr.	1869	719	12 nov.	1877	719,8	21 févr.	1882	720,4 (Arkangel).

On remarquera tout d'abord que, dans les sept premières années d'observation, le minimum s'est maintenu, presque exactement, à 719. Cette constance n'a rien d'étonnant, quand on réfléchit à la lenteur des variations d'un phénomène aux environs des maxima et des minima. En second lieu, on trouve, en 1872, un saut brusque de 719^{mm} à 714^{mm}, puis à 713^{mm} l'année suivante. Le 19 mars 1881, on arrive à 711^{mm}5, puis enfin le 27 novembre de la même année on obtient la profondeur extraordinaire de 708^{mm}9, la baisse barométrique la plus forte qui ait probablement jamais été constatée au niveau de la mer; car 710^{mm} était admis, il y a deux ans, dans la classification adoptée par le bureau météorologique, comme la plus basse indication possible.

Il ne faudrait pas cependant trop se hâter de conclure. En effet, depuis la création du réseau, on a déplacé quelques stations. Celle de Nairn, par exemple, a été portée, d'abord à Thursö, puis à Stornoway, et il est très probable qu'on a cherché à se placer de plus en plus sur le passage des centres de bourrasque. On peut remarquer en effet qu'à chacun des déplacements correspond une variation assez sensible de la limite. Il n'en reste pas moins que, même dans les stations maintenues, on trouve dans les dix dernières années, des profondeurs très inférieures à celles qui avaient été précédemment notées sur ces mêmes points. Ainsi, un examen très sommaire de l'ensemble du phénomène paraît favorable à l'hypothèse d'un accroissement progressif dans l'intensité des bourrasques. Mais M. Lespiault répète, en terminant, que le phénomène est trop complexe pour qu'il croie pouvoir se contenter

d'une preuve de ce genre, et qu'il se réserve de poursuivre ses études.

— MM. Gayon et Dupetit présentent un appareil de nitrification à l'aide duquel ils ont obtenu la transformation rapide de l'ammoniaque des liquides organiques ou artificiels en acide nitrique et en acide nitreux. La cause du phénomène est un microbe aérobie, constitué par de longs filaments qui se résolvent promptement en spores ovoïdes.

— M. Rayet entretient la Société des procédés techniques propres à la synchronisation des horloges.

Le procédé le plus parfait, mais qui n'est guère pratiquable qu'avec des horloges astronomiques, est une application des idées développées par Foucault en 1847 (*Comptes rendus* du 13 septembre 1847). Des électro-aimants, placés de chaque côté d'une masse de fer doux, portée par le pendule à régler, sont animés de seconde en seconde à l'aide d'un courant lancé par la pendule type; il en résulte des attractions qui viennent corriger les erreurs de marche du pendule. Les travaux de M. Vérité, de Beauvais, de M. Jone, de Glasgow, les recherches faites à l'observatoire de Paris par M. Wolf (1872-1874), ont montré que les électro-aimants devaient être placés sous le pendule à régler et que ce dernier devait retarder de quelques dixièmes de seconde par jour sur le pendule régulateur type.

On peut aussi établir de nombreux cadrans donnant dans une ville une heure unifiée par l'emploi d'horloges électriques, dérivées du type de Froment, dans lesquelles l'action mécanique est produite par l'attraction électro-magnétique d'un fer doux qui actionne par un doigt la roue de la minuterie. Depuis 1878, la Compagnie pneumatique a remplacé l'action motrice du courant électrique par l'action d'une onde d'air comprimé qui vient, de minute en minute, soulever un soufflet dont les mouvements alternatifs agissent sur la roue des minutes.

Le système électrique adopté à Neuchatel, Bruxelles, Gand, Liège, etc., et le système pneumatique de Paris ont l'inconvénient que les cadrans ne possédant pas de moteurs propres, les retards qui peuvent se produire par le manque d'une émission d'électricité ou d'air comprimé s'accumulent et peuvent devenir considérables. Avec le système pneumatique, la longueur du circuit ne peut dépasser le chemin parcouru en 30 secondes par une onde d'air comprimé circulant dans une canalisation très étroite.

Ajoutons que les cadrans électriques ou pneumatiques ne peuvent guère avoir de sonneries.

Les systèmes de remise à l'heure, qui s'appliquent à des horloges complètes, ayant un moteur particulier, sont donc théoriquement préférables; car, si la régulation ne se fait pas, l'horloge continue à marcher avec sa marche propre, avec les qualités ou les défauts qu'elle avait avant l'application d'une remise à l'heure.

Deux systèmes principaux de remise à l'heure peuvent être employés.

Dans le système de M. Collin et dans celui de MM. Redier et G. Tresca (qui ne s'appliquent qu'à des horloges réglées à l'avance), un levier, mu électriquement, vient faire arrêt direct sur la roue d'échappement ou sur la fourchette. Les aiguilles sont ainsi immobilisées et le pendule bat à vide. A l'heure convenue, la pendule conductrice émet un courant qui déclanche le levier arrêt et l'horloge reprend sa marche.

Le système de remise à l'heure de M. Fénon suppose seulement qu'au moment de la régulation la pendule n'est pas en discordance de plus de 30 secondes avec le régulateur type. Dans ce système, la roue d'échappement est mobile le long de son axe; 30 secondes avant l'heure de réglage, cette roue est désembrayée de la fourchette et tourne rapidement de manière à amener les aiguilles sur l'heure; elle est alors arrêtée par un butoir spécial. A l'heure juste, un électro-aimant la remet en prise avec la fourchette du pendule et l'horloge reprend sa marche.

Le système de M. Fénon paraît à M. Rayet le plus parfait de ceux imaginés jusqu'ici.

Séance du 24 mai 1883. — M. Elgoyhen est élu membre titulaire de la Société.

— M. Forquignon entretient la Société des expériences qu'il poursuit en ce moment pour étudier l'action de la chaleur sur les carbures de fer. Un travail publié antérieurement (*Annales de Chimie et de Physique,* 5e série, août 1881) l'avait amené à cette conclusion que toutes les réactions chimiques de la fonte malléable, ainsi que son mode de fabrication industrielle, s'expliquent sans difficulté si l'on admet que la fonte blanche soumise à l'action de la chaleur se décompose à une température très inférieure à son point de fusion, en donnant naissance à une variété spéciale de graphite amorphe, qui reste mélangée d'une façon plus ou moins intime avec un carbure de fer moins riche en carbone. Ces vues théoriques se trouvaient confirmées par les mesures calorimétriques de MM. Troost et Hautefeuille qui ont montré que les carbures de fer sont formés avec absorption de chaleur; cependant il était

nécessaire d'en fournir une démonstration expérimentale directe. M. Forquignon avait espéré y parvenir en chauffant la fonte dans un gaz inerte tel que l'hydrogène ou l'azote, mais il ne tarda pas à reconnaître que ces gaz décarburent énergiquement la fonte, au rouge vif, en donnant de l'hydrogène ou un carbure forménique. La seule ressource était donc de soumettre la fonte à l'action de la chaleur dans le vide, et voici comment cette méthode fut appliquée.

De la fonte blanche en petits fragments, contenus dans un cartouche en platine, était placée dans un long tube en porcelaine de Berlin, vernie intérieurement et extérieurement. Ce tube communiquait d'une part avec la pompe à mercure d'Alvergniat, d'autre part avec un appareil qui fournissait de l'hydrogène parfaitement pur, et devenu, par son passage à travers une colonne d'acide phosphorique, un gaz entièrement refroidi.

L'appareil était entièrement monté sans caoutchouc et sans bouchons de liège; ses parois étaient constituées uniquement par du plomb, du verre, de la porcelaine et du mastic des physiciens. On commença par le dessécher aussi complètement que possible en y faisant le vide à plusieurs reprises, et en laissant rentrer chaque fois de l'air bien sec, puis pour rendre la dessication irréprochable, on chauffa le tube, vers 250 à 300°, pendant quarante-huit heures, et on répéta la manœuvre précédente, en substituant cette fois l'hydrogène à l'air. Enfin après avoir établi un vide aussi parfait que possible, on porta le tube au rouge vif, et on continua le chauffage à cette température pendant cent soixante-douze heures, en faisant agir la pompe pour maintenir constamment le vide absolu.

Les résultats numériques de l'expérience sont les suivants :

Fonte blanche, marque D. P. — 100 parties contiennent avant le chauffage :

Manganèse	0,126
Silicium	0,453
Cuivre	Traces.
Carbure combiné, *sans trace de graphite*	3 p. 100 (environ)

Après le chauffage, on a dosé :

Carbure combiné	1,137
Graphite amorphe	1,937
Soit : Carbure total	3,074

Les petits morceaux de fonte sont devenus très malléables, leur cassure est noire comme celle d'un crayon de mine de plomb. La

surface extérieure est recouverte uniformément d'un enduit gris présentant l'éclat et les propriétés de la plombagine naturelle.

Ainsi la fonte blanche, soumise à la seule action de la chaleur, (900° à 1000° au plus) se décompose réellement comme la théorie paraissait l'indiquer. On se trouve ici en présence d'un fait très inattendu et peut-être unique en chimie : un corps solide se dédouble, sans changement d'état physique, en deux autres corps solides dont la tension de vapeur peut être regardée comme tout à fait nulle à la température de l'expérience. Au reste le phénomène ne semble pas rentrer dans la catégorie des décompositions proprement dites, c'est plutôt une sorte de dissociation, qu'on pourrait définir en disant que le poids relatif (et non plus la tension) du carbure libre dans le mélange résultant est une fraction de la température. Les lois et surtout le mécanisme de ce singulier phénomène ne paraissent pas faciles à déterminer; néanmoins M. Forquignon continue ses recherches sur ce sujet, et il se propose d'en communiquer ultérieurement les résultats à la Société.

— M. Lespiault dit que, si les intempéries des dernières années tiennent réellement, comme il le suppose, à une canalisation mieux établie du courant des bourrasques, il est important, même pour la météorologie de l'Europe, d'étudier les modifications qui s'opèrent dans celle des États-Unis. Il croit, en conséquence, devoir signaler à l'attention de la Société la fréquence et l'intensité croissante des ravages produits en Amérique par les tourmentes que les journaux de ce pays désignent généralement sous le nom de *cyclones*.

Les noms de *trombes* ou de *tornados* seraient préférables. Car il faut réserver le nom de cyclone, à ces tempêtes tournantes que les marins ont depuis longtemps si bien étudiées, et qui, prenant toujours naissance sous les tropiques, remontent souvent à des latitudes assez élevées. Tandis que le diamètre initial de ces cyclones varie entre 250 et 400 kilomètres, pour s'étendre progressivement jusqu'à 1500 ou 2000, à mesure qu'ils s'éloignent de l'équateur, les trombes dont il est ici question ne dépassent guère quelques centaines de mètres de diamètre, et ne se développent que sur un parcours de 50 à 100 kilomètres. En revanche, tandis que la vitesse de rotation de l'air dans les cyclones n'atteint qu'une soixantaine de mètres par seconde, et que leur vitesse de translation varie entre 15 et 45 kilomètres à l'heure, les vitesses des tornados paraissent aller jusqu'à 174 mètres par seconde pour la rotation et 17 mètres pour la translation.

Ces tornados sont de véritables épiphénomènes; car ils se détachent habituellement de tel ou tel point d'une grande tempête tour-

nante, et généralement il s'en forme simultanément plusieurs dans le sein du tourbillon général : ils sévissent alors sur des points très éloignés les uns des autres, ou souvent dans des directions parallèles. On peut admettre qu'ils ne se détachent de la masse que par suite de l'excès d'énergie qui vient animer telle ou telle partie de cette masse.

Les ravages qu'ils produisent sur leur passage sont effrayants. Les récoltes, les arbres, les maisons sont emportés. Ceux des habitants qui n'ont pas le temps de se réfugier dans les caves sont tués ou blessés. On en a vu, dans les derniers ouragans, enlevés par le vent et qui n'ont pu être retrouvés.

Aussi, ces météores dont on s'était d'abord peu occupé, ont-ils été tout récemment, en 1882, l'objet d'une étude approfondie du service météorologique des États-Unis. Les nombres donnés par M. Finlay sont intéressants. De 1794 à 1867, le nombre maximum des tornados est de 19 pour une période de dix ans. Dans les cinq années suivantes on en compte 25. En 1875, on en trouve tout d'un coup 58 pour une seule année; en 1880, 112; en 1881, 60; on n'a pas les chiffres de 1882.

Sans doute, ces nombres croissants sont dus, en très grande partie, à une observation plus assidue des phénomènes et surtout à l'extension prodigieuse de la population américaine; mais il est permis d'y voir aussi l'indice d'un changement météorologique réel. Car tandis que jadis le nombre des victimes était insignifiant, on trouve, pour une période de dix-huit mois commençant en février 1880, 177 personnes tuées et 540 blessées.

M. Lespiault termine par de longs détails sur les trois derniers tornados (10 avril, 23 avril et 18 mai 1883) sur lesquels les journaux américains et anglais ont publié de longs articles. Pour ces trois derniers cyclones seulement, dans une période de moins de quarante jours, on compte une dizaine de villes ou villages détruits, plus de 500 tués et de 1500 blessés. Ces chiffres effrayants peuvent être regardés comme une confirmation de l'influence désastreuse des déboisements américains.

Séance du 7 juin 1883. — M. Bjerknes, professeur à l'Université de Christiania, est nommé membre correspondant de la Société.

— M. Hautreux fait une communication sur le voyage de la *Jeannette* dans l'océan Arctique.

On connaît le triste sort de la *Jeannette*, qui, entrée par le détroit de Behring pour une exploration polaire, a été prise dans

les glaces en vue de l'île Wrangel, y est restée prisonnière pendant deux hivers consécutifs, et a été écrasée par la banquise, le 12 juin 1881, par 77° 30' N. et 155° longitude E.

Des trois embarcations qui recueillirent l'équipage, l'une sombra dans un coup de vent; celle que montait le capitaine Delong atterrit dans le nord-ouest du delta de la Léna, et son équipage mourut de faim après quarante jours de souffrances épouvantables. La troisième, montée par le lieutenant Danenhover, atterrit dans l'est du delta; son équipage rencontra des indigènes qui lui donnèrent des vivres. Grâce à ce secours, les onze hommes qui la montaient furent sauvés et purent donner des indications qui firent retrouver, vers le mois de février 1882, les cadavres de Delong et de ses compagnons, ainsi que les notes et les journaux d'observations qu'ils avaient tenus. De cette façon, les résultats du voyage de la *Jeannette* ne sont pas perdus, et donnent sur les régions arctiques des indications nouvelles qui font entrevoir la constitution orographique de la calotte polaire.

Deux courants chauds pénètrent dans l'océan Glacial : 1° le *Gulf-Stream,* qui passe entre l'Islande et la Norvège, se dirige vers le N.-E., en longeant les côtes de Russie; 2° le *Kurs-Siwo,* qui entre par le détroit de Behring, et se divise en deux bras, l'un se dirigeant vers le N.-E. et les côtes d'Alaska, — c'est ce courant qui a entraîné l'*Investigator* et fait découvrir à Mac-Lure le passage du N.-O.; — et l'autre courant se dirigeant vers le N.-O. en longeant les côtes de Sibérie; — c'est celui qui a entraîné la *Jeannette.*

Deux courants froids descendent en longeant les deux côtes du Groënland, l'un par le détroit de Davis, l'autre entre l'Islande et le Groënland. Dans la demi-calotte polaire qui regarde l'Alaska et la Sibérie, on ne rencontre pas d'*icebergs.* La banquise qui descend par 72° de latitude est formée de glace de mer dont les couches successives atteignent 3 à 4 mètres d'épaisseur. Les profondeurs de l'eau sont très faibles (70 mètres); les îles découvertes sont basses et formées de terrains d'alluvion. Des oiseaux ont été vus au printemps, se rendant vers le Nord; ils y ont niché, et on les a vus repasser à l'automne; ils ont trouvé à se nourrir, eux et leurs petits; il y a donc des terres et de la végétation.

Dans l'autre demi-calotte polaire, qui regarde l'Amérique du Nord, le Groënland et l'Islande, on rencontre de nombreux *icebergs;* la banquise se disloque fréquemment, et on a pu remonter jusque par 82° de latitude. Les couches de glace de mer observées par le commandant Narès atteignaient 7 mètres d'épaisseur; les

profondeurs de l'eau sont considérables, et atteignent 3500 mètres des deux côtés du Groënland; les terres sont fortement découpées et très montagneuses; elles donnent naissance à des glaciers considérables, dont la descente à la mer produit les *icebergs*.

Cette différence de constitution géologique, qu'accusent les *icebergs*, est peut-être une des causes de la non-concordance du pôle magnétique avec le pôle terrestre arctique, car la même abondance d'*icebergs* se retrouve dans les régions antarctiques, aux alentours du pôle magnétique austral, entre les îles Georgia et Kerguélen, indiquant dans ces parages des terres très montagneuses.

Séance du 21 juin 1883. — M. le Président annonce la mort de M. Bonnetat, membre de la Société.

— M. Garnault fait la communication suivante sur un parasite de l'*Oxyuris blattæ* :

M. Galeb a figuré sur les téguments des oxyures de la blatte des poils qu'il décrit en ces termes : « On remarque à la surface de la cuticule, chez certaines espèces, des poils plus ou moins longs et abondants et dont la présence, qui n'est pas très constante, paraît dépendre de circonstances particulières. »

Ayant eu l'occasion d'ouvrir un certain nombre de blattes, M. Garnault a remarqué que parmi les oxyures qui peuplaient l'intestin de ces animaux, les uns étaient absolument glabres, les autres étaient recouverts de filaments ressemblant à des poils. Ces filaments étaient quelquefois très longs, toujours très grêles; leur contenu était absolument homogène. M. Galeb ne décrit sur la surface des téguments rien autre chose que ces prétendus poils. *A priori* il semble difficile d'admettre que chez des parasites d'ordinaire si étroitement adaptés à leur milieu, certains individus d'une espèce portent des poils et non les autres. M. Galeb dit, en effet, que la présence de ces poils n'est pas constante, mais dépend de certaines circonstances que l'auteur ne précise pas. « Ces poils », dit-il, « aussi sont plus ou moins longs et abondants ». M. Garnault croit que le doute n'est pas possible, que les filaments, en effet, quand ils sont jeunes et courts ressemblent à des poils; les premiers qu'il a vus étaient dans ce cas. Il rencontra bientôt un oxyure qui portait une forêt de filaments longs et grêles chez lesquels le protoplasma s'était transformé en une série de corps réfringents. C'étaient des champignons qui avaient germé sur la cuticule de l'oxyure, et qui, arrivés à maturité, avaient formé des spores. Ces productions parasitaires avaient été considérées à tort par M. Galeb comme des poils.

- M. Gayon propose, pour fixer le tannin dissous, de substituer la membrane de la coque des œufs de poule à la peau, aux cordes de violon et substances analogues employées jusqu'à ce jour. L'absorption est rapide et complète.

— Sur la demande de M. Lespiault, M. Rayet donne quelques détails sur la qualité astronomique du ciel de Bordeaux. Les ciels trop beaux à l'œil sont souvent mauvais pour l'observation, surtout si l'on cherche à apercevoir les étoiles doubles. En effet, sous l'influence des mouvements atmosphériques et du trouble qui en résulte dans les effets de réfraction, l'astre observé semble osciller perpétuellement dans le champ de la lunette, et ne se prête pas à un pointé exact. Il en est tout autrement avec des ciels très légèrement brumeux, sans vent, et tout à fait calmes dans les régions supérieures. Le ciel de Bordeaux remplit assez fréquemment ces conditions, et, par exemple, M. Rayet, en profitant du passage d'Antarès au méridien, a pu tout récemment apercevoir avec netteté le *compagnon* d'Antarès, étoile de 7e grandeur, située à 3",6 ou 3",7 seulement d'Antarès, étoile de 1re grandeur. Le grossissement employé n'était que de 97 diamètres.

— M. Dupetit fait une communication sur les *colorations des dissolutions d'iode.*

On sait que l'iode se dissout dans un grand nombre de liquides en leur communiquant une coloration, tantôt jaune brun, comme celle de l'iode fondu, tantôt violette, comme celle de la vapeur d'iode.

M. Dupetit a recherché s'il existerait une relation entre la nature chimique du dissolvant et la coloration de la solution. Il a constaté que :

1° Les carbures d'hydrogène et leurs dérivés (carbures de la série grasse, chloroforme, benzine, etc.) dissolvent l'iode en violet;

2° Tous les alcools se colorent en jaune brun, même l'érythrite et la mannite en fusion, le mercaptan, etc.;

3° Les aldéhydes donnent des solutions jaune brun; cependant le chloral anhydre fait exception;

4° Les anhydrides sulfureux et sulfocarbonique (sulfure de carbone) se colorent en jaune brun;

5° Les acides se teintent en jaune brun;

6° Les éthers proprement dits (éther ordinaire, etc.) se colorent en jaune brun;

7° Les éthers salins (éther acétique, corps gras, etc.) se colorent en jaune brun.

Les différences de coloration pourraient s'expliquer de deux manières :

1° En admettant que les liquides colorables en violet contiennent de la vapeur d'iode diffusée dans les espaces intermoléculaires, tandis que les dissolvants qui se colorent en jaune brun contiendraient de l'iode liquide;

2° Les colorations seraient dues à des combinaisons peu stables de l'iode avec le dissolvant dans l'un ou l'autre cas.

La première hypothèse est appuyée par ce fait que les solutions d'iode dans un alcool tendent à passer au rouge quand on les chauffe, et ce changement de teinte est d'autant plus marqué que le point d'ébullition de l'alcool employé est plus élevé. La modification de la couleur est plus manifeste si l'on chauffe en tube scellé; mais l'expérience ne peut être poussée jusqu'à la température de l'ébullition de l'iode parce que ce métalloïde forme, dès qu'on a atteint une certaine température, une combinaison incolore avec le dissolvant.

Une autre observation tendrait à vérifier la deuxième hypothèse. Si l'on fait évaporer lentement, dans l'excicateur à paraffine, une solution d'iode dans le sulfure de carbone, on aperçoit, sur les parois du cristallisoir, de petits cristaux d'un rouge violacé, transparents, et qui, exposés à l'air, perdent le sulfure de carbone, deviennent noirs, opaques, et prennent l'apparence ordinaire de l'iode solide.

Les faits constatés peuvent avoir quelque utilité pratique dans la détermination de la fonction chimique de quelques corps; si, par exemple, un composé dissout l'iode en violet, il y a de grandes probabilités pour que ce corps ne soit pas un alcool.

On pourra, de plus, reconnaître l'altération ou la falsification de certains produits par le même moyen : la benzine pure, récemment distillée, se teinte en violet, tandis que le même produit préparé depuis longtemps et ayant absorbé de l'oxygène se colore en orangé plus ou moins teinté de brun. Le mélange d'hydrocarbures de la série grasse, désigné dans le commerce sous le nom de *Vaseline*, est parfois additionné frauduleusement de corps gras; cette falsification sera aisément décelée à l'aide de l'iode.

Séance du 5 juillet 1883. — M. Forquignon présente à la Société le bolide de Saint-Caprais qui a été scié longitudinalement, de façon à permettre d'apercevoir sa structure intérieure. On y reconnaît, à première vue, de nombreuses mouches de fer natif, et les deux plus grosses (2 à 3 millimètres de diamètre environ) sont

enchassées dans un rognon présentant l'éclat et la couleur bronzée de la pyrrhotine. La croûte externe du bolide est noire (noir rougeâtre en quelques endroits), sillonnée de fines craquelures, son épaisseur remarquablement uniforme est à peu près d'un millimètre, et le fer métallique s'y montre aussi bien que dans les parties profondes.

Une plaque mince, obtenue à l'aide d'un petit fragment détaché pendant le travail, a été disposée en vue de l'examen microscopique de la partie pierreuse. Cet examen, fort délicat, n'est point encore achevé, néanmoins, M. Forquignon croit avoir déjà constaté la présence de l'augite et de l'olivine, minéraux qui se rencontrent presque constamment dans les météorites ferrugineuses.

Ainsi l'origine extra-terrestre de cette pierre se trouve mise hors de doute, et il convient de la ranger dans le groupe de ces météorites que M. Daubrée a nommées *sporadosidères*.

— M. DE LACOLONGE fait connaître les résultats auxquels il est parvenu en étudiant l'emploi de la lemnicaste dans la mécanique industrielle.

En prenant le tracé habituel des constructeurs, qui consiste à faire passer l'arc de courbe par trois points de la verticale d'une tige à mouvoir en ligne droite, il arrive à une équation du 6e degré. MM. de Prony, en 1826, et Vincent, en 1837, avaient obtenu une équation du même degré, ce qui est d'un emploi impossible dans la pratique.

En choisissant d'abord convenablement des axes de coordonnées rectangulaires, et en employant ensuite les coordonnées polaires, l'auteur arrive à l'équation

$$f^2 = r\left(r + \sqrt{r^2 - h^2}\right)\sin^2\omega \pm r\cos\omega\sqrt{r^2 - \left(r + \sqrt{r^2 - h^2}\right)^2\sin^2\omega}.$$

Elle est d'un emploi facile, étant seulement fonction de h, la demi-course de la tige, et de r, le rayon des bielles ou tringles.

La longueur de la bride ne peut être choisie *a priori*, cette dimension, comme la position des centres, leur écartement, etc., étant en fonction des mêmes quantités. M. de Lacolonge donne les formules y relatives.

Il se propose de continuer ses recherches, particulièrement au point de vue du parallélogramme de Watt. La présente communication n'a pour but que de prendre date.

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

pendant l'année 1881-1882.

ALAIS. — *Mémoires et Comptes rendus de la Société scientifique et littéraire d'Alais.* T. XII, 1880. — Gr. in-8°.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 18e année, 1881. — In-8°.

AMIENS. — *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens.* T. XIX, nos 4-6; XX, n° 1; 1881-1882. — Gr. in-8°.

— *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* Nos 99-109, septembre 1880 à juillet 1881. — In-8°.

— *Société médicale d'Amiens. Bulletin des travaux.* Années V-VIII, 1865-1868. — In-8°.

AMSTERDAM. — *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde.* 2e série, t. XIV-XVI, 1879-1881. — 3 vol. in-8°.

ANGERS. — *Bulletin de la Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire.* 3e série, t. XXII et XXIII, 1; 1881-1882. — In-8°.

ARBOIS. — *Bulletin de la Société de Viticulture et d'Horticulture d'Arbois.* Année V, nos 2-4; VI, nos 1-2; 1881-1882. — In-8°.

AUGSBOURG. — *Sechsundzwanzigster Bericht des Naturhistorischen Vereins in Augsburg.* 1881. — In-8°.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 16e année, fin, 1881. — Gr. in-8°.

— *Société Ramond. Observations météorologiques faites à la Station Plantade (Pic-du-Midi) en 1879-81.* — 3 fasc. gr. in-8°.

BÂLE. — *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel.* T. VII, fasc. 1, 1882. — In-8°.

BARCELONE. — *Crónica cientifica.* Années IV-V, nos 80-81, 87-115. — Gr. in-8°.

BATAVIA. — *Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgegeven door de Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië.* T. XL (8e série); 1881. — In-8°.

— *Regenwaarnemingen in Nederlandsch Indië. Door* Dr F. A. BERGSMA. 2e et 3e années, 1880-81. — 2 vol. in-8°.

— *Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia.* T. V, année 1880. — In-fol.

BERLIN. — *Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. — Mathematische Abhandlungen.* 1880. — *Physikalische Abhandlungen,* 1881. — 2 fasc. In-4°.

— *Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Août 1880, avril-décembre 1881. — In-8°.

— *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* 1-XXXIII; 1882. — Gr. in-8°.

— *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von* C. OHRTMANN *m. A.* T. XI, année 1879; t. XII, nos 1-2, année 1880. — In-8°.

BÉZIERS. — *Bulletin de la Société d'étude des Sciences naturelles de Béziers. Compte rendu des séances.* 5e année, 1880. — Gr. in-8°.

BOLOGNE. — *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* — 3e série, t. X, fasc. 3-4, 1879; 4e série, t. I-II, 1880. — In-4°.

— *Indici generali dei 10 tomi della terza serie delle Memorie dell' Accademia di Bologna.* — In-4°.

— *L'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna dalla sua origine a tutto il* 1880. — In-8°.

BONN. — *Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens.* 37e et 38e années, 1880-1881. — 2 vol. in-8°.

BORDEAUX. — *Actes de l'Académie nationale des Sciences, Belles-Lettres et Arts.* 3e série. Années XXXIII (fasc. 2-4), XXXIX-XLII; 1874-1880. — 5 vol. in-8°.

— *Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux.* 4e série, t. IV-V, 1880-1881. — Gr. in-8°.

— *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales.* Années II, nos 31-53; III, nos 1-12; 1881-1882. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* Année XI, nos 1-53; XII, nos 1-12; 1881-1882. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, années IV, nos 15-24; V, nos 1-10. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* Années XXI, nos 6-12; XXII, nos 1-8; 1881-1882. — In-8°.

BORDEAUX. — *Faculté de Médecine et de Pharmacie de Bordeaux.* Thèses. *Médecine :* 3e série, nos 1 et 13-21 ; 4e série, nos 1-30. — *Pharmacie :* Nos 1-2, 1881-82. — In-4°.

— *Journal d'Histoire naturelle de Bordeaux et du Sud-Ouest.* 1re année, nos 1-9. — In-4°.

BOSTON. — *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Series.* T. VIII, parties 1-2, 1881. — In-8°.

— *Anniversary Memoirs of the Boston Society of Natural History, published in celebration of the fiftieth Anniversary of the Society's Foundation.* 1830-1880. — In-4°.

BRÊME. — *Abhandlungen herausgegeben vom Naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen.* T. VII, fasc. 3, 1882. — In-8°.

BRESLAU. — *58. Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.* 1881. — Gr. in-8°.

BRÜNN. — *Verhandlungen des naturforschenden Vereines.* T. XVII-XVIII, 1878-1879. — In-8°.

— *Katalog der Bibliothek des naturforschenden Vereines.* I. *Supplement-Heft.* 1880. — In-8°.

BRUNSWICK. — *Jahrsbericht des Vereins für Naturwissenschaft in Braunschweig.* 1881. — In-8°.

BRUXELLES. — *Annales de la Société Entomologique de Belgique.* T. XXV, 1881. — Gr. in-8°.

— *Annuaire de l'Observatoire Royal de Bruxelles.* 49e année, 1882. — In-18.

— *Bulletin de la Société Belge de Microscopie.* Années VI, nos 6-12; VII, nos 1-12; VIII, nos 1-10; 1880-1882. — In-8°.

— *Société scientifique de Bruxelles.* T. I-V, 1877-1881. — In-8°.

BUDAPEST. — *A Magyar Tudományos Akadémia.* — *Értekezések a mathematikai tudományok köréből.* T. VII, fasc. 3 et 6-18. — *Ertekezések a természettudomanyok köréből.* T. IX, fasc. 20-25; T. X, fasc. 1-18. — *Mathematikai és természettudományi közlemenyek.* T. XVI, 1881. — In-8°.

— *Literarische Berichte aus Ungarn über die Thätigkeit der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von* PAUL HUNFALVY. T. IV, 1880. — In-8°.

— *Ungarische Revue mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von* PAUL HUNFALVY. T. I, fasc. 1-3. — In-8°.

— *A Kiralyi Magyar természettudományi Társulat.* — SCHENZL : *Ungarns erdmagnetische Verhältnisse.* In-4°. — ÖRLEY : *Monographie der Anguilluliden.* In-8°. — MADERSPACH : *Ungarns Erzlägerstätten.* In-4°. — HERMAN : *Ungarns Spinnenfauna.* In-4°.

CAEN. — *Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres*. Année 1881. — 1 vol. in-8°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Annual Report of the Curator of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College*. Année 1880-1881. — In-8°.

— *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College*. T. VI, n° 12; t. IX, nos 1-8, 1881; t. X, n° 1, 1882. — In-8°.

— *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. Centenial Volume*. Vol. XI, Part. 1; 1882. — In-4°.

CATANE. — *Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania*. 3e série, t. XV; 1881. — In-4°.

CHERBOURG. — *Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques*. 3e série, t. III (XXIII de la collection), 1881. — Gr. in-8°.

— *Catalogue de la Bibliothèque de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques. Rédigé par* M. A. LE JOLIS. 2e édition, 1re Partie, 1881. — Gr. in-8°.

COPENHAGUE. — *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder*. 1881, nos 2-3; 1882, n° 1. — In-8°.

DAX. — *Bulletin de la Société de Borda à Dax*. Années VI (1881), nos 3-4; VII (1882), nos 1-3. — Gr. in-8°.

DRESDE. — *Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft* ISIS *in Dresden*. Années 1881, 2e semestre; 1882, 1er semestre. — In-8°.

DUBLIN. — *Proceedings of the Royal Irish Academy. Science,* vol. III, nos 7-8. *Polite Literature and Antiquities,* vol. II, n° 3. 1881-1882. — In-8°.

— *The Transactions of the Royal Irish Academy. Science,* vol. XXVIII, nos 6-10, 1881-82. — In-4°.

— *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society*. T. II, n° 7; III, nos 1-4, 1880-1881. — In-8°.

— *The Scientific Transactions of the Royal Dublin Society*. T. I, nos 13-14, 1880-1881. — In-4°.

— *Journal of the Royal Geological Society of Ireland*. T. VI, n° 1, 1881. — In-8°.

ÉDIMBOURG. — *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Session* 1880-81. Vol. XI, n° 108. — In-8°.

— *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*. T. XXX, 1re Partie, 1880-81. — In-4°.

ERLANGEN. — *Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät*. Fasc. 13; 1880-81. — In-8°.

FRANCFORT-S.-M. — *Abhandlungen, herausgegeben van der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft.* T. XII, fasc. 3-4; 1881. — In-4°.

— *Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.* 1880-1881. — In-8°.

FRIBOURG-EN-BRISGAU. — *Berichte über die Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. B.* T. VIII, fasc. 1, 1882. — In-8°.

GENÈVE. — *Mémoire de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève.* T. XXVII, 2e Partie; 1881. — In-4°.

GIESSEN. — *21. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde;* 1882. — In-8°.

GLASGOW. — *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland.* T. XXIV; 1880-81. — In-8°.

— *Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow.* T. XIII, n° 1; 1881. — In-8°.

— *Philosophical Society of Glasgow. Reports relative to Exhibition of Apparatus for the Utilization of Gas, Electricity, etc. Held september-october, 1880.* Glasgow, 1882. — In-8°.

GÖTTINGEN. — *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts Universität aus dem Jahre* 1880-1881. — 2 vol. in-12.

— *Göttingische Gelehrte Anzeigen. Unter der Aufsicht der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften.* 1880-1881. — 4 vol. in-12.

GRENOBLE. — *Bulletin de l'Académie Delphinale.* 3e série, t. XVI; 1881. — In-8°.

HALLE A/S. — *Verein für Erdkunde. — Notice sur le Congrès des Géographes allemands, avril 1882.* — In-8°.

— *Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Halle a. S.* 1880. — Gr. in-8°.

HARLEM. — *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.* T. XVI, nos 3-5; t. XVII, nos 1-2; 1882. — In-8°.

— *Neue Untersuchungen über die Bahn des Olbers'schen Cometen und sein Wiederkehr, von* F. K. GINZEL. 1881. — In-4°.

HEIDELBERG. — *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg.* 2e série, t. III, fasc. 1, 1881. — In-8°.

HELSINGFORS. — *Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk.* Fasc. XXXIII-XXXIV, 1880. — In-8°.

— *Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar.* XXII, 1879-1888. — In-8°.

— *Observations faites à l'Observatoire magnétique et météorologique de Helsingfors.* T. VII, 1879. — In-8°.

KAZAN. — *Izviestia*... Bulletins et Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Kazan. 50e année, 1880. — 6 fasc. gr. in-8°.

KHARKOF. — *Soobchtchénia*... Communications et Bulletins des séances de la Société Mathématique près l'Université Impériale de Kharkof. Année 1881, n° 1. — Gr. in-8°.

— *Michel Charles*, par K. A. ANDRÉIEF, 1881. — In-8°.

KIEL. — *Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein*. T. IV, fasc. 2; 1882. — Gr. in-8°.

KÖNIGSBERG. — *Schriften der Königlichen physikalisch-ökonomischen Gesellschaft in Königsberg*. Années IX, 1868; XVIII (n° 2), XIX à XXII, 1878-81. — In-4°.

LAUSANNE. — *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles*. T. XVII (n° 86) et XVIII (n° 87). — In-8°.

LEIDE. — *Tijdschrift der Nederlandsche dierkundige Vereeniging, onder der redactie van A. A. van Bemmelen*. T. I-V, VI (fasc. 1); 1872-1882. — In-8°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*. Années XVI (nos 2-4) et XVII (nos 1-3), 1881-82. — In-8°.

— *Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig*. 8e année, 1881. — In-8°.

LIÈGE. — *Bulletin de la Fédération des Sociétés d'Horticulture de Belgique*. Année 1880. — Gr. in-8°.

— *Annales de la Société Géologique de Belgique*. T. VII, 1879-80. — *Procès-verbal de la séance du 19 Juillet 1882*. — In-8°.

— *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*. 2e série, t. IX; 1882. — Gr. in-8°.

LISBONNE. — *Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Classe das Sciencias*. 2e série, t. VI, 1re Partie; 1881. — In-4°.

LIVERPOOL. — *Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool*. Vol. XXXIII-XXXIV, 1878-1880. — 2 vol. in-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the Royal Society*. XXXI-XXXII, nos 206-220; 1880-1882. — In-8°.

— *Memoirs of the Royal Astronomical Society*. T. XLVI; 1880-81. — 1 vol. in-4°.

— *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. T. XLI, 9; XLII, 1-8; 1881-82. — In-8°.

— *The Journal of the Linnean Society*. BOTANY, XVIII, 108-113. — ZOOLOGY, XV, 84-85. — *List of the Linnean Society*. 1881. — In-8°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society*. Nos 172-188. — In-8°.

LONDRES. — *Journal of the Royal Microscopical Society.* 2e série, t. I, nos 4-6; II, nos 1-5. — In-8°.

LYON. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon.* Classe des Sciences, t. XXV. Classe des Lettres, t. XX. Table générale des années 1845-1881. — 2 vol. et 1 fasc. gr. in-8°.

MARSEILLE. — *Bulletin de la Société Scientifique industrielle de Marseille.* T. VIII, nos 3-6; IX, Procès-verbaux et n° 1. 1880-81. — Gr. in-8°.

MILAN. — *Gazzetta degli Ospitali.* 2e année, nos 10-24; 1881. — In-8°.

— *Atti della Società Italiana di Scienze naturali.* T. XXII-XXIII; 1879-81. — In-8°.

— *Memorie del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Lettere,* t. XIV, fasc. 1-2. — In-4°.

— *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti.* 2e série, t. XII-XIII, 1879-80. — In-8°.

MODÈNE. — *Memorie della Regia Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena.* T. XX, part. 1-2; 1880-81. — In-4°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* Année 1881, t. LVI et LVII (n° 1). — In-8°.

MULHOUSE. — *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse.* Juillet 1881 à août 1882. — Gr. in-8°.

MUNICH. — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1881, fasc. 2-4; 1882, fasc. 1-2. — In-8°.

NANCY. — *Mémoires de l'Académie de Stanislas.* 4e série, t. XIV, 1881. — In-8°.

— *Bulletin de la Société des Sciences de Nancy.* 2e série, t. VI; fasc. 13, 14e année. — Gr. in-4°.

NAPLES. — *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli).* Années XIX, XX et XXI (nos 1-8); 1880-1882. — In-4°.

NEW-HAVEN. — *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences.* T. IV (2e part.) et V (2e part.); 1882. — In-8°.

NEW-YORK. — *Annals of the New York Academy of Sciences (late Lyceum of Natural History).* T. I (n° 14); II (nos 1-6); 1880-81. — In-8°.

NICE. — *Société centrale d'Agriculture, d'Horticulture et d'Acclimatation de Nice et des Alpes-Maritimes.* Bulletins trimestriels 85-87, 1881-82. — In-8°.

ODESSA. — *Zapiski...* Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. VII, fasc. 2, 1881. — In-8°.

ODESSA. — *Zapiski*... Mémoires de la Section mathématique de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. III; 1881. — In-8°.

— *Flora Chersonensis. Auctore* EDUARDO A LINDEMANN. Vol. I, 1881. — In-8°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Compte rendu de la 9e Session* (REIMS) *et de la 10e Session* (ALGER). 1880. 2 vol. gr. in-8°. — *Informations et documents divers.* Nos 31 et 33. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXVI, nos 2-12; XXXVII; XXXIX (nos 1-5); 1881-82. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. IX (nos 4-5); X (nos 1-5); 1881-82. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société Philomathique de Paris.* 7e série, t. V; 1880-81. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* 2e série. T. V-VI, mars 1881 à juin 1882. — Gr. in-8°.

— *Bulletin hebdomadaire de l'Association Scientifique de France.* 2e série. T. III-V (nos 65-131). — In-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* 3e série. T. IV et V (nos 1-2); 1881-82. — In-8°.

— *Club Alpin Français. Annuaire,* 7e année, 1880. 1 vol. in-8°. — *Bulletin mensuel.* Années 1881 et 1882, nos 1-4 et 6. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XCIII, XCIV et XCV (nos 1-15). 1881-1882. — 2 vol. in-4°.

— *Comptes rendus et Mémoires de la Société de Biologie.* 5e série, t. IV-V; 7e série, t. I-V; 7e série, t. I-II, 1874-1880. — 9 vol. in-8°.

— *Journal de l'École Polytechnique.* Cahiers 49-50, t. XXX-XXXI; 1881. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. X (nos 115-120); I (2e série) (nos 1-10); 1881-82. — Gr. in-8°.

— *Journal des Savants.* Années 1881 (nos 5-12); 1882 (nos 1-7). — In-4°.

— *Revue des Travaux scientifiques.* Années I (nos 8-12); II (nos 1-5). — Gr. in-8°.

PHILADELPHIE. — *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia.* Années 1880 et 1881. — 2 vol. in-8°.

— *Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful Knowledge.* T. XVI (n° 97), 1876; XIX (nos 107-109), 1880-81. — In-8°.

PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali residente in Pisa. Memorie.* T. V, fasc. 1, 1881. — *Processi verbali.* T. III, novembre 1881 à juillet 1882. — Gr. in-8°.

— *Il Nuovo Cimento.* 3e série. T. X, juillet-décembre 1881; XI, janvier-août 1882. — In-8°.

PORTO. — *Revista da Sociedade de Instrucção do Porto.* Année I, 1881; II, janvier-octobre 1882. — In-8°.

— *Annuario da Academia Polytechnica do Porto.* 4e et 5e année, 1880-82. — In-8°.

PRAGUE. — *Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1879 und 1880.* 6e série, t. X. — In-4°.

— *Jahresberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften.* Années 1878-1880. — In-8°.

— *Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.* Années 1876, 1877, 1879, 1880. — In-8°.

— *Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1881.* 42e année. — Gr. in-4°.

PRIVAS. — *Bulletin de la Société d'Agriculture, Industrie, Sciences, Arts et Lettres du département de l'Ardèche. Nouvelle série.* T. II, 2e semestre 1881 et 1er semestre 1882. — In-8°.

RIO DE JANEIRO. — *Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire de Rio de Janeiro.* T. I, nos 1-2, 4-6; II, nos 1-7; 1881-82. — In-4°.

ROME. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Rendiconti.* 34e année, n° 6; 35e année, nos 1-5. 1881-82. — In-18.

— *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXXIV, nos 1-5; 1880-81. — In-4°.

— *Atti della Reale Accademia dei Lincei. Transunti.* T. VI, nos 1-3, 5-13; 1881-82. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. XIII, nos 10-12; XIV, nos 1-12; 1880-81. — In-4°.

ROUEN. — *Bulletin de la Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen.* 17e année, 1881, 1er trimestre. — In-8°.

SAINT-LOUIS. — *Missouri Historical Society. Publications,* nos V-VI; 1881. — In-8°.

— *Transactions of the Academy of Sciences of Saint-Louis.* T. IV, n° 2; 1882. — In-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.* T. XXVII, nos 3-4 et T. XXVIII, n° 1. 1881-82. — In-4°.

Saint-Pétersbourg. — *Acta Horti Petropolitani*. T. VII, fasc. 2; 1881. — Gr. in-8°.

Semur. — *Bulletin de la Société des Sciences historiques et naturelles*. 17e année, 1880. — Gr. in-8°.

Stockholm. — *Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*. 2e série, t. XV-XVII; 1877-1879. — In-4°.

— *Bihang till kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*. T. IV-V, 1877-78. — In-8°.

— *Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*. Années 34-37; 1877-80. — In-8°.

— *Lefnadsteckningar öfver kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens efter år 1854 aflidna ledamöter*. T. II, fasc. 1; 1878. — In-8°.

— *Minnesord öfver Carl von Linné, af* P. H. Malmsten. 1878. — In-8°.

— *Entomologisk Tidskrift på föranstaltande af Entomologiska Föreningen i Stockholm, utgifven af* Jacob Spångberg. T. II, fasc. 3-4; t. III, fasc. 1-3; 1881. — In-8°.

Stuttgart. — *Württembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte*. Années 29, 32 et 38, 1873-1876 et 1882. — 3 vol. in-8°.

Thorn. — *Mittheilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorm*. Fasc. 4; 1882. — In-8°.

Toulouse. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*. 8e série, t. III, 1881. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse*. XIVe année, 1880. — In-8°.

— *Bulletin de la Société des Sciences physiques et naturelles de Toulouse*. T. IV, années 1877-79, 2e livraison. — Gr. in-8°.

— *Revue mycologique, publiée par* M. C. Roumeguère. 3e et 4e années, nos 11-16; 1881-82. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société académique Hispano-Portugaise de Toulouse*. T. II et III (n° 1), 1881-82. — Gr. in-8°.

Turin. — *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*. T. XVI, fasc. 6; XVII, fasc. 1-7; 1881-82. — In-8°.

— *Bollettino dell' Osservatorio della Regia Università di Torino*. N° 16, 1881. — In-4°, oblong.

Upsal. — *Nova Acta regiæ Societatis scientiarum Upsaliensis*. 3e série, t. XI, fasc. 1; 1881. — In-4°.

Valenciennes. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique*. T. XXXV, nos 4-12; XXXVI, nos 1-8. 1881-82. — In-8°.

Vienne. — *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe*. T. LXXXII, nos 3-5; LXXXIII, nos 1-4; 1880-1881. — In-8°.

WASHINGTON. — *Department of Agriculture. Report of the Commissionner of Agriculture, for the Years.* 1878-79. — In-8°.

— *Surgeon-General Office. Index-Catalogue of the Library of Surgeon-General's Office.* Vol. II, 1881. — In-4°.

— *Meteorological Observations made at the U. S. Naval Observatory.* Année 1877. Washington, 1881. — In-4°.

— *Bulletin of the U. S. Geological and Geographical Survey of the Territories.* T. VI, n° 2; 1881. — In-8°.

— *First Annual Report of the U. S. Geological Survey, by* CLARENCE KING, *Director.* 1880. — Gr. in-8°.

— *Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the Year.* 1880. — In-8°.

WURZBOURG. — *Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg.* 2e série, t. XVI, 1881. — In-8°.

— *Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg.* Année 1881. — In-8°.

ZURICH. — *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.* Années 24-25. 1879-80. — In-8°.

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

pendant l'année 1882-1883.

ALAIS. — *Mémoires et Comptes rendus de la Société scientifique et littéraire d'Alais.* T. XIII, 1881. — Gr. in-8°.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 19e année, 1882. — In-8°.

AMIENS. — *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens.* T. XX, nos 2-6; t. XXI, nos 1-3; 1882-1883. — Gr. in-8°.

— *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* Nos 110-122, t. V-VI. — *Mémoires.* Année 1883. — In-8°.

AMSTERDAM. — *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Naturkunde.* T. XVII, 1882. — In-8°.

— *Nieuw Archief voor Wiskunde.* T. V-IX et X, n° 1; 1879-1883. — 5 vol. in-8°.

— *Wiskundige opgaven met oplossingen, uitgegeven door het Wiskundig-Genootschap.* T. II, nos 1-3. — In-8°.

— *Wiskundig Genootschap. Catalog der bibliotheek. — Verslag van de 104de vergadering.* — 2 fasc. in-8°.

ANGERS. — *Bulletin de la Société d'études scientifiques d'Angers.* T. XI-XII, 1881-1882. — In-8°.

— *Bulletin de la Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire.* 3e série, t. XXIII, 2e partie. 1882. — In-8°.

ARBOIS. — *Bulletin de la Société de Viticulture et d'Horticulture d'Arbois.* Années VI, nos 3-4; VII, nos 1-2. — In-8°.

BALTIMORE. — *John Hopkins University Circulars.* Nos 19-22, 24-25. — In-8°.

BARCELONE. — *Crónica cientifica.* Années V-VI, nos 116-139. — Gr. in-8°.

BATAVIA. — *Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië.* T. XLI (II de la 8e série). — In-8°.

— *Regenwaarnemingen in Nederland Indië.* Door Dr. F.-A. BERGSMA. 4e année, 1882. — In-8°.

BELFORT. — *Bulletin de la Société Belfortaine d'Émulation.* N° 5, 1880-1882. — Gr. in-8°.

BERLIN. — *Physikalische Abhandlungen der k. Akademie der Wissenschaften.* Année 1882. — In-4°.

— *Abhandlungen der nicht Akademiker. Mathematik und Physik.* 1882. — In-4°.

— *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Nos XXXIV-LIV. — Gr. in-8°.

— *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von* C. OHRTMANN *m. A.* Années 1880, t. XII, n° 3; 1881, t. XIII, n° 1. — Gr. in-8°.

BERNE. — *Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern.* Nos 979-1039; 1880-1882. — 4 fasc. in-8°.

— *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.* Nos 63-65; 1880-1882. — 3 fasc. in-8°.

— *Comptes rendus des travaux de la Société Helvétique.* Sessions 64-65; 1881-1882. — 2 fasc. in-8°.

BESANÇON. — *Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs.* 5e série, t. VI, 1881. — In-8°.

BONN. — *Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens.* 39e année, 1re partie; 1882. — In-8°.

BORDEAUX. — *Actes de l'Académie nationale des Sciences, Belles-Lettres et Arts.* T. XLIII, 1881. — In-8°.

— *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales.* Années III, nos 13-52; IV, nos 1-38; 1882-1883. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* Années XII, nos 13-52; XIII, nos 1-8; 1882-1883. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, années V, nos 11-20; VI, nos 1-17. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* Années XXII, nos 9-12; XXIII, nos 1-6; 1882-1883. — In-8°.

— *Mémoires et Bulletins de la Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.* Années 1881. — Gr. in-8°.

— *Journal d'Histoire naturelle de Bordeaux et du Sud-Ouest.* Années I, nos 10-12; II, nos 1-8. — In-4°.

BOSTON. — *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Series.* T. IX, 1882. — In-8°.

— *Proceedings of the Boston Society of Natural History.* T. XX, n° 4; XXI, n°s 1-3; 1881-1882. — In-8°.

— *Memoirs of the Boston Society of Natural History.* T. III, n°s 4-5; 1882. — In-4°.

BRÊME. — *Abhandlungen herausgegeben vom Naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen.* T. VIII, fasc. 1, 1883. — Gr. in-8°.

BRESLAU. — *59. Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.* 1881. — Gr. in-8°.

— *Verzeichniss der Schriften der Schlesischen Gesellschaft.* 1804-1868. — Gr. in-8°.

BREST. — *Bulletin de la Société Académique.* 2e série, t. VII; 1881-1882. — 1 vol. in-8°.

BRÜNN. — *Verhandlungen des naturforschenden Vereines.* T. XIX-XX, 1880-1881. — 2 vol. gr. in-8°.

— *Bericht der meteorologischen Commission.* 1881. — 1 vol. gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Annales de la Société Entomologique de Belgique.* T. XXVI, 1882. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société Belge de Microscopie.* Années VIII, n° 11; IX, n°s 1-9; 1882-1883. — In-8°.

— *Annales de la Société Belge de Microscopie.* Année VI; 1880. — In-8°.

— *Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* Années 1881-1883. — 4 vol. in-18.

— *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* 2e série, t. L; 3e série, t. I-IV; 1881-1882. — 5 vol. in-8°.

— *Tables générales du Recueil des Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* 2e série, tomes XXI à L (1867 à 1880); 1883. — In-8°.

— *Catalogue des livres de la Bibliothèque de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* 1re partie : *Sociétés, établissements, administrations publiques,* etc., *recueils périodiques,* 1881. — Gr. in-8°.

— *Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* Collection in-8°. T. XXXI-XXXIII, 1881-1882. — 3 vol. in-8°.

— *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* T. XLIV, 1882. — In-4°.

— *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des*

Beaux-Arts de Belgique. T. XLIII (2e partie) et XLIV; 1882. — In-4°.

BUDAPEST. — *A Magyar Tudományos Akadémia*. — *Értekezések a mathematikai tudományok köréből*. T. VII, fasc. 19-25, 1880; t. VIII, fasc. 1-12, 1881. — *Értekezések a természettudomanyok köréből*. T. XI, fasc. 1-26. — *Mathematikai és természettudományi közlemenyek*. T. XVII, 1881. — In-8°.

— *Ungarische Revue mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von* PAUL HUNFALVY. T. I, fasc. 5-12; t. II, 1882, fasc. 1-10; t. III, fasc. 1-3; 1881-1883. — Gr. in-8°.

— *A M. Tud. Akadémia osztályának külön kiadványa*. — LENHÓSSEK JÓZSEF : *A szeged-öthalmi ásatásokról*... 1881. — JENDRÁSSIK JENŐ : *A magától sorokoztato*... 1881. — MOCSÁRY SÁNDOR : *A Magyar fauna fémdarázsal*... (Chrysididæ faunæ Hungaricæ). 1882. — 3 fasc. in-4°.

CAEN. — *Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres*. Année 1882. — 1 vol. in-8°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Annual Report of the Curator of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College*. Années 1881-1882. — In-8°.

— *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College*. T. VII, n° 9; X, nos 2-6; XI, nos 1-2. 1882-1883. — In-8°.

— *Memoirs of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College*. T. VII (n° 2); IX (n° 1). — In-4°.

— SCIENCE. *Published weekly at Cambridge Mass.*, by Moses KING. T. I, nos 1-20; II, nos 21-28. — Gr. in-8°.

CASSEL. — *Berichte des Vereins für Naturkunde zu Cassel*. XXIX-XXX Bericht; 1881-83. — In-8°.

CHRISTIANIA. — *Publicationen der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung*. 1880-1882. — 4 fasc. in-4°.

COLMAR. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Colmar*. Années XXII-XXIII; 1881-1882. — Gr. in-8°.

COPENHAGUE. — *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlingen*. Années 1882 (nos 2-3); 1883 (n° 1). — In-8°.

DANZIG. — *Schriften der naturforschenden Gesellschaft*. T. V, fasc. 3-4, 1882-1883. — Gr. in-8°.

DAX. — *Bulletin de la Société de Borda à Dax*. Années VII (1882), n° 4; VIII (1883), nos 1-2. — Gr. in-8°.

DIJON. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon*. 3e série, t. VII; 1881-1882. — In-8°.

DRESDE. — *Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft* ISIS *in Dresden*. Année 1882, 2e semestre. — In-8°.

DUBLIN. — *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society*. T. III, 5e partie, 1882. — In-8°.

— *The Scientific. Transactions of the Royal Society*. T. I, nos 15-19; t. II; 1882. — In-4°.

ERLANGEN. — *Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät*. Fasc. 14; 1881-1882. — In-8°.

FOIX. — *Bulletin de la Société Ariégeoise des Sciences, Lettres et Arts*. N° 1, 1882. — Gr. in-8°.

FRANCFORT-S.-M. — *Abhandlungen, herausgegeben van der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft*. T. XIII, fasc. 1-2; 1882. — In-4°.

— *Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft*. 1881-1882. — In-8°.

— *Jahres-Bericht des Frankfurter Vereins für Geographie und Statistik*. 36e année, 1871-1872. — In-8°.

GENÈVE. — *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*. T. XXVIII, 1re partie; 1882. — In-4°.

GIESSEN. — *17. u. 22. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur-und Heilkunde;* 1878. — In-8°.

GLASGOW. — *Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow*. T. XIII, n° 2; 1881-1882. — In-8°.

— *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland*. T. XXV; 1881-1882. — In-8°.

GÖTTINGEN. — *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusta Universität aus dem Jahre* 1882. — In-12.

— *Göttingische Gelehrte Anzeigen. Unter der Aufsicht der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*. 1882. — 2 vol. in-12.

GRENOBLE. — *Bulletin de l'Académie Delphinale*. 3e série, t. XVII; 1881-1882. — In-8°.

— *Bulletin de la Société de Statistique, des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère*. T. X-XI; 1881-1882. — 2 vol. gr. in-8°.

HALLE A/S. — *Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Originalaufsätze*. T. X-IV, nos 1-2; XV, nos 1-4; XVI, n° 1; 1878-1883. — In-4°.

— *Berichte der Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft*. Années 1871, 1879-1882. — 5 fasc. in-4° et in-8°.

— *Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Halle a. S.* 1882. — Gr. in-8°.

HALLE A/S. — *Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.* 3e série, t. VI; 1881. — In-8°.

HARLEM. — *Archives du Musée Teyler.* 2e série, t. I, 3e part., 1882, — In-4°.

— *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.* T. XVII, nos 3-5; t. XVIII, no 1; 1882-1883. — In-8°.

HEIDELBERG. — *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg.* 2e série, t. III, fasc. 2, 1882. — Gr. in-8°.

HELSINGFORS. — *Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk.* Fasc. XXXV-XXXVI. — In-8°.

— *Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar.* Fasc. XXIII, 1880-1881. — In-8°.

— *Finska Vetenskaps Societetens Bibliothek. År 1881.* — In-8°.

INNSBRUCK. — *Berichte des Naturwissenschaftlichen-medicinischen Vereins in Innsbruck.* 12e année, 1881. — In-8°.

KHARKOF. — *Soobchtchénia...* Communications et Bulletins des séances de la Société Mathématique près l'Université Impériale de Kharkof. Années 1881, no 2; 1882, nos 1-2. — Gr. in-8°.

KÖNIGSBERG. — *Schriften der Königlichen physikalisch-ökonomischen Gesellschaft in Königsberg.* Année XXIII; 1882. — In-4°.

LAUSANNE. — *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles.* T. XVIII, no 88; 1882. — In-8°.

LE CAIRE. — *Bulletin de l'Institut Égyptien.* 2e série, no 1; 1880. — Gr. in-8°.

LEIDE. — *Tijdschrift der Nederlandsche dierkundige Vereeniging, onder der redactie van A. A. van Bemmelen.* Supplément I, première partie. — In-8°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft.* Années XVII (no 4), XVIII (nos 1-2); 1882-1883. — In-8°.

— *Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig.* 9e année, 1882. — In-8°.

LIÈGE. — *Annales de la Société Géologique de Belgique.* T. VIII, 1880-1882. — *Adresse aux Chambres.* 1883. — Gr. in-8°.

— *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège.* 2e série, t. X; 1883. — Gr. in-8°.

LONDRES. — *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* T. XLII, 9; XLIII, 1-8; 1882-83. — In-8°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 189-202. — In-8°.

— *Journal of the Royal Microscopical Society.* 2e série, t. II, no 6; III, nos 1-3. — In-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the Society for Psychical Research.* T. I, nos 2-3; 1883. — In-8°.

LUND. — *Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift.* T. XIV-XVII, 1877-1881. — 4 vol. in-4°.

— *Fysiografiska Sällskapets Minnesskrift.* 1878. — In-4°.

— *Festskrift till Kgl. Univers. i Köpenhamn.* 1 Juni 1879. — In-4°.

— *Universitets Bibliotheks Accessions-Katalog.* In-8°.

LUXEMBOURG. — *Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des Sciences naturelles.* T. XVIII; 1881. — In-8°.

MARSEILLE. — *Bulletin de la Société Scientifique Industrielle de Marseille.* T. IX, nos 2-4; t. X, Procès-verbaux. — Gr. in-8°.

MILAN. — *Atti della Società Crittogamologica Italiana.* 26e année, 2e série, t. III, fasc. 2; 1882. — Gr. in-8°.

— *Atti della Società Italiana di Scienze naturali.* T. XXIV et XXV, nos 1-2; 1881-1882. — In-8°.

— *Memorie del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Scienze.* T. XIV, fasc. 3; 1881. — In-4°.

— *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti.* 2e série, t. XIV; 1881. — In-8°.

MODÈNE. — *Memoria della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti.* 2e série, t. I; 1883. — In-4°.

MONTPELLIER. — *Académie des Sciences et Lettres de Montpellier. Mémoires de la Section des Sciences.* T. X, fasc. 2, 1880. — In-4°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* T. LVII, n° 2; LVIII, n° 1; 1882-1883. — In-8°.

— *Matematitcheskiï...* Recueil mathématique publié par la Société Mathématique de Moscou. T. X et XI, n° 1; 1882-1883. — Gr. in-8°.

MULHOUSE. — *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse.* Septembre 1882 à août 1883. — Gr. in-8°.

MUNICH. — *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Classe der Wissenschaften.* T. XIV, 2e partie; 1883. — In-4°.

— BAUER (G.). *Gedächtnissrede auf* O. HESSE. 1882. — In-4°.

— *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1882, fasc. 3-5; 1883, fasc. 1. — In-8°.

NANCY. — *Bulletin de la Société des Sciences de Nancy.* 2e série, t. VI, fasc. 14, 15e année. — Gr. in-8°.

NAPLES. — *Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche.* T. VII-IX, 1878-1879. — 3 vol. in-4°.

Naples. — *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche.* Années 21, nos 9-12; 22, nos 1-7. — In-4°.

Neuchâtel. — *Bulletin de la Société des Sciences naturelles.* T. XII, 3e cahier, 1882. — In-8°.

New York. — *Annals of the New York Academy of Sciences.* T. II, nos 7-9; 1881. — In-8°.

— *Transactions of the New York Academy of Sciences.* T. I, nos 1-8; 1881-1882. — In-8°.

— *Lists of Duplicates and Deficiencies in the Library of the New York Academy of Sciences.* 1880-1881. — In-8°.

— *Bulletin of the American Museum of Natural History (Central Park, New York).* T. I, nos 2-4. — In-8°.

— *Annual Reports of the American Museum of Natural History.* Nos 1, 13, 14; 1870-1883. — In-8°.

Nice. — *Annales de la Société des Lettres, Sciences et Arts des Alpes-Maritimes.* T. VIII; 1882. — Gr. in-8°.

— *Société centrale d'Agriculture, d'Horticulture et d'Acclimatation de Nice et des Alpes-Maritimes.* Bulletins trimestriels, 88-91; 1882-1883. — In-8°.

Offenbach. — *Berichte des Offenbacher Vereins für Naturkunde.* Nos 22-23; 1880-1882. — In-8°.

Padoue. — *Atti della Società Veneto-Trentina di Scienze naturali.* T. VIII, fasc. 1; 1882. — In-8°.

Paris. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Informations et documents divers.* Nos 34-36. — *Congrès de La Rochelle.* — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXVIII, nos 6-11. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. X, nos 6-7; XI, nos 1-3. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société Philomathique de Paris.* 7e série. T. VI, 1881-1882. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* 2e série. T. VI-VII, juillet 1882 à juillet 1883. — Gr. in-8°.

— *Bulletin hebdomadaire de l'Association scientifique de France.* 2e série. T. VI-VII, nos 132-175; 1881-82. — In-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* 3e série. T. V, nos 3-5; t. VI, nos 1-2; 1882-83. — In-8°.

— *Club Alpin Français. Annuaire.* 8e année, 1881. 1 vol. in-8°. — *Bulletin mensuel.* Années 1882, nos 7-12; 1883, nos 1-6. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des*

Sciences. T. XCV, nos 16-26; XCVI et XCVII, nos 1-9; 1882-1883. — 2 vol. in-4°.

PARIS. — *Comptes rendus des séances de la Société de secours des Amis des Sciences*. 22e séance, 1882. — In-8°.

— *Journal de l'École Polytechnique*. Cahiers 51-52, t. XXXII-XXXIII; 1882. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. 2e série. T. I, nos 11-12; II, nos 13-21; 1882-83. — Gr. in-8°.

— *Journal des Savants*. Années 1882, nos 8-12; 1883, 1-8. — In-4°.

— *Revue des Sociétés savantes*. 3e série, t. II, livr. 3, 1879. — Gr. in-8°.

— *Revue des Travaux scientifiques*. Années 1882, nos 6-12; 1883, nos 1-4. — Gr. in-8°.

PHILADELPHIE. — *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia*. Année 1883, nos 1-5. — In-8°.

— *Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful Knowledge*. T. XX, nos 110-112; 1882. — In-8°.

PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali residente in Pisa. Memorie*. T. V, fasc. 2; 1883. — Gr. in-8°.

— *Il Nuovo Cimento*. 3e série, t. XII, nos 7-12; 1882. — In-8°.

PORTO. — *Revista da Sociedade de Instrucção do Porto*. Années II (novembre-décembre), III (janvier-mars); 1882-83. — In-8°.

PRAGUE. — *Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1882*. 43e année. — Gr. in-4°.

PRIVAS. — *Bulletin de la Société d'Agriculture, Industrie, Sciences, Arts et Lettres du département de l'Ardèche*. Nouvelle série. T. II, 2e semestre de 1882. — In-8°.

RIO DE JANEIRO. — *Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire de Rio de Janeiro*. T. II, nos 8-12; III, nos 1-7. — In-4°.

— *Annales de l'Observatoire Impérial de Rio de Janeiro*. EMM. LIAIS, *directeur*. T. I, 1882. — In-4°.

— *Revista maritima Brazileira*. T. I, nos 1-8, 10, 12; t. II, nos 2-6, 8-9; 1881-83. — In-8°.

LA ROCHELLE. — *Académie de La Rochelle. Société des Sciences naturelles. Annales*. N° 18, 1881, avec Atlas. — 2 vol. in-8°.

ROME. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Rendiconti*. 35e année, n° 6; 36e année, nos 1-7; 1882-83. — In-18.

— *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. T. XXXIV, n° 6; 1883. — In-4°.

ROME. — *Atti della Reale Accademia dei Lincei. Memorie.* 3e série, t. IX-XIII, 1881-1882. — *Transunti.* T. VI, n° 4; t. VII, nos 1-12; 1882-83. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. XV, nos 1-10; 1881-82. — In-4°.

ROTTERDAM. — *Nieuwe Verhandelingen van het Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam.* 2e série, t. III, fasc. 1. — In-4°.

ROUEN. — *Bulletin de la Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen.* 17e année (2e semestre), 18e année (1er et 2e semestre). — In-8°.

SAINT-LOUIS. — *Missouri Historical Society. Publications,* n° 7. 1882. — In-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.* T. XXVIII, nos 2-3; 1882-83. — In-4°.

— *Acta Horti Petropolitani.* T. VIII, fasc. 1; 1883. — Gr. in-8°.

SIENNE. — *Bollettino del naturalista collettore.* 3e année, 1883. — In-4°.

STOCKHOLM. — *Entomologisk Tidskrift på föranstaltande af Entomologiska Föreningen i Stockholm, utgifven af* JACOB SPÅNBERG. T. III, fasc. 4; 1882. — In-8°.

STUTTGART. — *Württembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte.* 39e année; 1883. — In-8°.

TOKIO. — *Transactions of the Seismological Society of Japon.* T. I-IV, 1880-1882. — In-8°.

TOULOUSE. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse.* 8e série, t. IV. — Gr. in-8°.

— *Table alphabétique des 16 premiers tomes de l'Académie de Toulouse.* 1854. — In-8°.

— *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse.* Années XV et XVI, 1881-82. — In-8°.

— *Revue mycologique, publiée par* M. C. ROUMEGUÈRE. 5e année, nos 17-19; 1883. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société Hispano-Portugaise de Toulouse.* T. III, nos 2-4; 1882. — Gr. in-8°.

TURIN. — *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.* T. XVIII, nos 1-7; 1882-83. — In-8°.

— *Bollettino dell' Osservatorio della Regia Università de Torino.* N° 17, 1882-83. — In-4°, oblong.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXXVI, nos 9-12; XXXVII, nos 1-8; 1882-83. — In-8°.

VENISE. — *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* 5e série. T. VII-VIII; 6e série, t. I, nos 1-3; 1881-1883. — In-8°.

— *Temi di premio dell' Istituto Veneto; 15 Agosto 1882.* — In-8°.

VERSAILLES. — *Mémoires de la Société des Sciences naturelles et médicales de Seine-et-Oise.* T. XII, 1883. — In-8°.

VIENNE. — *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.* T. LXXXIII, n° 5; LXXXV, n° 1.

— *Schriften des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.* T. XXII, 1881-82. — In-18.

WASHINGTON. — *Annual Report of the Comptroll of the Currency.* 1881, Déc. 5. — In-8°.

— *Annual Report of the Commissioner of Agriculture.* 1880-82. — 2 vol. in-8°.

— *Surgeon General Office. Index-Catalogue of the Library of Surgeon-General's Office.* Vol. III, 1882. — In-4°.

— *Survey of the Territories. Bulletin of the U. S. Geological and Geographical Survey of the Territories.* T. VI, n° III; 1882. — In-8°.

— *Meteorological Observations made at the U. S. Naval Observatory.* — In-4°.

— *Geological and Geographical Atlas, by Hayden.* 1881. — Gr. in-fol., toile.

— *U. S. Geological Survey. Monographs.* — DUTTON : *On the Grand Cañon.* Texte in-8°, avec atlas in-fol.

LA
ROUTE D'AUSTRALIE
PAR LE THERMOMÈTRE

PAR M. HAUTREUX
LIEUTENANT DE VAISSEAU

Les navires à voiles qui partent d'Europe ou des États-Unis à destination de l'Australie, devant passer par le cap de Bonne-Espérance, suivent des routes qui sont parfaitement déterminées dans tout le parcours de l'Océan Atlantique, tant au Nord qu'au Sud de l'équateur. A partir de l'équateur la route par arc de grand cercle rencontrerait le premier méridien vers 55° latitude Sud et couperait le soixante-quinzième méridien Est par 78° latitude Sud. Cette route étant impossible à suivre à cause de la banquise australe, on est obligé de s'en tenir aux routes composées et de venir couper le premier méridien vers le 45e parallèle Sud. Depuis les côtes d'Europe jusqu'à ce point les données météorologiques sont suffisamment connues et régulières, pour qu'on puisse compter sur des moyennes de traversées bien déterminées.

Ainsi de la Manche à l'équateur on compte une traversée moyenne de .... 29 jours.

De l'équateur au premier méridien on compte une moyenne de.................................. 25 jours.

Soit en somme.................................. 54 jours.

Mais à partir du premier méridien, où la route se dirige à peu près droit à l'Est du monde, les données n'ont plus la même précision. Bien que les vents généraux d'Ouest règnent dans ce parcours, il y a souvent des séries de vents dépendant de l'Est, qui contrarient les navires et allongent outre mesure les traversées.

La route qu'ont à faire les navires pour se rendre de l'Atlantique à la Tasmanie est encore discutée pour le parcours à faire dans l'Océan Indien. On hésite sur la route à choisir entre les parallèles de 40° et de 50° de latitude Sud.

La crainte des glaces, des mauvais temps, combat le désir des capitaines de se rapprocher le plus possible de la route par l'arc de grand cercle.

Les documents météorologiques ne sont pas encore assez nombreux sur cette route pour donner des avis suffisamment précis.

Le tableau publié en 1875 dans les *Annales hydrographiques* et donnant le résumé des traversées du Cap à Sydney, montre que, entre les parallèles de 40° et 50°, les traversées ont varié du simple au double; quel que soit le parallèle suivi, la durée a varié entre vingt-trois et quarante-huit jours. La moyenne est de trente-six jours. Des différences aussi considérables tiennent bien plus à l'irrégularité des vents qu'à la différence de marche des navires. Elles existent en toute saison, aussi bien en été qu'en hiver.

La différence de route que l'on recherche en se rapprochant de l'arc de grand cercle pour les routes composées, est certainement considérable; elle atteint 800 milles, selon que l'on suit le parallèle de 40° ou celui de 50°; c'est près de quatre jours de route avec bon vent.

L'influence seule du vent pouvant amener des différences de route qui dépassent vingt jours, il est d'une bien plus grande importance de baser sa route sur les données météorologiques que sur la donnée mathématique de l'arc de grand cercle.

J'ai consulté les *Sailing directions* de Maury, les journaux des capitaines des maisons Ballande et Tandonnet; j'ai prié ces Messieurs de relever les températures de la mer pendant leurs voyages. J'ai ainsi obtenu une cinquantaine de routes comprises entre 40° et 50° latitude Sud.

J'ai pu dresser un tableau mensuel des directions moyennes du vent suivant les parallèles de 40°, 45° et 50° Sud, puis un tableau des coups de vent essuyés par les navires dans ces mêmes parages.

Les températures de la mer, relevées souvent de quart en quart, ont permis de dresser un tableau des modifications thermales dues au changement en latitude, et d'indiquer les points où les isothermes de 10°, de 7° et de 4° croisent les différents méridiens.

Bien que les documents soient peu nombreux, de l'inspection de ces tableaux il semble ressortir certaines lois utiles à connaître et pouvant guider dans les recherches futures. Et d'abord l'étude des températures de la mer peut donner aux capitaines des indications très précieuses sur les chances plus ou moins grandes de rencontre des ice-bergs.

En effet, la voie la plus courte suivant l'arc de grand cercle étant impossible à suivre, puisqu'elle fait passer par la banquise, on suit une route composée, se rapprochant le plus possible de la limite des glaces; les dangers de rencontre des ice-bergs sont tels dans ces parages que le navigateur ne s'y hasarde qu'avec une extrême circonspection; car les brumes y sont fréquentes ainsi que les grains de neige, la mer y est presque toujours très grosse et la rencontre d'un ice-berg serait la perte certaine du navire; les vents régnants portent généralement vers les glaces, leur température ne peut indiquer ce voisinage puisque la glace est toujours sous le vent.

L'étude des températures de la mer peut servir à apprécier presque sûrement la proximité ou l'éloignement des glaces.

L'ice-berg poussé par les vents d'Ouest dérive vers l'Est, fond, et abaisse considérablement la température de l'eau qu'il abandonne; l'eau de fusion se trouve donc *au vent*.

Les observations du commandant Nares, du *Challenger*, aux approches de la banquise antarctique ont dévoilé la manière dont l'ice-berg abandonne la banquise, et vient se fondre dans les eaux plus chaudes. Le tracé des lignes isothermes aux différentes profondeurs qui a été inséré dans les *Annales hydrographiques* de 1875, montre que la zone où viennent fondre les ice-bergs forme une sorte de coin glaciaire, à la température de zéro, qui s'avance à deux cents lieues de la banquise, entre des nappes d'eau plus chaudes de 2° à 3°; l'axe de ce coin glaciaire est à environ

200 mètres de profondeur, et se termine au point où la surface de la mer atteint 4°.

D'autres observations ont montré que lorsqu'on a aperçu des glaces isolées, la température de la mer était inférieure à 7° à grande distance des ice-bergs.

La limite de température de l'eau de 4° est donc dangereuse, et celle de 7° ne l'est plus; il s'agit de connaître s'il existe une relation permettant de déterminer la distance à laquelle on se trouve de l'une ou l'autre de ces limites. — C'est le résultat que je vais exposer.

Décroissance des températures suivant la latitude.

(Voir tableau n° 1.)

La décroissance des températures de surface se fait progressivement depuis les régions équatoriales jusqu'aux régions polaires; presque insensible dans la zone intertropicale, elle s'accélère, au Nord comme au Sud, à mesure qu'on se rapproche des glaces, et se ralentit dans la zone de fusion des ice-bergs, qui conduit jusqu'au bord de la banquise.

De ces données générales il ne faut pas conclure que la décroissance soit, dans toutes les régions du globe, la même en fonction de la latitude; mais partout on l'a trouvée régulière pour des espaces limités.

Aussi, d'après les cartes thermales de l'Atlantique Nord, publiées dans les *Annales hydrographiques* de 1874, pour les mois de janvier et de juillet, si l'on fait le tracé des températures en suivant divers méridiens on trouve :

Suivant le cinquantième méridien Ouest (Paris) (Gulf-Stream).

LATITUDES NORD.

	37°30	40°	42°30	45°	47°30	Entre 40° et 45°, chute thermale pour un degré de latitude :
Janvier.....	19°	15°	7°	3°	0°	2°4
Juillet......	26°	22°	15°	7°	4°	3°

Les tracés montrent bien la régularité de décroissance thermale dans cette région, entre les limites : pour janvier, de 19° à 9°;
pour juillet, de 26° à 6°.

En été, la chute thermale est plus rapide qu'en hiver.

Suivant le trentième méridien Ouest (Paris).

LATITUDES NORD.

	37°30	40°	42°30	45°	47°30	50°	52°30	55°	57°30	60°	62°30
Janvier .	17°	15°5	14°5	13°5	12°5	11°5	10°5	9°	7°	5°	3°
Juillet ..	22°	21°3	20°5	19°	17°5	46°	15°	14°3	13°8	13°2	12°

Les tracés montrent : En janvier, une décroissance très régulière avec point d'inflexion vers 52°30 Nord; de 37° à 52° de latitude, la chute thermale est, par degré de latitude, de 0°4; de 52° à 67° elle est de 0°7.

En juillet, on trouve de 37° à 52° une chute thermale de 0°46;
de 52° à 62° — de 0°30;
de 62° à 69° — de 1°30.

En été, la chute thermale est encore plus rapide qu'en hiver dans les latitudes élevées; dans les eaux de température inférieure à 12°, la chute thermale est deux fois plus accentuée que dans les eaux plus chaudes.

Dans ces deux exemples, les chiffres qui expriment la décroissance thermale en fonction de la latitude, sont très différents, mais dans les quatre cas la chute est excessivement régulière dans des espaces restreints.

Des Canaries au cap Finistère, le long du douzième méridien Ouest, grâce aux paquebots des Messageries maritimes, j'ai recueilli un nombre considérable d'observations sur les températures de la mer pour chaque mois de l'année.

Le tableau de ces températures a été publié dans un mémoire précédent sur les données météorologiques entre la Gironde et la Plata.

Les tracés mensuels montrent bien la régularité de décroissance

thermale; comme précédemment la chute est plus rapide en été qu'en hiver, elle est : en février, de 0°26;

en septembre, de 0°46.

Les inflexions de ces courbes sont liées à des modifications dans les mouvements généraux des eaux, dans les courants de surface qui règnent le long de la côte de Portugal, et le long de la côte d'Afrique près du banc d'Arguin, dans les différentes saisons de l'année.

Dans l'Atlantique Sud, entre Sainte-Catherine et le cap Sainte-Marie, toujours d'après les observations des paquebots, on trouve :

en janvier, une chute thermale de 0°9;

en juillet, — de 1°2.

Dans tous ces exemples la régularité devient plus manifeste à mesure qu'on se rapproche davantage des eaux à 12°.

Dans l'Océan Indien, la *Gazelle,* dans sa campagne aux îles Kerguelen, a trouvé le long du soixante-quinzième méridien Est (Paris), les températures suivantes :

LATITUDES AUSTRALES.

	35°	37°30	40°	42°30	45°	47°30	Chute thermale :
Températures.	19°	17°	14°5	15°	7°	5°	0°7 et 1°2

la décroissance thermale devenant presque double à partir des eaux à 14°.

De son côté, le *Challenger*, dans les environs du cent vingtième méridien Est, a trouvé :

LATITUDES AUSTRALES.

	45°	47°30	50°	52°30	55°	Chute thermale par degré de latitude :
Températures.	13°	10°5	7°5	5°	3°	1°0

Dans l'Océan Pacifique, le même navire descendant au Sud en suivant le méridien de Taïti, on trouve pour longitude Ouest 150°.

LATITUDES AUSTRALES.

	27°	30°	32°30	35°	37°30	40°	42°30	45°	Chute thermale : 0°5 et 1°0
Températures.	20°5	19°5	18°5	16°5	13°5	12°	11°	10°	

En raison de cette régularité dans les mouvements de décroissance thermale constatée en ces différents points, on a pensé que dans l'Ouest comme dans l'Est des îles Kerguelen, le même principe devait s'appliquer entre les limites de 40° et de 50° Sud ; que, par conséquent, connaissant deux ou trois températures de latitude différente, pour le même mois, sous le même méridien, un simple tracé graphique ferait connaître les températures intermédiaires et les au-delà.

(Voir tableau n° 2.)

C'est sur ces données qu'on a construit le tableau des tracés mensuels de la température de surface de la mer entre les latitudes de 35° et de 50° Sud. — On a choisi les méridiens de 15° en 15° soit : 20°, 35°, 50°, 65°, 80°, 95°, 110°, 125°, 140°.

Pour chaque mois on a noté les températures qui ont été observées, on a joint par un trait les observations recueillies sous le même méridien, et ces différents tracés ont permis de dégager quelques-unes des lois qui résultent de cette étude.

Et d'abord il resssort bien clairement que dans le parcours entre le cap de Bonne-Espérance et le cap Otway, la région à l'Ouest des Kerguelen n'a pas le même régime que la région à l'Est de ces îles, que j'appellerai région australienne.

Vers le 40e parallèle, les températures de la région des îles sont généralement plus élevées que celles de la région australienne; au contraire, au delà de 45° la température de la région des îles est généralement plus faible que celle de la région australienne.

Par conséquent la chute thermale est plus rapide dans l'Ouest que dans l'Est des Kerguelen.

Or c'est la région où l'on a le plus à redouter les glaces, celle où l'on doit gagner le plus au Sud; on voit immédiatement le profit que la navigation peut tirer de cette remarque.

Bien que les thermomètres des différents navires n'aient pu être comparés entre eux, comme les routes ont suivi généralement les parallèles, les différences entre les régions Est et Ouest peuvent être considérées comme exactes.

Si d'après ces tracés on recherche quelle est la chute thermale moyenne par degré de latitude, on peut dresser le tableau nº 2.

Ainsi entre les parallèles de 40° et de 45° Sud, la chute thermale la plus rapide paraît avoir lieu :

En juillet, pour la région des îles;

En décembre, pour la région australienne.

Entre les parallèles de 45° et 50°, elle aurait lieu :

En janvier, pour la région des îles;

En novembre, pour la région australienne.

En janvier, le courant chaud du cap de Bonne-Espérance descend très au Sud, et sous le méridien du Cap on trouve 12° et 13° de température par 44° latitude Sud. Dans les environs des îles du Prince-Édouard, la chute thermale atteint 2° pour chaque degré de latitude.

A l'aide de ces tracés il est possible d'établir le tableau mensuel du croisement des isothermes de 10°, 7° et 4° avec les différents méridiens.

(Voir tableau nº 3.)

L'isotherme de 4° étant considéré comme dangereux doit être pris comme limite, vers le Sud, des routes entre lesquelles peut hésiter le navigateur. Si on l'étudie dans les deux mois extrêmes de janvier et juillet, on voit que : du méridien du Cap aux îles du Prince-Édouard, cet isotherme n'oscille pas de plus d'un degré de

latitude entre les deux saisons, et se maintient au Nord des îles du Prince-Édouard.

Mais de ce point les tracés de janvier et de juillet se séparent et s'écartent de plus de cent lieues vers les îles Croizet jusqu'aux Kerguelen.

En janvier, on pourrait passer à 50 lieues au Sud des îles Croizet et des îles Kerguelen.

En juillet, il faudrait passer à 50 lieues au Nord de ces mêmes îles.

En comparant les tracés d'isothermes de 10°, 7° et 4°, on voit qu'ils sont à peu près parallèles au delà du cinquantième méridien, ainsi qu'il devait ressortir des considérations précédentes et que :

En janvier, c'est vers le méridien de 40° Est que la pointe froide remonte le plus au Nord et vers 95° longitude Est qu'elle recule le plus au Sud;

En juillet, vers le méridien des Kerguelen une nappe chaude refoule d'une soixantaine de lieues vers le Sud les eaux froides; mais vers 80° de longitude son influence disparaît et les eaux froides se rencontrent plus au Nord.

Vents et coups de vent.

(Voir tableau n° 4.)

Bien que le nombre des routes étudiées ne soit pas suffisant pour établir de bonnes moyennes, cependant comme il paraît ressortir que pendant la mauvaise saison, et dans certaines parties du parcours, quelques navires ont rencontré des vents dépendant de l'Est au lieu des vents généraux d'Ouest, et que ces vents sont contraires à la route; j'ai dressé le tableau suivant dans lequel la direction du vent a été corrigée de la variation pour éviter le trompe-l'œil que cause une déclinaison allant à 40° N.-O.

Les résultats généraux de ces observations sont :

Région des îles.

De 40° à 50° latitude, on a rencontré des vents dépendant de l'Est dans les mois de mars à septembre.

Région australienne.

Les vents dépendant de l'Est ont été rencontrés surtout entre 45° et 50° Sud, du mois de mai au mois de novembre.

Par conséquent au point de vue de la direction des vents pendant l'hiver austral, il faudrait aller le plus Sud possible dans la région des îles, et au contraire remonter vers le Nord dans la région australienne.

On a dressé un tableau des coups de vent qui ont été essuyés par les divers navires, et les résultats que donne ce travail concordent avec les renseignements précédents. On voit en effet que pendant l'hiver austral on a éprouvé dans la région des îles le plus grand nombre des coups de vent entre 40° et 45°.

Tandis que dans la région australienne c'est plutôt entre 45° et 50° que les coups de vent ont été nombreux.

En comparant le tableau des coups de vent avec celui des décroissances thermales, on voit que :

Région des îles.

Le plus grand nombre de coups de vent a été observé en juin, entre 40° et 45° de latitude. C'est l'époque où la décroissance thermale est la plus rapide, elle atteint 1°6 par degré de latitude. A cette même époque, entre 45° et 50° de latitude, la décroissance thermale est la plus faible, elle n'est que de 0°8 par degré de latitude, les coups de vent y sont moins fréquents.

Région australienne.

En juillet, c'est par 50° de latitude que les coups de vent sont plus nombreux, la chute thermale est de 1°2 par degré de latitude; au contraire, entre 40° et 45° de latitude, on observe peu de coups de vent, la chute thermale est moitié plus faible, elle n'est que de 0°6.

Il semble donc que la fréquence des coups de vent soit liée à la plus ou moins grande chute thermale; on conçoit en effet que

plus les différences de températures de la surface de la mer sont accusées, plus doivent être considérables les perturbations atmosphériques des couches d'air voisines de cette surface; plus la chute thermale est rapide, plus sont rapprochées les nappes d'eau de température différente; plus l'écart des températures est grand, plus nombreux doivent être les coups de vent, les chances de bourrasques et de brume.

En résumé, du méridien du Cap à la Tasmanie, l'espace à parcourir se divise en deux régions distinctes :

1° Celle des îles, qui s'étend de 20° à 80° longitude Est;

2° La région australienne, qui s'étend de 80° Est jusqu'à la Tasmanie.

Dans la première région, les eaux froides sont très rapprochées des eaux chaudes, les troubles atmosphériques violents, les glaces à redouter.

Dans la seconde, les eaux froides sont refoulées plus au Sud, les différences de températures moins brusques, les troubles atmosphériques moins fréquents et les glaces peu à craindre.

En se basant sur le thermomètre, on peut donner les règles de route suivantes :

Janvier : naviguer dans les eaux à 8° ou 9° pour avoir des vents plus réguliers, et laisser au Sud la région des coups de vent.

Avril : se tenir dans les eaux à 6°, parce que les vents favorables sont vers le Sud et les coups de vent vers le Nord.

Juillet : se tenir dans les eaux de 4° à 5°; les vents favorables sont vers le Sud, les coups de vent vers le Nord; en outre, les glaces sont soudées à la banquise et les dangers de rencontre moindres.

Octobre : se tenir par 7° dans la région des îles et ne pas descendre au Sud dans la région australienne, pour éviter les vents contraires et les coups de vent qui y règnent.

Bordeaux, 1881.

TABLEAU N° 1.

DÉCROISSANCE THERMALE PAR DEGRÉ DE LATITUDE

	LONGITUDES	LATITUDES	MOIS	CHUTE THERMALE PAR DEGRÉ
Atlantique Nord	50° Ouest	de 40 à 45° N.	Janvier	2°4
	Gulf-Stream		Juillet	3.0
	30° Ouest	de 37 à 52° N.	Janvier	0°4
	»	de 52 à 67° N.	Id.	0.7
	»	de 37 à 62° N.	Juillet	0.4
	»	de 62 à 69° N.	Id.	1.3
	12° Ouest	de 30 à 40° N.	Janvier	0°4
	»	»	Juillet	0.4
Atlantique Sud	50° Ouest	de 30 à 35° S.	Janvier	0°9
	La Plata	»	Juillet	1.2
Océan Indien	75° Est	de 35 à 40° S.	Mars	0°7
	Kerguelen	de 42 à 47° S.	Id.	1.2
	120° Est	de 45 à 55° S.	»	1°0
Océan Pacifique	150° Ouest Taïti	de 35 à 45° S.	»	1°0

TABLEAU N° 2.

DÉCROISSANCE THERMALE MOYENNE PAR DEGRÉ DE LATITUDE

	Région des îles		Région australienne	
	LATITUDES AUSTRALES		LATITUDES AUSTRALES	
	de 40 à 45°	de 45 à 50°	de 40 à 45°	de 45 à 50°
Janvier........	1°2	1°4	»	1°0
Février........	1.6	0.6	0°8	1.2
Mars..........	»	1.2	»	»
Avril..........	1.4	»	0.8	1.0
Mai...........	1.4	1.0	»	1.2
Juin..........	1.6	0.8	0.6	1.2
Juillet........	1.6	0.8	0.6	»
Août..........	1.4	»	0.6	1.2
Septembre.....	»	»	»	1.2
Octobre.......	1.2	»	«	1.4
Novembre.....	1.2	»	»	»
Décembre.....	1.4	1.0	1.2	1.4

TABLEAU N° 3.

TABLEAU MENSUEL DU CROISEMENT DES ISOTHERMES DE 10°, DE 7° ET DE 4°

avec les différents méridiens.

	Isotherme de 10°									Isotherme de 7°									Isotherme de 4°				
	Longitudes E. (Paris)									Longitudes E. (Paris)									Longitudes E. (Paris)				
	20°	35°	50°	65°	80°	95°	110°	125°	140°	20°	35°	50°	65°	80°	95°	110°	125°	140°	20°	35°	50°	65°	80°
	Latitudes australes									Latitudes australes									Latitudes australes				
Janvier …	44	43	»	44	46	46.30	45.30	43	»	46	45	»	46.30	49	49	49	»	»	47	46	»	49	52
Février …	44	44.30	43	44	46.30	46	44.30	43.30	»	45.30	»	44.30	47	48	49	47.30	46	»	47	»	49	50	50
Mars ……	43.30	43	43.30	44	»	»	»	»	»	45.30	45	45.30	47	»	»	»	»	»	48	47	48.30	49.30	»
Avril ……	44	44	»	»	44	42.30	43	»	»	46	45.30	»	»	48	46	»	»	»	48	47	»	»	51
Mai ……	43	42	43	44	43.30	43.30	44	43	»	45	44	45	»	46	47	48	47.30	»	47	46	46	»	»
Juin ……	42	43	41.30	42.30	44	40	»	42.30	43	43	44	»	44.30	46.30	46	46	48	49	47	»	45	46	48
Juillet ……	43	42	40.30	42.30	»	40	42.30	40	41	44.30	43	41.30	45	43	44	46.30	48	46.30	»	46	44	46.30	46
Août ……	»	»	»	»	»	»	44	45	»	»	»	»	45	46	47	47	»	»	»	»	»	48	49
Septembre.	44	»	»	45	45	45	45	46	»	45.30	43.30	»	»	»	»	47	»	»	»	46	»	»	»
Octobre …	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	43	»	»	49	51	51	»	»	»	46	»	»	51
Novembre.	44	42.30	»	44	45.30	»	46.30	45.30	»	46	45	44	45.30	»	»	»	»	»	47	47	46	47	»
Décembre.	44	43	43	45.30	45	»	45.30	45	45.30	45.30	45.30	45	46.30	46.30	45.30	46	46	»	46.30	»	49	50	49

TABLEAU N° 4.

DIRECTION DES VENTS CORRIGÉS DE LA VARIATION

Longitudes Est	Latitud. Sud	Janvier.	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septemb.	Octobre.	Novemb.	Décemb.
20°	40	N-O	S-S-O	N	S-O	S-O	O-S-O	S-S-O	»	O	»	S-O	S-O
	45	O-S-O	O	N	S-S-O	S-S-O	N-N-E	S-S-E	N-N-O	S-S-O	N	S-S-O	O
	50	»	»	O-S-O	»	»	»	»	»	O-S-O	»	»	»
35°	40	N-O	N-O	N-E	S-S-E	O-N-O	N-N-O	E-S-E	»	N	»	S-O	»
	45	N-O	N	S-O	S-S-O	O	N-O	N	N	O-N-O	N-O	S-O	S-O
	50	»	»	O	»	O	O-N-O	N-O	»	S-O	N-O	»	O-S-O
50°	40	N	N-O	»	N-N-O	N-O	O-N-O	O-N-O	»	E-S-E	O-N-O	»	O
	45	»	S-O	O-N-O	S-S-O	O	O	N-N-O	N	N-O	S-O	O-S-O	O-S-O
	50	»	O	»	»	S-O	O-S-O	»	»	S-O	O-N-O	»	O
65°	40	»	N-O	»	N-N-O	»	S-O	O	»	N-N-O	S	»	»
	45	»	S-O	O-S-O	O	S-O	N-N-E	»	S-O	S-S-O	S-S-O	S-S-O	N-N-O
	50	»	S-O	»	O	N-O	O-N-O	S-O	»	»	N-N-O	»	O
80°	40	»	O-N-O	»	O	N	S-O	O-S-O	»	S-O	S-E	»	»
	45	N-O	N-N-O	»	S-O	S-O	O	N-N-O	S-O	O-S-O	N-O	S-O	O-N-O
	50	»	O-N-O	»	O-S-O	S-S-O	S	S-S-O	»	»	N-N-O	»	N-O
95°	40	»	O-N-O	S-E	N-N-O	S-S-O	S-O	O-S-O	»	O-N-O	S	»	»
	45	O-S-O	O-S-O	»	O	O	S-S-E	N-N-O	S-S-O	O	S-O	S-O	S
	50	»	S-O	»	»	S-O	S-O	N-N-E	»	»	N	»	O-S-O
110°	40	»	N-O	S	N-O	O-S-O	O-N-O	N-O	»	O-S-O	S-O	»	»
	45	O	S-O	»	S-O	N-N-O	O-S-O	N-N-E	S-O	N-N-O	S-S-O	O-S-O	O
	50	»	O-S-O	»	N	N-N-E	O-S-O	N-E	»	»	N	»	S-S-O
125°	40	»	»	»	S-S-O	S-O	S-O	N-N-O	N-N-O	»	N-O	»	»
	45	O-S-O	O-S-O	O-S-O	S-O	N-N-E	O	N-O	O-S-O	N-N-O	S-S-O	N-N-E	O-S-O
	50	»	»	»	»	S-O	»	N-N-E	»	»	N-N-O	»	»
140°	40	O	S-S-O	O	S-O	N	O	S-S-E	O	»	N-O	»	O-N-O
	45	N	N-O	»	»	N-N-O	N-N-E	S-S-O	O	N-O	N-N-O	O	N-O
	50	»	»	»	»	O-S-O	»	S-S-O	N-N-E	»	»	»	»
Nombre des routes étudiées dans chaque mois.		3	3	3	6	6	7	9	4	5	5	3	4

NOMBRE DES COUPS DE VENT COMPTÉS PAR JOURNÉE

Longitudes Est	Latitud. Sud	Janvier.	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septemb.	Octobre.	Novemb.	Décemb.
20°	40	1	»	1	3	»	3	»	»	2	»	»	»
	45	1	»	1	»	1	2	»	2	»	2	2	2
	50	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1
35°	40	»	»	»	2	»	2	1	»	3	»	»	»
	45	»	2	1	»	4	5	»	2	2	»	»	»
	50	»	»	»	»	6	2	2	»	1	»	»	3
50°	40	»	»	»	4	»	6	2	»	4	2	»	»
	45	»	1	2	1	»	1	»	1	3	»	2	2
	50	»	1	»	»	2	2	»	»	»	4	»	3
65°	40	»	»	»	1	»	6	1	»	2	2	»	»
	45	»	»	2	»	1	3	»	4	3	»	4	1
	50	»	»	»	3	1	3	»	»	»	2	»	1
80°	40	»	»	»	»	»	8	3	»	3	2	»	»
	45	1	1	»	2	»	3	1	5	2	1	2	»
	50	»	1	»	4	2	2	3	»	»	2	»	1
95°	40	»	2	»	3	»	3	2	»	3	1	»	»
	45	2	»	»	»	2	5	»	6	2	2	5	2
	50	»	2	»	6	»	»	2	»	»	1	»	»
110°	40	»	2	»	»	»	1	1	»	2	2	»	»
	45	2	3	»	6	3	3	2	6	»	1	4	2
	50	»	»	»	»	»	»	5	»	»	2	»	2
125°	40	2	»	»	»	»	1	»	1	»	1	»	»
	45	»	3	»	»	3	»	2	4	2	1	3	4
	50	»	»	»	»	1	»	5	»	»	2	»	»
140°	40	»	»	»	2	»	3	2	»	»	2	»	2
	45	»	2	»	»	1	»	4	»	3	2	»	»
	50	»	»	»	»	3	»	3	2	»	»	»	»
Nombre des routes étudiées dans chaque mois.		3	3	3	6	6	7	9	4	5	5	3	4

SUR

LES UNITÉS DE GAUSS

PAR M. ABRIA

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

Pour évaluer l'intensité absolue du magnétisme terrestre d'après la méthode de Gauss, on procède à deux séries d'expériences. On mesure, d'une part, la déviation qu'un barreau aimanté imprime à une petite aiguille de boussole, et, de l'autre, on fait osciller ce même barreau sous l'influence de la terre.

Dans le premier cas on a la relation

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang} u = 2\,\frac{M}{H}\cdot\frac{1}{R^3},$$

et dans le second

$$\text{(2)} \qquad t^2 = \pi^2 \frac{\int r^2\,dm}{MH}.$$

u est la déviation de l'aiguille.

R la distance des centres du barreau et de l'aiguille, le barreau étant situé sur la perpendiculaire au méridien magnétique mené par le centre de l'aiguille et dirigé suivant cette perpendiculaire elle-même. R est supposé assez grand pour qu'on puisse négliger les termes affectés au dénominateur de la cinquième puissance et des puissances supérieures.

t est la durée des oscillations du barreau.

$\int r^2 dm$ moment d'inertie du barreau par rapport à l'axe de suspension.

H est l'accélération que la composante horizontale de la force

magnétique terrestre imprimerait à une quantité de magnétisme de nature contraire, libre d'obéir à son action. H représente aussi la force nécessaire pour maintenir dans une direction perpendiculaire au méridien magnétique un petit barreau aimanté, d'une longueur égale à l'unité, ayant à une extrémité une quantité de magnétisme austral égale à l'unité de magnétisme et à l'autre extrémité une quantité égale de magnétisme boréal.

M moment magnétique du barreau.

$M = M_1 \times 2l \times g$, M_1 étant la quantité de magnétisme austral ou boréal qu'on peut supposer concentrée à chaque pôle, $2l$ étant la distance des deux pôles, g la gravité exprimée en millimètres. — Il importe en effet de remarquer que, d'après le choix de l'unité magnétique, il faut multiplier M_1 par g pour avoir la valeur en milligrammes du poids correspondant.

Les relations (1) et (2) permettent de déterminer M,H et par suite M_1.

Choisissons pour unité de temps la seconde, pour unité de longueur le millimètre, pour unité de force le milligramme au lieu de l'observation, pour unité de magnétisme la quantité qui placée à un millimètre de distance d'une quantité égale exerce sur elle une attraction ou une répulsion contre-balancée par un milligramme. Dans les équations (1) et (2) t sera remplacé par le nombre de secondes exprimant la durée d'une oscillation simple; R et les longueurs qui entrent dans $\int r^2 dm$ seront remplacées par le nombre correspondant de millimètres. Les masses qui entrent dans le moment d'inertie, que ce moment soit calculé d'après les formules de la mécanique, ou déterminé expérimentalement par les méthodes indiquées par Gauss ou ses successeurs, seront représentées par une expression de la forme $\frac{P}{g}$, P étant un poids, g la gravité en millimètres. Or, il importe de remarquer que si n est le nombre de milligrammes du poids P, $\frac{P}{g}$ devra être remplacé par n. P est alors en effet le poids de n milligrammes d'eau, on a par suite $P = ng$ et $\frac{P}{g} = n$.

Le nombre obtenu pour H et qui est à peu près égal à 2 pour nos contrées représentera donc en millimètres l'accélération que la composante horizontale de la force magnétique terrestre imprimerait à une masse magnétique m de nature contraire : mH exprimera en milligrammes le poids de cette masse magnétique, de même que mg représente le poids d'une masse m sous l'influence de la pesanteur.

Celui obtenu pour $M_1 = \frac{M}{2lg}$ sera le nombre d'unités magnétiques qu'on peut supposer concentrées à chaque pôle du barreau, l'unité étant définie comme il est dit plus haut.

Si l'on veut comparer les valeurs de H en différents lieux, il faudra tenir compte des variations de l'intensité de la pesanteur. Cette variation est peu considérable tant qu'on reste sur la surface de la terre. Il sera nécessaire d'y avoir égard le jour où l'on sera conduit à faire des observations magnétiques dans l'intérieur du globe ou à des hauteurs considérables.

Si, conservant la seconde et le millimètre pour unités de temps et de longueur, on prend pour unité de force l'unité *absolue* de Gauss, $\frac{1^{mmg}}{g}$, c'est-à-dire la force accélératrice qui imprimerait à un millimètre cube d'eau une accélération d'un millimètre par seconde, laquelle est alors indépendante du lieu où se fait l'observation, la masse $\frac{P}{g}$ qui entre dans le calcul du moment d'inertie devra être remplacée par un nombre g fois plus grand, soit par ng. Les forces ont, en effet, pour mesure les produits des masses par les accélérations. Si l'unité de force est le milligramme, $P = n \times g$, n est la masse ou le nombre de millimètres cubes d'eau, g l'accélération. Si l'unité de Gauss est adoptée, la même force $P = ng \times 1$, ng devient la masse, 1 l'accélération. L'unité de magnétisme devient alors $\sqrt{g}$ fois plus petite et le nombre qui exprime une quantité donnée de magnétisme sera $\sqrt{g}$ fois plus grand. M_1 devra donc augmenter dans le rapport de $\sqrt{g}$ à l'unité. Le nombre qui donne la valeur de H augmentera aussi dans le même rapport, à cause du changement survenu dans l'unité de magnétisme.

C'est ce qui résulte des formules (1) et (2). On en déduit en effet

$$\frac{M}{H} = \frac{R^3 \tang u}{2} = K,$$

$$MH = \frac{\pi^2 \int r^2\, dm}{t^2} = K',$$

et

$$M = \sqrt{KK'},$$

$$H = \sqrt{\frac{K'}{K}},$$

K ne varie pas lorsqu'on change d'unité de force, K' seul devient g fois plus grand.

Dans les calculs effectués par Gauss et Weber et reproduits par les auteurs qui ont traité la question de la mesure des grandeurs magnétiques en unités absolues, $\frac{P}{g}$ est remplacé par le nombre n de milligrammes, d'où il résulte que l'unité de force choisie est bien le milligramme. C'est, du reste, ce qu'ils disent expressément (Œuvres de Gauss, 5[e] vol., p. 92). Les auteurs ne sont pas toujours assez explicites sur ce point qui est cependant important, surtout à cause des applications qu'on peut faire de la connaissance de M_1 et de H à la résolution de certaines questions.

Supposons, par exemple, un barreau aimanté pour lequel M_1 et $2l$ sont connus, mobile autour d'un axe vertical. Concevons-le amené dans une direction perpendiculaire au méridien magnétique et proposons-nous de déterminer la force qui devra être appliquée à chaque extrémité pour le maintenir dans cette position.

M_1 étant la quantité de magnétisme que l'on peut supposer concentrée à la distance l du centre du barreau et H représentant l'accélération que la composante horizontale de la force magnétique terrestre imprimerait à M_1, on aura pour le poids ϖ qu'il faudrait appliquer à la même distance l du centre du barreau $\varpi = M_1H$. Il est bien entendu qu'un poids égal ϖ devra être appliqué à l'autre pôle pour faire équilibre à l'action que la terre

exerce sur la masse — M_1 de magnétisme de nature contraire qui s'y trouve.

Cette valeur de ϖ peut être contrôlée par la torsion d'un fil pour lequel on connaît le couple de torsion. L'aimant étant suspendu horizontalement à l'extrémité du fil dont le couple de torsion, c'est-à-dire la force p nécessaire pour le tordre d'un arc égal au rayon, ou à $\frac{180^0}{\pi}$, le bras du couple étant d'un millimètre, est connue et exprimée en milligrammes, on le tord d'un certain nombre α de degrés et on mesure la déviation δ éprouvée par le barreau. Pour le tordre de 90°, il faudra une torsion égale à $\frac{\alpha}{\delta}$ 90.

La force nécessaire pour le tordre de $\frac{180}{\pi}$ étant p, celle qui correspondra à $\frac{\alpha}{\delta}$ 90 vaudra

$$p\,\frac{\alpha}{\delta}.\,90\,.\frac{\pi}{180}.$$

Si le bras du couple est $2l$, au lieu d'être égal à un millimètre, elle deviendra :

$$\varpi' = p\,\frac{\alpha}{\delta}\,90\,.\frac{\pi}{180}.\frac{1}{2l} = p\,\frac{\alpha}{\delta}.\pi.\frac{1}{4l},$$

et l'on devra trouver $\varpi' = \varpi$.

Pouillet a fait vers 1866 des expériences qui, d'après les détails donnés par cet illustre physicien, méritent toute confiance et permettent de vérifier, au moins approximativement, les formules précédentes.

Les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXII, p. 258 et t. LXVI, p. 853) donnent pour le calcul de la force de torsion d'un fil de cuivre rouge à l'extrémité duquel était suspendu un cylindre de plomb, de cinq centimètres de diamètre, du poids de 2660 grammes, 3^s, 397 pour la durée d'une oscillation. On en déduit pour p la valeur 72500^{mg}, le bras du couple étant d'un millimètre.

Un barreau aimanté pour lequel l ou la demi-distance polaire,

mesurée par une méthode que Pouillet indique dans son Mémoire, était égal à 242 millimètres, suspendu à l'extrémité du même fil, a exigé pour être dévié de 90° une torsion de 96°4. La force ϖ' correspondante est donc donnée par

$$\varpi' = 72500 \frac{96,4}{90} . \pi . \frac{1}{968} = 252^{mg}.$$

Ainsi, quand le barreau de Pouillet était maintenu à 90° du méridien magnétique, la force de torsion du fil équivalait à un poids de 252^{mg} appliqué à chacun des pôles en sens inverse de la composante horizontale de la force magnétique terrestre.

Tâchons de calculer les valeurs correspondantes de M_1 et de H.

M. Kohlrausch donne 1,90 pour la valeur de H en 1870 à la latitude de Paris, et admet que cette valeur croît de 0,004 par an. Pouillet n'indique pas l'année où ses expériences ont été faites : mais la première partie de son Mémoire ayant paru en 1866, on peut supposer qu'elles se rapportent à 1865. La valeur de H qu'il convient d'employer est par suite 1,88. C'est celle que nous adopterons.

Cet habile physicien n'a pas fait connaître la durée des oscillations du barreau dont il s'est servi, durée qui, avec les autres données de son Mémoire, aurait permis de calculer M_1; mais il fait connaître d'autres expériences d'où l'on peut déduire l'inconnue qui nous est nécessaire.

On peut obtenir une première valeur de M_1 en se servant des expériences d'où Pouillet a déduit la valeur de la demi-distance polaire.

Les barreaux dont il s'est servi étaient divisés par paires : les deux barreaux d'une même paire peuvent être considérés comme identiques. L'un d'eux étant placé dans la chape soutenue par le fil de suspension, l'autre était disposé sur une perpendiculaire au méridien magnétique menée par le centre du premier; celui-ci était dévié de sa position d'équilibre et on le ramenait dans le méridien magnétique par une torsion convenable du fil de suspension. Deux expériences semblables, faites à des distances

différentes et par conséquent en faisant varier les torsions, conduisent facilement à une équation dans laquelle il n'y a d'inconnue que la distance polaire. Je me suis assuré que les résultats de Pouillet sont bien vérifiés par la valeur 242 millimètres qu'il assigne à la demi-distance polaire.

Prenons l'une de ces deux équations et tirons-en la valeur de M_1.

En appelant R la distance de centre à centre des deux barreaux, il est aisé de voir que l'équation de condition est :

$$M_1^2 g^2 \left\{ \frac{R-l}{[(R-l)^2+l^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{R+l}{[(R+l)^2+l^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{n\theta g}{2l},$$

en prenant $n = 72500 \frac{\pi}{180} = 1265,4$ couple de torsion pour 1°.

Le facteur g, qui entre au carré dans le premier membre et à la première puissance dans le second, doit être introduit parce que nous prenons pour unité de force le milligramme, ou le produit d'un millimètre cube d'eau par le nombre g, de sorte que les actions magnétiques doivent être en réalité représentées par $M_1 g$ et la torsion par ng pour 1°, ou $n\theta g$ pour θ°.

L'équation est donc

$$M_1^2 \left\{ \frac{R-l}{[(R-l)^2+l^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{R+l}{[(R+l)^2+l^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{n\theta}{2lg}.$$

Pour l'une des expériences de Pouillet, on a les données suivantes :

$R = 869^{mm}$, $l = 242^{mm}$, $n = 1265,4$, $\theta = 80°$, $g = 9809^{mm},44$,

on en déduit $M_1 = 127,59$.

La seconde expérience, pour laquelle $R = 1128$, $\theta = 40°$, donne $M_1 = 129,58$.

On peut encore obtenir la valeur de M_1 à l'aide d'autres expériences faites plus tard par Pouillet et relatées dans son second Mémoire. Au lieu de faire agir le barreau sur un barreau semblable, suspendu par le fil de torsion, Pouillet le fait agir sur une petite aiguille de boussole. L'appareil était disposé de telle sorte que le barreau était sur une perpendiculaire, à la direction

de l'aiguille menée par son centre. Pour dévier l'aiguille d'un angle u, compté à partir du méridien magnétique, il fallait placer le barreau à une distance R, mesurée de centre à centre. L'équation qui convient à ce cas est :

$$\frac{M_1 g}{H} = \frac{\sin u}{\frac{1}{(R-l)^2} - \frac{1}{(R+l)^2}}.$$

On suppose seulement que les dimensions de l'aiguille de la boussole sont négligeables devant R, ce qui avait certainement lieu dans les expériences de Pouillet, la boussole dont il s'est servi étant une boussole de tangentes construite par Ruhmkorff.

Les données d'une expérience sont :

$$u = 10^{\circ}, \quad R = 1566^{mm}7, \quad l = 242, \quad g = 9809,44;$$

on en déduit :

$$\frac{M_1}{H} = 67,01;$$

et pour $H = 1,89$ qu'il convient d'adopter ici, les expériences paraissant avoir été faites deux ans plus tard,

$$M_1 = 126,65.$$

Cette valeur est un peu plus faible que les deux premières, et la différence peut tenir à ce que, comme l'indique Pouillet, la force directrice a diminué dans l'intervalle, et aussi à ce que nous ne possédons pas d'indications précises sur l'époque à laquelle les observations ont été faites. Il n'était pas cependant inutile de contrôler les premières expériences par les dernières qui ont été faites d'une façon différente.

Nous adopterons pour M_1 le nombre 129,58, d'une part, parce que les observations ont suivi de près celles de torsion, et d'autre part, parce que $R = 1128$ est notablement supérieur à 869, et que le magnétisme développé par influence, s'il y en a eu, l'a été en quantité moindre que dans la première expérience.

Le produit $M_1 H$ sera donc, avec $M_1 = 129,58$ et $H = 1,88$,

exprimé par $243^{mg},6$ qui ne diffère que de $\frac{1}{30}$ de 252^{mg} obtenu par Pouillet dans l'observation directe.

L'accord, eu égard aux incertitudes des expériences, peut être regardé comme satisfaisant.

Le but de cette note était surtout d'établir que l'unité employée par Gauss et Weber est bien le milligramme et non $\frac{1^{mmg}}{g} = \frac{1^{mmg}}{9809,44}$, comme on aurait pu le croire. Je suis heureux que les expériences de Pouillet, faites dans un ordre d'idées tout différent, m'aient permis de vérifier les conséquences des formules des deux physiciens allemands et d'apporter quelques éclaircissements dans une question de sa nature assez complexe.

Il ne me semble pas inutile de faire voir en terminant que les nombres donnés par Pouillet dans son Mémoire, pour la quantité de magnétisme M_1 et pour H, ne diffèrent pas beaucoup de ceux que j'ai adoptés.

Cet illustre physicien indique en effet, dans la suite de son Mémoire, que la quantité de magnétisme M_1, supposée la même dans les deux barreaux d'une même paire, placée en présence de son égale à un centimètre de distance, exerçait sur elle une répulsion ou une attraction contre-balancée par un poids de $1889^{gr},3$.

Il faut multiplier ce nombre par 1000, si on choisit le milligramme pour unité de force. De plus, si l'on suppose l'unité de distance égale à un millimètre, l'action devient 100 fois plus forte ; de sorte que l'attraction des deux masses M_1 placées à un millimètre de distance était égale à $188930000 \times g$, g étant la gravité exprimée en millimètres; mais cette attraction est aussi égale à $M_1^2 . g^2$; on a donc :

$$M_1^2 g^2 = 188930000 . g,$$

d'où

$$M_1 = \sqrt{\frac{188930000}{9809,44}} = 138,7,$$

au lieu de 129,6 que j'ai adopté.

La valeur H de la composante horizontale de la force terrestre est égale, d'après les valeurs que donne Pouillet à la fin de son premier Mémoire, à

$$\frac{632^{m},7 \times 96^{\circ},4}{129,58 \times 242}.$$

129,58 exprime la quantité de magnétisme que l'on peut supposer concentrée au pôle, d'après l'une des expériences relatées plus haut; 242 est la demi-distance polaire, de sorte que H.129,58 × 242 représente l'action de la terre sur l'une des moitiés du barreau, lorsque celui-ci est perpendiculaire au méridien magnétique : cette action est équilibrée par $632^{m},7$, force de torsion du fil pour un degré multiplié par l'angle de torsion correspondant $96^{\circ},4$; on a donc, d'après Pouillet :

$$H = \frac{632,7 \times 96,4}{129,58 \times 242} = 1,94.$$

Ce nombre deviendrait 1,84, si on adoptait pour M_1 la valeur 138,7 à laquelle conduit le calcul précédent fondé sur les données de Pouillet.

On peut sur ce dernier point raisonner d'une autre manière pour trouver quelle doit être la valeur de H, déduite des expériences de Pouillet, en fonction des unités choisies par Gauss. Il ne paraît pas sans intérêt de présenter ce mode de raisonnement, pour montrer combien ces questions de transformations d'unités sont délicates.

Pouillet indique en effet, à la fin de son premier Mémoire, qu'il a admis la composante de la force magnétique terrestre égale à 0,600 environ, en prenant le mètre pour unité de longueur et le gramme pour unité de poids (1).

Il a pris par conséquent pour unité de magnétisme la quantité

(1) Ce choix a l'inconvénient grave d'indiquer dans la même question deux unités différentes pour des grandeurs de même espèce. L'unité de force choisie est le produit d'un centimètre cube d'eau par l'accélération, laquelle doit être prise égale à 980,944, tandis que l'unité de longueur choisie est le mètre.

de fluide qui, placée à un mètre de distance d'une quantité égale, de même espèce ou d'espèce contraire, exerce sur elle une répulsion ou une attraction égale à un gramme.

Si l'on choisit pour unité de longueur le millimètre au lieu du mètre, l'unité de magnétisme de Pouillet devra devenir 1000 fois plus petite; si on remplace ensuite le gramme par le milligramme, c'est-à-dire par une force 1000 fois plus petite, l'unité de magnétisme devra devenir $\sqrt{1000}$ fois plus petite; elle deviendra donc en définitive $\frac{1}{1000\sqrt{1000}}$.

Mais le poids d'un corps étant égal au produit de sa masse par l'accélération, le nombre $g = 980^{cc},944$ dans le premier cas se trouve remplacé dans le second par $g = 9809^{mm},44$, c'est-à-dire par un nombre 10 fois plus fort. L'unité de magnétisme doit donc devenir 10 fois plus forte et être égale à $\frac{10}{1000\sqrt{1000}}$.

D'un autre côté, la grandeur qu'il s'agit d'évaluer est le moment du couple terrestre : la longueur du bras du couple étant devenue 1000 fois plus petite, il faut supposer à chaque extrémité de l'aiguille aimantée une quantité de magnétisme 1000 fois plus grande ou égale à $\frac{10 \times 1000}{1000\sqrt{1000}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Le nombre 0,6 devant augmenter en raison inverse de la grandeur de l'unité adoptée devient ainsi

$$0,6\sqrt{10} = 0,6 \times 3,16 = 1,89.$$

LE TÉLÉPHONE A BORDEAUX

PAR M. AUGUSTE BONEL

---

1. La Société générale des Téléphones, dont le siège social est à Paris, 66, rue des Petits-Champs, vient d'établir à Bordeaux, comme il en existe à Paris, Lyon, Marseille, Lille, Nantes et le Havre, un réseau destiné à relier tous les abonnés au bureau central, de façon à les mettre en communication les uns avec les autres, au moyen d'un système dont nous verrons plus loin le détail.

Cette Société, résultant de la fusion de la Compagnie Gower avec la Compagnie française et la Compagnie Edison, possède les principaux brevets. Avec un capital suffisant, un Conseil composé des notabilités de la finance, de la science et de l'industrie, et un ingénieur électricien des plus distingués pour la diriger à Paris, elle renferme tous les éléments nécessaires à un bon fonctionnement.

2. Le réseau téléphonique bordelais est ainsi constitué : des tubes en ciment, placés à un mètre de profondeur dans la chaussée, partent du bureau central, situé aux bains Sud des Quinconces, et s'étendent, d'un côté, jusqu'au bassin à flot, de l'autre, provisoirement, jusqu'au pont de pierre. Ils seront prolongés, dans peu de temps, jusqu'au pont de Brienne.

Des câbles garnissent ces tuyaux. Les conducteurs sont en cuivre, revêtus d'une gaîne de gutta-percha, puis d'une enveloppe longitudinale de chanvre goudronné. Un petit fil métallique, enroulé par dessus, a pour but de soutenir cette dernière gaîne et d'atténuer les effets de l'induction.

Sur le parcours, ces câbles se dispersent pour le service des abonnés ou pour se relier à des fils à peu près semblables, mais recouverts de plomb, destinés à suivre les égouts.

Pour correspondre avec La Bastide, vingt fils sont placés dans le pont de pierre.

Voici la quantité de câbles posés au 1er août 1881 :

Du Central à la Bourse, quarante fils.

Du Central au collecteur d'Alsace-et-Lorraine, soixante.

Du Central au pont de pierre, quarante.

Du Central à l'égout de la place des Quinconces, vingt.

Du Central à l'Entrepôt, vingt.

Du Central aux Docks, cent distribués sur le parcours.

En cas d'insuffisance, le nombre de ces conducteurs pourra être augmenté, en introduisant un nouveau faisceau dans les tubes, au moyen d'une disposition spéciale.

Les câbles sous plomb s'étendent :

Dans le pont de pierre, vingt.

Dans le collecteur d'Alsace-et-Lorraine et embranchements, trente.

Dans l'égout de la place des Quinconces, vingt.

Lorsque les fils sont arrivés à leur destination, ils se prolongent contre les maisons jusqu'au support placé sur le toit et, de là, rayonnent en l'air dans les environs.

La situation du bureau central permet d'employer une quantité fort restreinte de conducteurs aériens. Il existe seulement quatre lignes dont les fils d'acier de deux millimètres de diamètre se répandent dans l'ouest et le sud de la ville.

La première ligne de dix fils traverse les Quinconces et dessert les abonnés situés entre cette place et les allées de Tourny.

La seconde, de quatorze fils, gagne les allées d'Orléans, le cours de l'Intendance, la rue Judaïque et va aboutir au boulevard de Caudéran.

La troisième (douze fils) passe par la rue d'Orléans, la rue Esprit-des-Lois, le Théâtre, le cours du Chapeau-Rouge et se termine dans la rue Sainte-Catherine, à la place Saint-Projet.

La quatrième (dix fils) suit les quais et s'arrête à la porte du Palais.

Deux fers à U très légers forment le poteau de soutien, qui se scelle contre un mur ou s'applique sur le faîtage. On le consolide

au moyen de haubans et il peut supporter de dix à douze cloches de porcelaine, dont les attaches sont garnies d'une sourdine afin d'empêcher le bruit causé par le vent.

En résumé, la Société a établi, à la date précitée, vingt-sept kilomètres de fils aériens, vingt-trois fonctionnant, plus trente-six kilomètres de câble sous plomb et environ cent vingt kilomètres de câble ordinaire. Plusieurs sont en activité, le reste étant destiné à mettre en rapports les abonnés, dont le nombre s'accroît de jour en jour et qui ne manquera pas de devenir très considérable, dès qu'on se sera rendu compte de l'importance de l'installation et des services qu'on peut en retirer.

3. Le plus simple des appareils téléphoniques employé comme récepteur par la Société est le Bell. Il est fâcheux qu'une erreur de date ait fait tomber dans le domaine public un appareil si remarquable. Tout le monde connaît sa disposition : à l'intérieur existe une baguette aimantée au sommet de laquelle s'enroule du fil de cuivre très fin recouvert de soie, faisant partie du circuit devant le pôle, garni de cette bobine, on fixe un diaphragme ou plaque métallique, dite lame vibrante, enduite d'une légère couche de vernis.

Propriétaire des microphones Blake, Ader et Crossley, la Société a choisi ce dernier pour le service de Bordeaux.

On sait que le microphone fonctionne sous l'influence des variations de résistance électrique éprouvées par le charbon.

Le système Crossley emprunte la disposition du microphone de Hughes, avec cette différence qu'il existe quatre crayons de charbon disposés en quadrilatère. La plaque vibrante est une planchette de sapin contre laquelle sont fixés les supports des charbons. Le tout est placé dans une boîte renfermant également une sonnerie à relais et la bobine de Rumkhorff. Un ressort établit automatiquement la communication, soit avec les téléphones, soit avec le trembleur.

Une barre AB (*fig.* 1) pouvant basculer au point C s'appuie, au moyen du ressort (non indiqué dans la figure), sur le bouton D.

Son support C communique à l'arrêt F, contre lequel presse GK. Sur le côté de la lame AB, se trouve une plaque en ébonite et, au-dessus, une lame de cuivre, cette dernière indépendante de AB, mais se mouvant avec elle. De cette façon, l'appareil étant sur téléphone, les deux ressorts *r* et *r'* communiquent entre eux.

La transmission a lieu de la manière suivante : quand on parle devant la planchette, la voix la fait vibrer et imprime son mouvement au microphone M, déterminant des variations de courant dans le gros fil de la bobine de Rumkhorff R, dont le circuit est ainsi constitué : le négatif du premier élément vient du bouton ZT attaché au zinc et à la terre, traverse MR, les ressorts *r* et *r'* et va rejoindre le positif CM. Les modifications du courant principal font naître des courants secondaires dans le fil induit, qui, d'un côté, va à la terre par ZT, de l'autre, gagne la ligne par *t't* et DCK.

La réception s'opère simplement. Les courants induits du correspondant arrivant de la ligne L, traversent KCD, ainsi que les téléphones, et aboutissent à la terre par R et ZT.

Lorsqu'on suspend un téléphone en B, la barre bascule. A quitte D et va s'appuyer contre le buttoir I; alors *r* et *r'* glissent sur la lame d'ébonite et se trouvent isolés. L'appareil est sur sonnerie. Pour produire le signal, il suffit de presser G contre H. G cesse d'être en contact avec F et prend le positif C, tandis que le zinc de la pile entière va à la terre par ZT.

Pour former le signal, le courant du correspondant arrive par L, traverse KFCI, la bobine N du relais et se rend à la terre, en attirant la lame *a* contre *b*, ce qui ferme le circuit local de ZT à C, en traversant *a*, *b*, S, *m* et *n*. De cette façon, le trembleur fonctionne. Le marteau *m*, sous l'attraction du fer doux de S, quitte *n*. Alors le circuit est rompu. Il se referme quand *m* retombe sur *n* et ainsi de suite, tant que le courant vient de L.

4. Il se présente maintenant une question très obscure. Comment la voix se reproduit-elle? Les théories exposées jusqu'à ce

jour n'offrent rien de concluant; on peut les considérer comme de simples conjectures.

Pour le microphone, on vient de voir comment cela se passe. On suppose que le charbon, corps semi-conducteur, éprouve des variations moléculaires déterminant des différences dans le courant qui traverse le gros fil de la bobine et, par conséquent, une série de courants induits, reproduisant dans le téléphone récepteur les vibrations vocales émises au départ.

La cause du résultat obtenu par le téléphone, quand il sert de transmetteur, est plus mystérieuse. Les vibrations du diaphragme semblent développer un trouble dans l'aimant, et c'est ce trouble qui engendre les courants d'induction dans la bobine entourant le pôle, courants si faibles qu'on peut à peine les noter à l'aide du galvanomètre le plus sensible, mais toutefois assez énergiques pour faire entendre dans un téléphone éloigné.

Une action mécanique paraît nécessaire pour développer les variations magnétiques dans tous les téléphones et les microphones. Ce n'est pas seulement la puissance de la pile en jeu, mais la force de l'ébranlement éprouvé par le microphone proprement dit qui augmente le son. Tout le monde connaît l'expérience des trois clous. Deux sont attachés chacun à l'un des bouts d'un fil formant circuit, où sont intercalés un téléphone et une pile; on place le troisième en travers des deux autres. Si l'on parle devant cette disposition, la voix se reproduit dans le téléphone; mais si l'on agite le clou supérieur, le bruit devient intolérable. Si maintenant on remplace les trois clous par trois morceaux de mine de plomb carrés, pris dans un crayon ordinaire, en parlant devant ou en remuant le graphite supérieur, tout reste muet, tandis qu'en arrondissant les angles, les sons se font entendre. Les clous produisent un bruit plus fort. On arriverait, je pense, à un résultat considérable, en se servant d'un corps relativement lourd et placé dans une position d'équilibre facile à déranger.

Les phénomènes constatés dans un téléphone pour la réception de la voix sont à peu près inexplicables. A première vue, il semblerait que les courants développés au départ, en traversant

la bobine du récepteur, devraient modifier l'intensité de l'aimant, de façon à faire vibrer les plaques par attraction. Quelques savants admettent cette théorie, d'autres la repoussent par les raisons suivantes : d'abord, un courant aussi faible que le fluide induit circulant dans un téléphone, ne peut pas avoir assez de puissance pour faire vibrer mécaniquement une plaque très tendue. Ensuite, argument très frappant, le son se reproduit avec un diaphragme non métallique et même sans diaphragme. On prétend alors que l'effet provient des vibrations moléculaires déterminées dans le système électro-magnétique tout entier, et particulièrement sur le noyau de l'aimant enveloppé par l'hélice. Mais, disent les partisans de la première théorie, la plaque éprouve des vibrations qu'on a pu enregistrer. Les adversaires admettent le fait, tout en supposant que ce phénomène provient *peut-être* de l'action même de la magnétisation au sein du diaphragme et non de l'attraction, puisqu'en augmentant considérablement l'épaisseur de la plaque vibrante ou en la chargeant de caoutchouc, on entend toujours, quoique sourdement.

Il faut cependant, pour arriver au point exact de bon fonctionnement, un réglage dans la disposition de la plaque vibrante et de l'aimant; car le son se reproduit très mal quand ils se touchent et plus mal encore lorsqu'ils sont écartés.

Serait-il absurde d'admettre, dans les téléphones à pile, que l'augmentation de la source électrique développe, outre le mouvement moléculaire, une certaine attraction? Ne pourrait-on pas supposer aussi que la réunion de ces deux phénomènes, indépendamment d'autres moyens, rend les sons perceptibles à distance? Un jour, ayant fait des expériences téléphoniques sur un long fil télégraphique, le poste qui me prêtait ce conducteur rentra trop tôt dans le circuit, et je reçus des chocs extrêmement violents, qui produisaient dans le récepteur un bruit semblable à des coups de marteau et qu'on entendait à plusieurs mètres de distance, bien que la pile en action fût assez faible. Il peut paraître surprenant que des vibrations moléculaires seules aient fourni un pareil effet.

On a prétendu que la voix se percevait au moyen d'un téléphone sans diaphragme métallique. M'étant servi cependant d'un excellent instrument, je n'ai jamais rien entendu. C'est seulement en faisant l'épreuve des trois clous que, sans plaque vibrante, j'ai pu percevoir un léger bruit; avec une simple rondelle en carton, le bruit était plus fort.

5. Voici maintenant la disposition destinée à mettre les abonnés en communication. Au bureau central aboutissent tous les fils attachés à des commutateurs suisses. Ces instruments sont composés chacun de trente barres de cuivre perpendiculaires séparées par une planche de bois, de seize barres horizontales de même métal. Aux points d'intersection, existent des ouvertures pour relier les premières aux secondes au moyen d'une fiche. De plus, les barres horizontales sont munies à chaque extrémité de bornes qui ont pour but de faire communiquer les commutateurs entre eux, pour mettre en rapport, par exemple, un abonné du premier avec un abonné du dernier.

Supposons un poste de six directions, qui permettront de faire comprendre le jeu de l'appareil aussi bien que s'il en existait davantage (*fig.* 2). Les barres perpendiculaires possèdent dans le haut une solution de continuité bouchée, au repos, par des fiches. Quand un abonné, supposons le n° 1, presse sur le bouton de sonnerie de son appareil, le courant vient par le fil de ligne, remonte la barre perpendiculaire et gagne la partie n° 1 d'un indicateur L, dont il traverse une bobine, et va se perdre à la terre. Alors il se produit, par l'électro-aimant de cette bobine, un déclanchement laissant tomber, par la fente f, une tige de fer vulgairement appelée *lapin,* qui frappe sur une barre horizontale renfermée dans la boîte, établissant ainsi une communication entre le bouton P de la pile et le bouton s en rapport avec la sonnerie S. L'employé ainsi averti note le numéro du lapin qu'il relève, puis, retirant la fiche du n° 1 de la rangée a, l'introduit dans la rangée b. Alors la communication téléphonique est établie entre l'abonné et le bureau. L'employé sonne à son tour et,

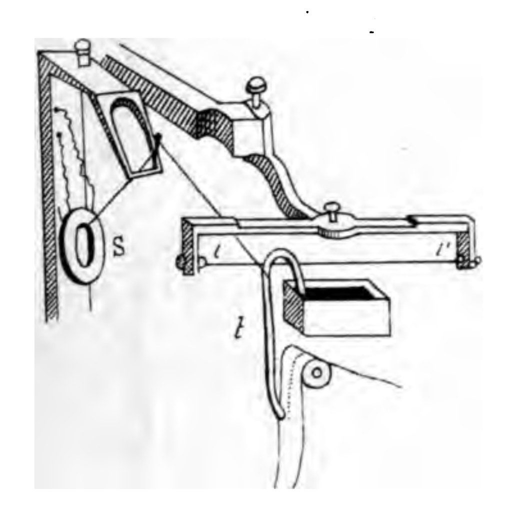
décrochant le téléphone, attend qu'on lui demande le numéro qu'on veut entretenir, supposons le n° 5. L'employé retire la fiche du n° 1, descend celle du n° 5 dans son ouverture de la rangée *b*, sonne et prévient l'abonné qu'il le met en rapport avec le n° 1. Pour arriver à ce but, il ne lui reste plus qu'à placer des fiches dans la rangée *d* sur 1 et 5, en ayant soin d'en introduire une autre dans une des encoches en *a*, pour former un léger contact, afin d'être en mesure de savoir si la conversation est terminée, par un appel de sonnerie. Le courant téléphonique ne peut se perdre à la terre, rencontrant une forte résistance présentée par la bobine de l'électro du lapin; tandis que la pile entière, employée pour la sonnerie, traverse L et donne le signal dans S.

On peut faire communiquer de cette façon autant d'abonnés deux par deux qu'il existe de barres horizontales.

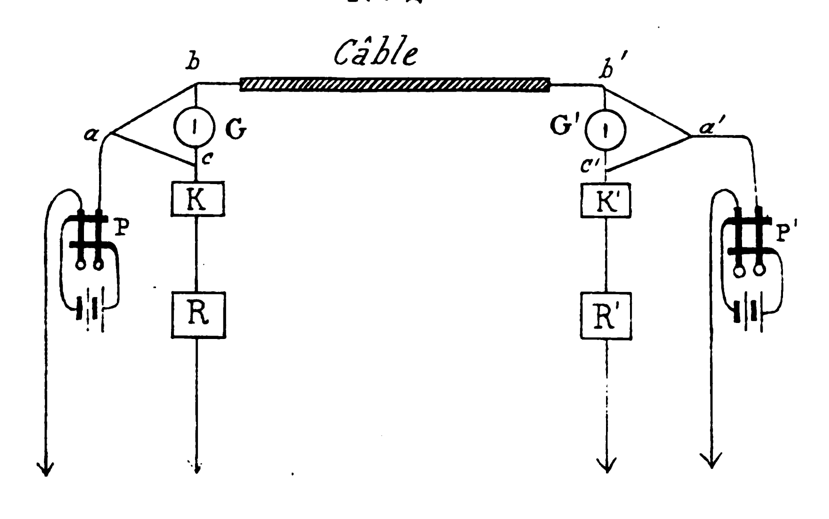
L'appareil est protégé par un double paratonnerre à pointes et à papier.

6. L'emploi du téléphone se généralise tous les jours. En Allemagne, il tend à remplacer le télégraphe sur de petits parcours. Il est évident que, dans un temps peu éloigné, ce système sera choisi en France pour les bureaux municipaux. Les bourgs, les villages, les habitations rurales se relieront aux centres importants, et, dans les grandes villes, chaque maison ne sera complète qu'en possédant, avec l'eau et le gaz, une installation téléphonique.

Nº 1



Nº 2



NOTICE

SUR LES

COMMUNICATIONS TÉLÉGRAPHIQUES SOUS-MARINES

PAR M. BONEL,

Directeur de l'Agence de la Société générale des Téléphones à Bordeaux.

Lorsque les câbles sous-marins furent immergés entre la France et l'Angleterre, les employés constatèrent avec surprise qu'un choc agitait le récepteur aussitôt qu'ils transmettaient. Ils l'appelèrent courant de retour, supposant qu'il était dû à l'excès de fluide qui, n'ayant pu s'écouler en entier à son arrivée, revenait dans l'appareil de départ pour se décharger. C'était tout simplement un courant induit. Ce phénomène n'avait pas encore franchi totalement les limites du domaine de la science, depuis sa découverte en 1831 par Faraday, et, dans la pratique, on était si peu avancé sur les effets de l'induction, qu'à l'immersion du premier câble transatlantique, on ne s'en inquiéta nullement, se contentant de décharger le conducteur au moyen d'une clé spéciale, le mettant au négatif, après avoir transmis le signal d'un Morse par le positif. Les télégraphistes, voyant leur travail incomplet et recevant imparfaitement, augmentèrent la source électrique sans se douter qu'ils agrandissaient les obstacles. On dut abandonner ce mode de transmission qui détériorait le câble. Il fut démontré plus tard que la condensation et l'induction prenaient, dans le câble, un accroissement en rapport avec la quantité d'électricité émise. Il fallut trouver des appareils doués d'une grande sensibilité, et, parmi les nombreux systèmes présentés, on adopta le miroir et le siphon disposés par sir William Thomson sur des données connues depuis longtemps,

surtout en ce qui concerne le miroir, dont l'idée première a été émise par un savant français.

Le transmetteur est le même pour les deux. Il se compose de deux lames de cuivre : celle de droite est attachée à la ligne, celle de gauche à la terre. Elles forment ressort et pressent, en se relevant, contre une barre transversale de même métal, cette dernière en rapport avec le pôle négatif. En appuyant successivement sur ces deux lames, on les amène sur un autre contact métallique communiquant au positif d'une pile de trois ou quatre éléments Leclanché.

Un commutateur de forme spéciale sert à mettre la ligne en rapport avec le transmetteur ou le récepteur et décharge automatiquement la ligne en tournant.

L'appareil à miroir est un galvanomètre d'une très grande puissance, renfermé dans une boîte en cuivre placée sur un support, dans lequel passent les fils soudés à l'hélice, qui permettent d'en introduire le tout ou la moitié dans le circuit. Par un fil de soie sans torsion, on suspend dans une rainure horizontale, située au milieu du galvanomètre, un petit barreau aimanté, sur lequel on fixe un miroir grand comme une pièce de vingt centimes; derrière est fixé, par un peu de gomme laque, un léger aimant. Ce dernier, avec le miroir, ne pèse pas un centigramme. Un gros aimant en fer à cheval surmonte la boîte et maintient au repos le miroir dans une position fixe.

A une distance d'environ 90 centimètres, on place une lampe garnie d'un tube horizontal. La lumière va frapper le miroir disposé de façon à refléter le rayon sur un écran situé devant l'employé. Au repos, le rayon demeure immobile sur l'écran. Mais, dès que le correspondant émet le courant positif, le miroir, sous l'impulsion du barreau aimanté, oscille à droite et forme sur l'écran, par l'augmentation de l'angle de déviation, un écart de deux ou trois centimètres. Pareil fait se reproduit à gauche quand c'est le courant négatif qui se trouve à la ligne.

L'écart de droite représente le trait du Morse, et l'écart de gauche le point, de façon à combiner son alphabet conventionnel.

L'appareil à siphon, très compliqué, possède deux parties distinctes : l'une, donnant le mouvement mécanique; l'autre, les signaux télégraphiques. Le premier se compose d'un moulin qui tourne sous l'influence des barres attirées par l'entremise d'une pile énorme appliquée à un électro-aimant. Le but de ce moteur, construit dans le genre de celui de M. Froment, est de communiquer la rotation à un volant, qui fait avancer la bande de papier destinée à recevoir les signaux et, en même temps, de fournir une série d'étincelles d'induction transmises par une tige métallique, au liquide contenu dans un encrier. La seconde partie (*fig.* 1), fort délicate, renferme un siphon *t* en verre, long de trois centimètres et gros comme l'aiguille d'une machine à coudre, qui plonge dans l'encrier précité. L'extrémité inférieure effleure la bande de papier. On fixe le siphon, au moyen d'un peu de gomme laque, sur un fil de platine *ll'*. De plus, un écheveau S de fil très fin, recouvert de soie, se tient en suspens au moyen d'un fil de cocon. Il peut être traversé par le courant de la ligne, et il est placé entre les deux pôles d'un électro très puissant, auquel une forte pile applique une aimantation continue.

Une fois le moulin en marche, la bande de papier avance régulièrement et les étincelles induites arrivent dans l'encrier, imprimant au liquide un mouvement vibratoire qui le chasse au travers du siphon qu'on a eu soin d'affleurer. L'encre, sortant en gouttelettes fines et rapprochées, trace au centre de la bande une ligne formée de petits points. Si le courant émis par la station correspondante est positif, S avance; s'il est négatif, il recule. Or le siphon qui lui est attaché se trouvant tendu de façon à suivre les mouvements en avant ou en arrière, produit sur la bande un écart en dessus ou en dessous de la ligne centrale, produisant des angles dont le supérieur représente le point et l'inférieur le trait de l'alphabet Morse.

La lecture des signaux est très difficile parce que les angles ne sont jamais nettement formés. En outre, à cause de sa fragilité, l'instrument se dérange souvent. Le siphon se casse à chaque instant, si bien qu'on est obligé d'avoir un miroir sous

la main pour le remplacer en cas d'accident, mais il offre l'immense avantage de conserver les signaux, tandis que ceux de l'autre appareil sont fugitifs et instantanés.

M. Cromwell Varley a imaginé une disposition tout à fait ingénieuse de condensateurs, d'une capacité d'environ vingt microfarads chacun. Il en intercale un dans le circuit, à chaque bout du câble. Le signal est simplement formé par l'influence du courant émis qui trouble la charge naturelle du conducteur. Si c'est le positif qu'on envoie, on charge le premier condensateur. Alors la quantité d'électricité contenue dans le câble, jusqu'alors à l'état de repos, lui présente son côté négatif, tandis que le positif s'accumule dans le second, agissant de même sur le reste de la ligne. Le courant qui se rend à la terre étant positif, fait dévier le miroir à droite. Les mêmes phénomènes se reproduisent en sens contraire si c'est le négatif qui se trouve au départ, et par conséquent, à l'arrivée, le miroir oscillera à gauche.

On évite par ce moyen la condensation et l'induction. Il existe encore quelques causes secondaires de troubles dans les câbles, telles que les courants telluriques ou sous-marins, les changements de température et même les ondulations que suit le câble, par suite du remous ou des marées. Les effets produits cependant sont de peu d'importance.

Depuis plusieurs années, on a appliqué aux câbles sous-marins le système dit *duplex* qui permet de transmettre deux dépêches à la fois, en sens contraire, sur le même fil. Le principe aurait été découvert par un fonctionnaire autrichien, M. Gintl, mais ce fait fut considéré comme une simple démonstration théorique. Les perfectionnements apportés par plusieurs savants ont permis non seulement de rendre cette découverte pratique en l'appliquant aux lignes aériennes, mais de permettre de vaincre les difficultés dues à l'induction et la condensation dans les câbles. Il a fallu, en outre, trouver le moyen de reproduire d'une manière factice, aussi exactement que possible, les ondulations électriques formées dans le conducteur, ainsi que les pertes éprouvées par l'enveloppe isolante.

Voici en peu de mots la description générale du système appliqué à la télégraphie sous-marine : soient deux stations (*fig.* 2) ayant chacune P et P′ transmetteurs, en communication avec une disposition pareille à celle du pont de Wheatstone, dont les points *b* et *b′* communiquent au câble, puis *c* et *c′* à une ligne factice aboutissant à la terre, à travers une série de condensateurs et de résistances R, d'une puissance absolument semblable à la capacité électrique et à la résistance du câble.

Le principe est fondé sur une balance égale entre le câble et les lignes factices de chaque côté, de façon que si P émet un signal, le fluide arrivant en *a* se partage dans le même sens et d'une façon assez parfaite entre *b* et *c* pour que le galvanomètre n'en soit pas affecté. Une moitié s'écoulera donc à la terre par *c*KR, l'autre par le câble. Arrivée en *b′*, cette fraction de courant passera dans G*c* et *a′*P′ pour aller à la terre, influençant l'aiguille du galvanomètre puisqu'il n'y a plus balance dans ce cas. Si les deux appareils transmettent à la fois, voici comment on explique la distribution des courants : représentons par x celui de P et y celui de P′; x arrivé en *a* se partagera en deux; par conséquent, $\frac{x}{2}$ ira sur le câble et $\frac{x}{2}$ sur la ligne factice KR; de même, en P′, nous aurons sur le câble $\frac{y}{2}$ et sur la ligne factice K′R′ $\frac{y}{2}$. La balance sera rompue, car nous trouverons en G, du côté de *b*, $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$ et de l'autre, en *c*, seulement $\frac{x}{2}$, de manière que G′ sera affecté par $\frac{y}{2}+\frac{x}{2}$ du côté du câble, tandis que la ligne factice prendra $\frac{y}{2}$. Or, comme la somme d'électricité qui affecte le galvanomètre du côté de *b* est contrariée par celle du côté de *c*; de même pour G′, en *b′* et *c′*, nous obtiendrons donc

$$\text{en G :}\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{x}{2}=\frac{y}{2};$$

$$\text{en G}' :\quad \frac{y}{2}+\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=\frac{x}{2}.$$

Par conséquent, les galvanomètres auront leur aiguille tournée dans le sens du fluide émis par les stations opposées ou, en d'autres termes, chacun des galvanomètres sera influencé par la différence entre les courants des deux piles et celui de l'une d'elles.

Les compagnies sous-marines font opérer toutes les semaines, par leurs agents, des expériences qui ont pour but d'éprouver la qualité du câble, c'est-à-dire de vérifier si la résistance du conducteur au passage du courant et la perte à travers l'enveloppe isolante n'ont pas augmenté.

La première s'opère au moyen du pont de Wheatstone, sur le câble dont l'extrémité opposée est à la terre. On applique alternativement le positif et le négatif, et on prend la moyenne des épreuves. Un bon conducteur ne doit pas avoir plus de onze ohms de résistance par mille anglais (environ 1,854 mètres).

Les épreuves de la résistance de l'enveloppe isolante sont plus compliquées. La formule donnée par les Compagnies est en général celle-ci :

$$x = \frac{\text{RBDL}}{d}.$$

x représente la résistance du diélectrique par mille marin anglais; R, un étalon de résistance d'un megohm; B, la proportion des éléments; D, la constante de la pile à travers R; L, la longueur du câble en milles; d, la déviation notée sur le galvanomètre, après avoir appliqué la pile au câble isolé à l'autre extrémité.

La première épreuve consiste dans la recherche de B. Il faut un galvanomètre astatique de Thomson, un manipulateur inverseur, un instrument nommé *trigger key,* un condensateur de la capacité d'un tiers de microfarad et, en cas de besoin, un *shunt*. Ce dernier appareil sert, comme on le sait, à diminuer la quantité de courant qui passe dans le miroir en intercalant dans le circuit, en dehors du galvanomètre, des résistances calculées de façon à ce que le *shunt* ait un dixième, un centième ou un millième de la résistance totale, tandis que le galvanomètre en aura 9 dixièmes, 99 centièmes ou 999 millièmes; par

conséquent, il ne passera dans son hélice qu'un dixième du courant total, un centième ou un millième. On appelle son pouvoir multiplicateur la quantité par laquelle il faut multiplier le degré lu sur la barre graduée, soit dix, cent ou mille. Il faut noter que, généralement, l'emploi de cet instrument peut offrir de graves inconvénients, parce qu'une erreur de lecture se trouve multipliée en même temps que le degré.

Voici la disposition des appareils dans la recherche de B : un côté du condensateur est à la terre, l'autre s'attache au *trigger key,* sorte de commutateur possédant une lame qui, en s'abaissant, met le condensateur en communication avec le transmetteur de la pile, mais qui, une fois libre, se redresse et frappe contre un contact menant à la terre, à travers le galvanomètre. On fait deux fois l'épreuve, d'abord avec un élément, puis avec une pile entière. On appuie pendant une minute sur le transmetteur (celui du miroir); le courant charge le condensateur. Après ce temps, on retire l'arrêt du ressort du *trigger key,* dont la lame quitte la communication avec la pile, et, en touchant le contact, permet à l'électricité amassée dans le condensateur de s'écouler à la terre. Il faut noter vivement le degré donné par la déviation du rayon lumineux, puis, les deux résultats obtenus, on divise la déviation obtenue avec la pile entière par celle fournie au moyen de l'élément, ce qui donne la valeur de B. Dans la seconde mesure, on emploie le *shunt,* avec un pouvoir de cent, car la pile entière ferait sauter le rayon lumineux en dehors de l'échelle graduée.

Pour la constante D de la pile, on établit un circuit dans lequel s'intercalent l'élément qui a précédemment servi, puis le galvanomètre, une résistance de dix mille ohms et enfin le *shunt* muni d'un pouvoir de cent. On note la déviation, qui représente la constante à travers un megohm. Le pouvoir multiplicateur du *shunt* s'applique, dans ce cas, à la résistance employée dont la force est insuffisante pour fournir l'étalon demandé.

Le diélectrique d'un bon câble doit offrir un minimum de cinq cents megohms par mille.

Telles sont les expériences pratiques opérées dans les stations des Compagnies anglaises. Leur résultat se transmet au bureau central, qui les enregistre de façon à vérifier s'il ne survient pas de changement notable et, en cas d'accident, à déterminer l'endroit précis des fautes.

Lorsque le conducteur est brisé dans l'enveloppe isolante sans communiquer au dehors, on s'en aperçoit par l'absence complète de déviation. On emploie la méthode précédente, en négligeant bien entendu L, qui, dans ce cas, devient x à déterminer. Supposons que, sur une ligne de 100 kilomètres, la résistance dans les épreuves hebdomadaires soit R′ par kilomètre et r celle du tronçon entier, nous aurons :

$$x = \frac{R'}{r},$$

ou, en d'autres termes, si R′ est de 1200 megohms par kilomètre sur le câble en bon état et que r donne 40 megohms, la distance demandée sera de 30 kilomètres.

Si le câble est complètement rompu, le courant émis est plus fort que d'habitude et on ne reçoit rien de la station correspondante. Dans ce cas, il suffit de mesurer simplement le tronçon au moyen du pont, ce qui donnera la valeur de r; alors on aura :

$$x = \frac{r}{R'}.$$

Si la résistance R′ d'un kilomètre du câble en bon état est de 6 ohms et celle du tronçon de 300, la distance de la faute sera de 50 kilomètres.

Le câble n'ayant qu'une légère fissure, le courant émis est comme d'habitude, et souvent même la réception s'obtient par le miroir. On peut, en outre, aveugler la perte par l'envoi d'un très fort courant positif, qui forme une couche chimique sur le conducteur. Pour déterminer le lieu de la faute, il est préférable, dans ce cas, d'employer la méthode due à M. Blavier.

On doit tenir compte dans ces épreuves de la résistance propre du défaut, qui le fait paraître plus éloigné qu'il ne l'est en réalité.

Il faut pratiquer les opérations des deux côtés; de cette façon, on peut déduire la fausse longueur due à la résistance de la faute en retirant la longueur totale de la ligne du résultat obtenu.

M. Latimer Clark indique la précaution suivante pour déterminer la résistance de la faute quand elle est variable. On applique d'abord le positif d'une pile de 100 éléments qui, comme nous l'avons vu, revêt le point du défaut d'un sel de cuivre insoluble; la résistance augmente considérablement. Ensuite on met le négatif à la ligne; il a pour but de dissoudre le sel. Au moment où le cuivre est net, la résistance est à son minimum et donne l'approximation la plus exacte par rapport à la résistance réelle; mais il faut opérer les mesures rapidement, parce que l'envoi prolongé du négatif fait monter et baisser capricieusement la résistance à cause de l'hydrogène qui s'y forme.

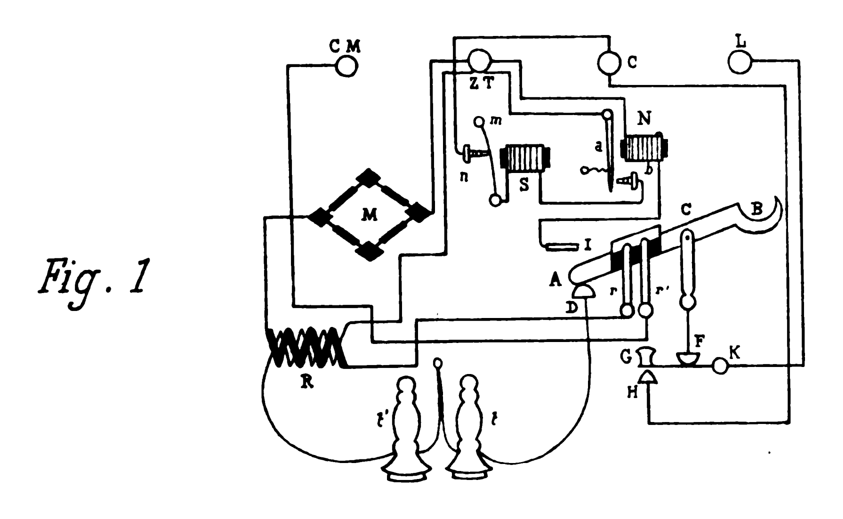

C M
Z T
C
L
N
m
a
b
n
S
M
C
B
I
A
D
r
r'
F
K
G
H
R
t'
t

Fig. 1

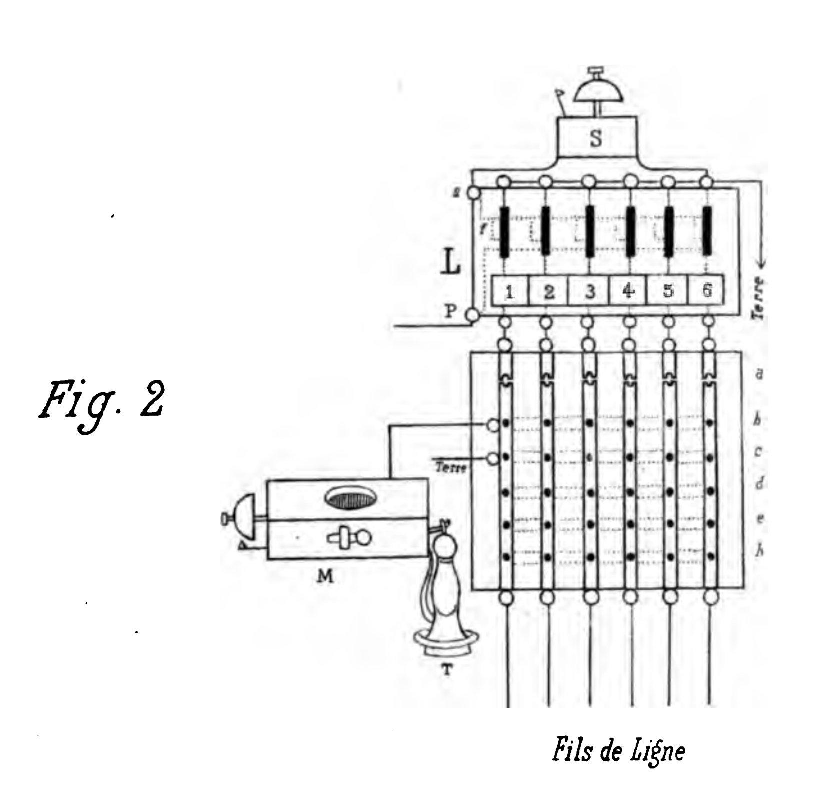

S
L
P
Terre
1
2
3
4
5
6
a
b
c
d
e
h
Terre
M
T
Fils de Ligne

Fig. 2

MODIFICATION

AUX

MACHINES A FORCE CENTRIFUGE

PAR M. O. DE LACOLONGE

A l'époque où j'étudiais la théorie du ventilateur à force centrifuge, j'avais songé à diverses modifications et emplois dont ces appareils me semblaient susceptibles.

N'ayant pas à cette époque les loisirs, n'ayant plus eu depuis les moyens de faire les expériences nécessaires, je rédigeai une notice que je donnai, je crois, à une des publications périodiques qui traitent de ces questions, notice dont, malgré mes recherches, je ne puis plus trouver trace. Mon but était de mettre ces idées dans le domaine public pour qu'un inventeur de seconde main ne pût les faire breveter à son profit. Ce but serait atteint si la Société voulait bien faire imprimer les lignes suivantes dans ses procès-verbaux.

Les ventilateurs à force centrifuge, faisant plusieurs centaines de tours par minute, échauffent facilement leurs tourillons, ce qui exige d'excellents paliers-graisseurs. Supposons l'arbre foré des deux bouts jusque vers l'aplomb du milieu des ailettes, où on laisserait une petite partie pleine pour empêcher les deux tubes de se rejoindre. Perçons près de cette sorte de bouchon, et de chaque côté, un trou diamétral. Dès que la machine fonctionnera, l'air sera appelé. Il se formera, dans chaque moitié de l'arbre, un courant qui rafraîchira les tourillons et viendra ensuite rejoindre le fluide aspiré par les œils.

Il existe dans l'industrie des roues à réaction ou turbines à vapeur. Elles servent notamment à conduire les scies circulaires

qui tranchent de longueur les rails encore incandescents. Ces machines consomment une quantité de vapeur très grande par rapport au travail produit, et marchent à une extrême vitesse, à cause de la tension de la vapeur portée à plusieurs atmosphères. Dans ce cas spécial, la rapidité du mouvement est avantageuse et la dépense de vapeur assez insignifiante, parce que de pareilles scies ne fonctionnent que peu de temps chaque fois et à d'assez longs intervalles, et aussi parce que ce travail ne se fait que dans de grandes usines où la production de vapeur est assez considérable pour que ce surcroît momentané soit relativement insensible. Mais il n'en est pas ainsi dans des établissements moins importants qui peuvent avoir intérêt à posséder des roues à réaction à vapeur, moins rapides et plus économiques.

Si le fluide moteur n'était introduit que par intermittences régulières, il agirait en partie par sa détente; il suffirait d'un volant pour régulariser le mouvement; il y aurait moins de dépense de vapeur et moins de vitesse de rotation. Les choses se passeraient comme pour la toupie que les enfants font marcher à coups de fouet. On pourrait introduire la vapeur plusieurs fois par tour ou une fois pour plusieurs tours, l'expérience fixerait sur le meilleur mode à adopter. La distribution se ferait ou par un tourillon, comme dans les machines oscillantes, ou par des tubes fenestrés concentriques marchant soit à la même vitesse, soit à des vitesses différentes.

Cette idée m'a tout naturellement conduit à une autre conception. Il est utile pour certaines fabrications d'avoir un appareil simple fournissant de l'air chaud. Imaginons un ventilateur à enveloppe, muni de son portevent; montons sur le même arbre, et contiguë à ce ventilateur, une roue à réaction à vapeur. La seconde conduira le premier sans aucun organe intermédiaire.

Emprisonnons la roue dans une enveloppe fermée, sauf sur un point où existera un orifice de dimensions convenables pour livrer passage à la vapeur d'échappement. Adaptons à cet orifice un tuyau analogue au portevent, mais l'enveloppant, de manière à former une conduite tubulaire concentrique; le courant d'air

froid se trouvera séparé du courant de vapeur par une simple paroi métallique.

L'air se chauffera, la vapeur se refroidira. La buse du ventilateur fournira de l'air chaud; l'extrémité du conduit de vapeur débitera ou de la vapeur à faible tension ou de l'eau condensée, peut-être l'une et l'autre.

La difficulté est de proportionner :

1° La vapeur motrice et sa pression au volume d'air à fournir sous une pression déterminée à l'avance pour l'usage à en faire.

2° Les surfaces réfrigérantes à la quantité de vapeur à condenser ou à ramener à une température telle que la perte de calorique soit aussi petite que possible, l'air fourni par le ventilateur étant le seul corps réfrigérant employé.

Tous ces desiderata demanderaient une étude très approfondie, basée sur des expériences directes que, je le répète, il m'a été impossible d'opérer.

SUR UNE CRITIQUE ANCIENNE

D'UNE

DÉMONSTRATION D'ARCHIMÈDE

PAR M. PAUL TANNERY

Au livre IV de sa *Collection mathématique*, § 36 ([1]), après avoir fait la distinction classique chez les anciens, des trois genres de problèmes :

1° Les problèmes *plans*, ceux qui peuvent se résoudre par des tracés de droites et de cercles ;

2° Les problèmes *solides*, ceux qui demandent l'emploi de sections coniques ;

3° Les problèmes *grammiques*, ceux qui réclament l'intervention de lignes courbes plus complexes ;

Pappus s'exprime comme suit :

« Il semble que ce ne soit pas une petite faute pour un » géomètre que de résoudre un problème *plan* par les coniques ou » les *grammiques*, ou en général de tirer la solution d'un genre » auquel n'appartienne pas la question traitée, comme l'ont fait » Apollonius pour le problème sur la parabole au cinquième livre » des *Coniques*, et Archimède, dans son livre *sur la spirale*, alors » qu'il admet une *direction dans le cercle, qui est un problème* » *solide* ([2]). Car on peut, sans employer aucune proposition *solide*,

---

([1]) Je me sers de l'excellente édition gréco-latine de Pappus, par M. Hultsch, en trois volumes (Berlin, 1875-1877-1878). — Voir vol. I, p. 270-273.

([2]) C'est ainsi qu'il faut entendre la leçon des manuscrits, στερεὰ νεῦσις ἐπὶ κύκλον, dont j'expliquerai plus loin la signification précise. M. Hultsch a corrigé à tort στερεοῦ, en traduisant « l'inclinaison du solide ». Le pluriel, donné par un seul manuscrit, serait d'ailleurs plus exact, car on verra qu'Archimède admet deux telles *directions*, qui, à la vérité, peuvent se ramener à deux cas différents d'un même problème.

» démontrer le théorème qu'il expose, à savoir que la circonférence » du cercle correspondant à la première révolution, est égale à la » perpendiculaire élevée à l'origine sur la droite, et limitée à sa » rencontre avec la tangente à la spirale. »

Il est inutile d'expliquer, plus clairement que ne l'a fait Pappus, le sens général de la critique adressée aux deux grands géomètres de l'antiquité, mais il serait intéressant d'en contrôler la justesse et d'en examiner la portée.

Malheureusement, en ce qui concerne du moins Apollonius, la détermination du problème visé par cette critique ne laisse pas que de présenter de graves difficultés, M. Hultsch y consacre la note suivante (p. 273) :

« Le cinquième livre des *Coniques* d'Apollonius, tel qu'il a été » traduit en latin par Halley sur le texte arabe, renferme des » théorèmes sur les maxima et les minima; un grand nombre se » rapportent à la parabole, mais il n'y a aucun problème auquel on » puisse rattacher ce passage de Pappus. Aussi on peut être tenté » de lire πρώτῳ au lieu de πέμπτῳ et de croire que la critique » vise la proposition 52 du premier livre, c'est-à-dire le problème » de la construction de la parabole dans un plan. Mais c'est une » tout autre question que de savoir si cette critique est fondée. »

Pour Archimède, le savant éditeur (p. 299, note 1) constate qu'il s'agit de la proposition 18 de son traité *De helicibus;* mais il ne trouve point que le contexte de la démonstration justifie la critique formulée; il émet donc deux hypothèses; ou cette critique porterait absolument à faux, ou elle viserait une édition d'Archimède différente de celles que nous possédons. « Il y a » enfin, ajoute-t-il, une troisième pensée qui peut venir à l'esprit; » il a pu se faire que l'auteur en question jugeât que la démons- » tration *plane* d'Archimède cachait un raisonnement de » problèmes *solides,* mais c'est là une question qui ne peut être » élucidée ici en quelques mots. »

Je me propose de montrer qu'en réalité la critique adressée à Archimède est parfaitement justifiée par la méthode de sa démonstration, telle qu'elle nous a été conservée, et que cette

critique aboutit, de fait, à proposer une démonstration notablement plus simple. Ce résultat crée évidemment un préjugé favorable pour l'autre critique, celle qui vise Apollonius. A la vérité, Pappus ne revient pas sur son sujet, ainsi qu'il le fait pour la seconde, et on pourrait conjecturer de ce silence qu'il la considérait comme moins importante. D'autre part, le texte grec du cinquième livre des *Coniques* nous faisant défaut, et la fidélité de la version arabe ne pouvant être suffisamment contrôlée, nous manquons d'une base solide pour les recherches tendant à déterminer le problème visé. Je me bornerai donc sur ce point à quelques remarques que je vais présenter tout d'abord, sans prétendre, ici, épuiser la question.

II

Il me paraît difficile d'admettre l'hypothèse mise en avant par M. Hultsch en ce qui concerne Apollonius. Dans la proposition à laquelle il fait allusion, 52 du livre I des *Coniques*, le géomètre de Perge, se donnant le plan d'une parabole, un diamètre avec son extrémité, la direction conjuguée et le paramètre correspondant, détermine la courbe par la construction d'un cône dont elle est l'intersection avec le plan donné. S'il y a là intervention d'une surface de solide, il n'y a aucun recours à un tracé de coniques, c'est-à-dire à ce qui définit, d'après Pappus, les problèmes *solides*. Il est clair au contraire que l'intersection de chaque génératrice d'un cône avec un plan, rentrait, pour les anciens, dans les problèmes *plans*.

D'ailleurs, si la supposition de M. Hultsch était vraie, la critique ne se serait pas bornée au problème sur la parabole, mais se serait étendue aux constructions tout à fait analogues de l'hyperbole et de l'ellipse (prop. 53 et 54).

D'autre part, l'examen du cinquième livre des *Coniques* permet d'y reconnaître, déguisés sous la forme de théorèmes, au moins deux problèmes relatifs à la parabole, et auxquels peut s'appliquer, avec plus ou moins de justesse, la critique mentionnée par Pappus. Ce sont :

1° Prop. 8. Mener une normale à la parabole par un point pris sur l'axe. — Apollonius construit la sous-normale et élève à son extrémité la perpendiculaire à l'axe jusqu'à la rencontre avec la parabole. Pour bien montrer que le problème est *plan*, il eût été nécessaire de construire l'ordonnée correspondant à l'abscisse déterminée. Mais c'est là une opération tellement fondamentale dans les *Coniques*, que la critique serait d'un rigorisme ridicule. D'un autre côté, on ne voit pas non plus pourquoi elle ne viserait pas les problèmes analogues pour l'hyperbole et l'ellipse. (Prop. 9 et 10).

2° Prop. 62. Mener une normale à la parabole par un point intérieur en dehors de l'axe. — Le problème, du troisième degré dans le cas général, par conséquent *solide*, est résolu par l'intersection d'une hyperbole et de la parabole donnée. Mais on sait que si le point est donné sur l'enveloppe des normales, le problème se ramène au second degré, devient *plan*, et Apollonius lui-même, dans la proposition 51, après avoir donné en fait l'équation de cette enveloppe, donne également la construction *plane* de la normale à la parabole, tangente à l'enveloppe en un point donné de celle-ci. Ici, il n'y a plus d'analogie avec l'ellipse et l'hyperbole, et un critique très rigoureux pouvait, spécialement pour la parabole, reprocher à Apollonius de n'avoir pas reproduit, pour la prop. 62, la distinction résultant de la prop. 51. Mais ce reproche n'aurait concerné qu'un léger défaut de rédaction, absolument insignifiant quant au fond.

Cependant l'œuvre d'Apollonius présente une véritable lacune; la construction *plane* de la seconde normale passant par un point considéré sur l'enveloppe n'est pas donnée. Était-ce cette lacune que signalait la critique? Elle témoignerait alors d'un progrès important accompli, après Apollonius, dans une théorie où l'on ne sache pourtant pas qu'aucun ancien l'ait jamais dépassé. C'est, semble-t-il, la seule hypothèse qui puisse attribuer à cette critique une portée sérieuse; mais malheureusement cette hypothèse demanderait une confirmation qu'il paraît bien difficile de lui trouver.

III

Je reviens au principal objet de mes recherches, la critique touchant la proposition 18 du traité *Des spirales* d'Archimède.

J'ai déjà dit que Pappus était revenu sur ce sujet. C'est à la fin du même livre. (IV, 52, 53, 54).

« 52. Je t'ai rédigé l'analyse de la *direction* admise par Archimède » dans son livre *Des spirales,* pour que tu ne sois pas embarrassé » en parcourant ce livre (1). »

Suit la démonstration du théorème :

Étant donnés un point A et une droite BC, si on joint le point A à un point variable D de la droite BC, et qu'on élève à celle-ci en D une perpendiculaire DZ dont la longueur soit dans un rapport donné avec celle de AD, le lieu du point Z est une hyperbole.

Remarquons que par hyperbole, les anciens n'entendaient que l'une des branches de la section conique; il est clair que le théorème suppose la détermination du côté de la droite BC où l'on mène la perpendiculaire; autrement le lieu complet se compose évidemment, pour parler comme Apollonius, de deux *hyperboles opposées,* qui sont symétriques par rapport à la droite BC.

53. Pappus continue par la démonstration d'un second théorème :

Soit une droite BC, donnée de grandeur et de position, si d'un

---

(1) Vol. I, p. 298, l. 3. Dans l'appendice (vol. III, p. 1230), M. Hultsch rapporte une correction de sa traduction par Eberhardt, lequel entend par « ce livre » celui de Pappus, et non celui d'Archimède. Le correcteur s'appuie sur un passage du livre V de la *Collection Mathématique* (vol. I, p. 314, l. 2), où Pappus donne une démonstration du premier théorème de la *Mesure du Cercle* d'Archimède, pour éviter à son lecteur d'avoir à recourir aux ouvrages du géomètre de Syracuse. Mais ce motif n'est nullement convaincant, car les divers livres de Pappus sont dédiés à différentes personnes, et l'on ne peut, dans le rapprochement fait, invoquer aucune analogie véritable.

Je dois faire remarquer que dans ce qui suit, je ne me suis astreint ni à conserver ni à transcrire les lettres grecques des figures; celles que j'ai choisies l'ont été en vue de faciliter la lecture de cette étude pour les rapprochements à faire d'une figure à l'autre.

point D de cette droite on élève une perpendiculaire DZ, telle que $\frac{BD \times DC}{DZ}$ soit donné, le lieu du point Z est une parabole.

La démonstration suppose que le point D tombe entre B et C. Il est facile de voir que le lieu complet, si D peut varier sur toute l'étendue de la droite, se compose de deux paraboles symétriques par rapport à celle-ci et passant par les points B et C. Si le sens dans lequel on mène la perpendiculaire est déterminé, le lieu ne comprend que les parties de ces deux paraboles qui sont du côté choisi de la droite donnée.

54. Après ces deux propositions préliminaires, Pappus arrive au problème de la *direction*, dont voici l'énoncé.

« Étant donnés un cercle ABC, une sécante BC et un point A » sur la circonférence du cercle, inscrire entre la droite BC et » l'arc BEC une droite de longueur donnée et *dirigée* vers le » point A ([4]) » (c'est-à-dire dont le prolongement passe par A).

Ce problème est élégamment ramené à l'intersection des deux lieux dont la construction vient d'être donnée.

Soit, à cet effet, ADE une droite satisfaisant aux conditions du problème, telle par conséquent que sa longueur DE, interceptée entre la droite et le cercle, soit donnée. En D j'élève à BC une perpendiculaire DZ égale à AD. D'après le premier théorème préliminaire, Z sera sur une hyperbole; mais d'après le second, il sera sur une parabole, puisque $\frac{BD \times DC}{DZ} = \frac{BD \times DC}{AD} = DE$ est donné.

Le livre IV se termine enfin comme suit :

« C'est de ce problème que se sert Archimède pour démontrer » que la circonférence du cercle est égale à une droite. Aussi » quelques auteurs l'accusent-ils d'avoir employé à tort un » problème solide..... Ils font voir que l'on peut démontrer par » les problèmes *plans*, l'égalité de la droite et de la circonférence

---

([4]) Vol. I, p. 302, l. 3; νεύουσαν πρὸς τὸ A. Pour tout ce paragraphe, on consultera l'appendice (vol. III, p. 1231), où se trouve, effectuée suivant les indications de M. Richard Baltzer, la restitution du texte corrompu.

» de cercle [1], en se servant des théorèmes que nous avons » donnés sur la spirale. »

J'ai ici deux remarques à faire.

Le problème traité par Pappus ne comporte, s'il est possible, que deux solutions; l'intersection des lieux complets, qu'on peut d'ailleurs réduire à celle d'une branche d'hyperbole avec deux paraboles symétriques, ou d'une seule parabole avec les deux branches d'une hyperbole, fournit en outre deux solutions qui correspondent à l'inscription d'une droite de la longueur donnée entre les prolongements de la corde BC et l'arc BAC, de façon que le prolongement de cette droite inscrite ou bien elle-même passe par le point A. C'est un second problème de *direction*, ou si l'on veut un second cas du même problème, cas que néglige Pappus; on verra cependant que ce second cas figure, au même titre que le premier, dans ce qu'admet Archimède pour démontrer sa proposition 18 du livre *Des spirales*.

En second lieu, l'*analyse* de Pappus n'aborde en aucune façon la discussion des conditions sous lesquelles le problème est possible; c'est pourtant cette seule question, d'ailleurs bien facile à résoudre directement, qui intéresse la démonstration d'Archimède. La solution du problème de la *direction* n'apporte en fait aucune clarté dans cette démonstration, et rien n'indique que le géomètre de Syracuse ait jamais cherché à résoudre ce problème, à l'occasion de son théorème. Il lui suffisait, comme on le verra, de montrer que la solution existait pour certaines conditions données.

Il ne me semble donc y avoir aucun motif sérieux pour attribuer à Archimède, avec M. Richard Baltzer, l'origine des

---

(1) Dans l'index (vol. III, p. 15), M. Hultsch rapporte par erreur cette proposition à la *Mesure du Cercle* d'Archimède, il s'agit toujours évidemment de la proposition 18 du traité *Des spirales*.

Les théorèmes auxquels se réfère Pappus dans ce passage sont ceux qu'il a donnés dans ce même livre IV, § 21-25, sur la spirale; on ne peut d'ailleurs s'y servir pour la question qui nous occupe, que de ce qui a été directement emprunté à Archimède. Je remarque enfin, que, malgré la note de M. Hultsch, la spirale employée par Pappus au § 34, p. 262, est en fait absolument identique à celle d'Archimède, de même que celle du § 46, p. 286.

dernières propositions du livre IV de Pappus. Je ne pense pas qu'elle puisse davantage être rapportée à l'auteur de la critique mentionnée par Pappus; l'*analyse* offrirait alors, comme on l'a vu, des lacunes peu excusables.

Le problème général des *directions*, que Pappus énonce au livre VII ([1]) : « Inscrire entre deux lignes données de position, » une droite de longueur donnée, dont le prolongement passe par » un point donné, » — et dont un cas particulier se présente dès le plus ancien fragment de géométrie grecque, pour la troisième quadrature de lunule d'Hippocrate, était au reste envisagé pour lui-même. Pappus nous apprend qu'Apollonius avait consacré un traité spécial de deux livres *(Des directions)* à l'étude des cas où ce problème est plan. Cela doit faire supposer que dès cette époque, et sans doute déjà même avant Archimède, des cas *solides* avaient été abordés. Rien ne me paraît donc empêcher d'admettre que l'*analyse* donnée par Pappus ait été empruntée, par exemple, aux *Lieux solides* d'Aristée.

IV

Il reste à examiner la proposition 18 du livre *Des spirales*.

Soit (*fig.* 1) OMA une spire complète, OC la perpendiculaire élevée à l'origine O sur l'axe OA, AC la tangente à la spirale en A; il s'agit de prouver que la droite OC est égale en longueur à la circonférence de rayon OA.

Voici l'essence de la démonstration d'Archimède :

Il a été établi (prop. 16 et 17) que l'angle OAC formé par l'axe et la tangente, et comprenant la dernière portion de spirale décrite jusqu'au point de contact, est aigu. Soit donc AB la corde interceptée au-dessus de l'axe sur la tangente AC par le cercle de centre O et de rayon OA. Si nous désignons, suivant l'usage moderne, par $\text{tg.}\,\frac{\text{AOB}}{2}$, le rapport de la moitié de AB à la per-

([1]) Vol. III, p. 670; comp. p. 636.

pendiculaire abaissée sur cette corde du point O, on a évidemment :

$$\text{tg.}\frac{AOB}{2} = \frac{OA}{OC}.$$

Suivant son habitude, Archimède procède par l'absurde. Si $OC < \text{circ.} OA$, on peut prendre OC_1 tel que $OC < OC_1 < \text{circ.} OA$; si au contraire $OC > \text{circ.} OA$, on peut prendre OC_2 tel que $OC > OC_2 > \text{circ.} OA$.

Comme dès lors :

$$OC_1 > OC > OC_2,$$

on a évidemment :

$$\frac{OA}{OC_1} < \text{tg.}\frac{AOB}{2} < \frac{OA}{OC_2}.$$

Archimède établit ensuite que, sous ces conditions, on peut mener par le centre O (comp. *fig.* 2) :

Au-dessus de OA, une droite rencontrant la spirale en M, sa tangente en E, la circonférence en D, et au point F la tangente en A à la circonférence, et telle que

$$\frac{ED}{AF} = \frac{OA}{OC_1}; \tag{1}$$

Au-dessous de OA, une droite rencontrant la circonférence en D', la spirale en M', sa tangente en E', et telle que

$$\frac{E'D'}{AD'} = \frac{OA}{OC_2}. \tag{2}$$

Si l'on admet ces deux positions, la démonstration s'achève facilement.

Comme $AF > \text{arc } AD$ et $AD' < \text{arc } AD'$, on a :

$$\frac{ED}{OA} > \frac{\text{arc } AD}{\text{circ. } OA} \quad \text{et} \quad \frac{E'D'}{OA} < \frac{\text{arc } AD'}{\text{circ. } OA}.$$

D'ailleurs, d'après la propriété de la spirale :

$$\frac{\text{arc } AD}{\text{circ } OA} = \frac{DM}{OA} \quad \text{et} \quad \frac{\text{arc } AD'}{\text{circ. } OA} = \frac{D'M'}{OA},$$

d'où l'on conclut

$$ED > DM \quad \text{et} \quad E'D' < D'M',$$

ce qui est absurde.

Le nœud de la démonstration se trouve évidemment dans les élégantes positions (1) et (2). Pour rencontrer la preuve de leur possibilité, il faut remonter à deux lemmes qui constituent les propositions 8 et 7 du livre *Des spirales*.

Soit à prouver (*fig.* 2) en premier lieu, que dans un cercle de centre O, où est inscrite une corde AB, si $m < \text{tg.}\ \frac{AOB}{2}$, on peut mener par le centre, coupant cette corde, la circonférence et la tangente en A, une droite OEDF telle que

$$\frac{ED}{AF} = m,$$

ce qui justifiera la position (1).

Archimède mène par le centre O, OG parallèle à AB, jusqu'à sa rencontre en G avec le prolongement de la tangente AF. On a

$$\text{tg.}\ \frac{AOB}{2} = \frac{OA}{AG}.$$

Si l'on prend sur la tangente AF une longueur $AH = \frac{OA}{m}$, il est clair que $AH > AG$. Décrivons la circonférence passant par les trois points G, O, H, et prolongeons OA jusqu'à sa rencontre en I avec cette circonférence.

Archimède *admet* ici qu'on peut inscrire du côté IH, entre la circonférence GIH et la droite GH, une droite égale à AI et *dirigée* vers le point O, situé sur la circonférence. C'est précisément là le problème *solide* traité par Pappus.

Cette droite satisfera à la condition énoncée. Soit en effet la droite OEDFK, telle que $FK = AI$, on a

$$ED = OA - OE,$$

$$OA = m\,AH, \quad \text{par hypothèse,}$$

$$OE = \frac{AG \times OF}{FG}, \quad \text{à cause du parallélisme de AE et de GO,}$$

Comme d'ailleurs $\frac{OF}{FG} = \frac{FH}{FK} = \frac{FH}{AI}$ et que $\frac{AG}{AI} = \frac{OA}{AH} = m$,

$$OE = mFH,$$

d'où

$$ED = m(AH - FH) = mAF,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Soit en second lieu à prouver que, si $n > \text{tg.}\frac{AOB}{2}$, on peut mener par le centre O, au-dessous de OA, une droite OD'E', coupant la circonférence en D', et en E' le prolongement de la corde BA, en sorte que

$$\frac{E'D'}{AD'} = n,$$

ce qui justifiera la position (2).

Archimède *admet* qu'on peut inscrire entre la droite OG et la circonférence LD' *dirigée* vers A et de longueur égale à $\frac{OA}{n}$; c'est le second cas, omis par Pappus, du problème *solide* qu'il a traité.

Comme $\frac{OA}{n} < AG$, d'après l'hypothèse, le point L devra tomber entre G et la circonférence. D'ailleurs dans les triangles semblables OD'L, E'D'A :

$$\frac{E'D'}{AD'} = \frac{OD'}{D'L} = \frac{OA}{LD'} = n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On voit qu'Archimède ne se préoccupe nullement du moyen d'effectuer les constructions qu'il indique; pour établir leur possibilité, il fait appel simplement à l'intuition et au principe de continuité.

Si, dans un cas, on fait varier le point F de A à H, la longueur du segment FK, d'abord égal à AI, augmente d'abord, puisque le centre du cercle est situé au-dessus de cette dernière droite, puis elle diminue continûment jusqu'à s'annuler; il y a donc une position pour laquelle elle redevient égale à AI.

De même, dans le second cas, si on fait varier le point L de G à la circonférence, la longueur du segment D'L diminue continûment jusqu'à s'annuler; il y aura donc une position pour laquelle elle prendra une valeur déterminée quelconque plus petite que AG.

La démonstration d'Archimède est, en fait, absolument valable; mais il ne faut pas oublier que les anciens bannissaient rigoureusement des Éléments les applications du principe de continuité, et nous admettons, même aujourd'hui, qu'il est préférable de n'y recourir qu'en cas de nécessité.

La critique mentionnée par Pappus, exacte quant au fait, est donc justifiée dans son principe, si toutefois il est possible de démontrer la proposition 18 du livre *Des spirales* par les questions *planes*, comme disaient les anciens, et sans faire appel au principe de continuité.

La question doit se poser comme suit : OC (*fig.* 1) étant pris égale à la circonférence de rayon OA, peut-on démontrer par les procédés élémentaires que AC est tangente en A à la spirale?

Il faut, à cet effet, établir que d'après la propriété de cette courbe, ses points immédiatement voisins de A, soit au-dessus, soit au-dessous, sont, par rapport à O, en deçà de la droite AC, que l'on a, par exemple,

$$OM < OE \qquad \text{et} \qquad OM' < OE'.$$

Or, comme la longueur d'un arc de cercle entre comme élément dans l'expression du rayon vecteur de la spirale, pour que la comparaison soit possible, il est indispensable d'admettre comme lemme que l'arc est compris entre son sinus et sa tangente; c'est au reste ce qu'a fait Archimède dans sa démonstration, sans, à cet égard, encourir aucune critique.

Ce lemme admis, la démonstration peut se faire très simplement (*fig.* 2).

Menons par D une parallèle à OA, laquelle rencontre en N la droite AB, et en P la tangente à la circonférence au point A. Dans le triangle DNE, l'angle en N est aigu et l'angle en E obtus,

donc

$$ED < ND < NP.$$

Or, $ED = OA - OE$, et l'angle DNE étant égal à l'angle BAO,

$$\frac{AP}{NP} = \frac{\text{circ. } OA}{OA};$$

enfin

$$AP < \text{arc } AD.$$

Donc

$$OE > OA - OA\,\frac{\text{arc } AD}{\text{circ. } OA} = OM.$$

De même, pour la seconde partie de la démonstration, par F', où le rayon vecteur OM' rencontre la tangente au cercle en A, menons, parallèle à OA, F'N' jusqu'à la rencontre du prolongement de la droite BA. Dans le triangle obtusangle N'F'E'

$$N'F' < E'F' < E'D'.$$

Mais

$$E'D' = OE' - OA,$$

$$\frac{AF'}{N'F'} = \frac{\text{circ. } OA}{OA},$$

$$AF' > \text{arc } AD'.$$

Donc

$$OE' > OA + OA\,\frac{\text{arc } AD'}{\text{circ. } OA} = OM'.$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il est incontestable que cette démonstration est plus simple que celle d'Archimède; elle me paraît suffire à justifier la critique rapportée par Pappus, critique qui d'ailleurs ne peut atteindre la gloire de l'inventeur de la théorie de la spirale.

Sur une critique ancienne d'une démonstration d'ARCHIMÈDE

Par PAUL TANNERY

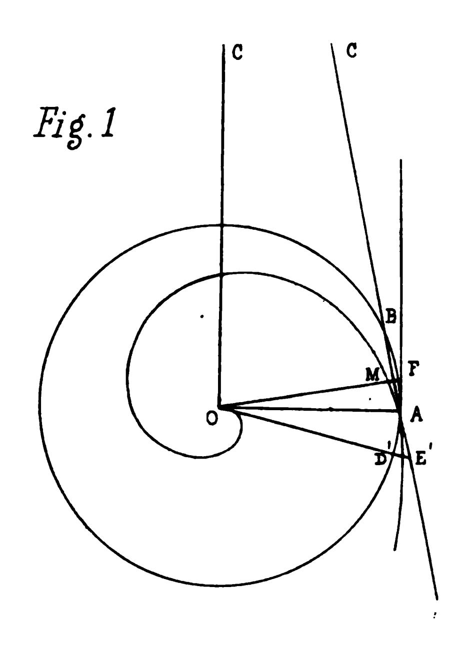


Fig. 1

Fig. 2.

H
B
K
N D
F
M
E
P
O
A
I
D'
F'
N'
L
M'
G
E'

LA TOMBE DU SAVANT.

---

cune statue, aucune pierre ne la signale, et pourtant c'est le
le repos d'un homme éminent. Suivant l'ordre habituel des
s, cette tombe certainement eût été surmontée d'un monu-
d'une architecture imposante et orné d'inscriptions louan-
:s. Mais celui qui repose sous ce toit de gazon a manifesté
lonté expresse qu'il ne lui fût pas élevé de mausolée. Tout
us, on planterait sur sa tombe un pommier, *en souvenir des
pommes* qui ont joué un rôle si important dans l'histoire de
ianité, et il désignait ainsi la pomme d'Ève et celle de Pâris
éduisirent la terre à l'esclavage et la pomme de Newton, qui
plaça au rang des astres.
désir d'un pareil monument et les motifs de ce désir, tout
npreint d'un caractère humoristique, et sûrement on serait
t tenté d'y voir une fantaisie de Jean-Paul qu'une simple
é. Telle était aussi mon opinion avant que j'eusse vu cette
ture singulière. Aussi, quand l'occasion s'offrit à moi, au
d'août de l'année dernière, m'empressai-je de la saisir, pour
surer par moi-même si cette tombe originale était une vérité
ne fiction. Cette satisfaction me fut donnée à *Maros-Vásár-*
C'est là que Bolyai Farkas a vécu et enseigné comme
sseur de mathématiques et de physique au Collège Réformé,
là qu'il a trouvé le repos éternel, et c'est lui qui a voulu le
nier pour monument funéraire.
m'adressai à son successeur, le professeur Joseph Koncz, et
d j'arrivai chez lui, je me trouvai, sans m'en douter, dans

le même appartement où jadis l'original de génie poursuivait ses pensées, et s'absorbait dans ses travaux et dans ses visées idéales. Je dis « visées idéales », car Bolyai n'était pas seulement un mathématicien, c'était aussi un poète — auteur de quelques pièces de théâtre, qui n'ont jamais, il est vrai, été représentées, mais qui n'en ont pas moins une certaine importance dans l'histoire de la littérature hongroise. — Et parce qu'il était poète, il avait orné les murs de la pièce qui lui servit toute sa vie de chambre à coucher et de cabinet de travail, des portraits de Shakspeare et de Schiller; parce qu'il était mathématicien, il y avait joint le portrait du plus grand mathématicien de l'Allemagne, de Gauss, avec lequel il avait lié, à Gœttingue (de 1797 à 1802), une amitié qui dura jusqu'à la mort. La chambre où Bolyai a vécu plus d'un demi-siècle ne présente plus d'ailleurs son aspect d'autrefois. On l'a élargie; d'autres images pendent aux murs; une autre existence, consacrée, elle aussi, aux sciences, anime cet espace. Mais au dehors, dans le jardin qui entoure l'habitation, on sent encore le souvenir d'autrefois errer comme un souffle dans le feuillage des arbres sous lesquels errait Bolyai, surtout dans l'allée ombreuse des pruniers, son lieu favori de promenade, et surtout, naturellement, dans les rameaux du pommier planté sur sa tombe.

Cette tombe est, en effet, conforme aux vœux de cet homme extraordinaire. L'arbre verdit dans une partie clôturée du vaste champ des morts, qui, en dehors de cette tombe, mérite de nous arrêter un instant. Un état dans un état, ce cimetière séparé dans le cimetière commun renferme, à côté des tombes des personnages marquants, une chaire pour le prédicateur dans les cérémonies funèbres et des bancs pour les auditeurs. Tout cela est très vieux, comme le prouve déjà l'aspect des planches noircies par le temps; mais, de plus, une des poutres porte une inscription, nous apprenant que cette construction de bois fut élevée en l'an 1698, par un don de la veuve de Michel Teleki, le ministre du prince Apaffy. Sur un côté de ce cimetière restreint se trouve la tombe de Bolyai, couverte d'un gazon soigneusement entretenu, et à un

coin du tertre, suivant le désir formel du défunt, un pommier *pojnik*, d'une espèce transylvaine très fine, qu'il affectionnait particulièrement. Et par une étrange coïncidence, comme pour nous faire entrer à la lettre dans la pensée de Bolyai, à son arbre pendaient juste trois fruits, ni plus ni moins; — les deux pommes fatales d'Ève et de Pâris, et la glorieuse pomme de Newton.

Cet arbre funéraire, avec ses fruits aromatiques, ne rappelle que l'un des aspects sous lesquels Bolyai envisageait sa fin. Mais tout un torrent de pensées profondes, de sentiments élevés, d'aperçus humoristiques, souvent saisissants, d'autres fois revêtus d'une expression bizarre et obscure, bouillonne dans la notice nécrologique que Bolyai a écrite sur lui-même, qu'il a fait imprimer et qu'il a distribuée de sa propre main à ses connaissances. Cette pièce, une des manifestations les plus originales de la littérature hongroise et de Bolyai lui-même, est relativement peu connue, n'ayant été répandue qu'à un nombre très limité d'exemplaires, dont un est en ma possession, grâce à l'obligeance du professeur Koncz. Ce monument littéraire, unique en son genre, devient encore plus extraordinaire par cette circonstance, que l'auteur avait quatre-vingt-un ans quand il l'écrivit. C'est à cela que fait allusion la préface, dans laquelle Bolyai dit de lui-même : « Avec joie le professeur, qui pendant ses huit X a écrit tant de x, s'en va comme écolier vers ce tableau supérieur, où seront résolus les x restés inconnus sur l'autre tableau. » Envisageant ainsi la mort avec une confiance joyeuse, il prend congé de la vie avec une chaleur de sentiment et une force d'expression souvent exubérantes, qui ont encore plus de poids dans les dernières paroles d'un vieillard de cet âge. Un passage de cet adieu s'adresse à la nature :

« Dieu soit avec toi, nature, belle aussi sur cette terre d'une beauté céleste! Sois toujours le refuge des cœurs angoissés; adoucis par le charme de la solitude les blessures reçues dans le tumulte du monde, et console tous tes enfants affligés. Pendant les orages du printemps, quand une main invisible écrit avec l'éclair lumineux sur l'obscur nuage, quand le ciel fait entendre

à la terre sa voix tonnante, fais apparaître là-haut l'arc-en-ciel, et verse en bas ses brillantes couleurs sur les champs humides de rosée; et le soir, quand la lune avec sa lumière mélancolique s'arrête sur les croix funèbres et sur la mousse des pierres renversées, au milieu du silence qui succède aux gémissements sans nombre, fais entendre les sons divins du rossignol, tandis que la mort plane sur les tombes nouvelles, pour hâter l'œuvre de la destruction. — Quand le soleil d'été dore le matin de ses rayons, fais venir l'espérance de l'hiver, et devant les fruits verts encore fais songer à l'automne. — Dans l'automne, rappelle-nous comment les nobles fruits poussent sur les rameaux de l'arbre jadis blessé par la greffe, et comment les belles grappes sourient du haut des ceps que les liens ont privés de leur liberté. — En hiver, montre la colonne de fumée qui s'élève vers les cieux de tant d'autels, près desquels chaque chef de famille distribue, en prêtre, aux siens, les produits bénis de l'année, et laisse-leur entrevoir les bourgeons du printemps qui va venir. Renferme tes enfants dans le cercle de l'année entière! Montre-leur qu'à chaque hiver une révolution éternelle fait succéder le printemps; aide l'esprit à se délivrer de l'enveloppe caduque dans laquelle il s'est formé. Fortifie ses ailes, pour qu'il prenne son vol hors du nid, dans le printemps des sphères célestes. »

Comme il a pris congé de la nature, Bolyai prend congé aussi de la jeunesse, dont il a été le guide depuis tant d'années! Il l'envoie à la bibliothèque, qu'il appelle un noble cimetière où tant d'hommes se reposent sous l'arbre de la connaissance de notre science si terriblement exiguë et de notre ignorance infinie, et il adresse aux jeunes gens cet appel : « Blessez le tronc sauvage asiatique, et greffez-le de nobles branches européennes, qui puissent s'élever jusqu'au ciel de la civilisation; sous cet arbre toujours vert vous trouverez la beauté qui reste belle dans la vieillesse. »

Parmi les exhortations qui suivent, il en est une digne de remarque, dans laquelle Bolyai détourne les jeunes gens de se croire poètes, comme il arrive si souvent. A côté de l'amour et

de la mort, la poésie lui semble comme un troisième tribut de la nature humaine, que tous acquittent presque sans exception.

« Elle est », dit-il, « le vol vers la patrie de l'âme fuyant sa prison corporelle, surtout à l'époque éclatante où fleurit la jeunesse; seulement les délices de ce vol entraînent aisément à l'oubli des devoirs, et font ainsi autant de malheureux que l'amour; le nombre en est légion, de ceux qui méprisent la science pour chercher la couronne facile à conquérir, et qui, du palais aérien de leurs rêves, préfèrent passer leur vie à dorer les nuages, au lieu d'aller fouiller les profondeurs pour en tirer l'or, et quand rêve et palais disparaissent, ils se réveillent dans le bourbier formé par le nuage doré. Sur des millions, un seul est né poète, et pour tous les autres, la muse violentée ne met au monde que des avortons. »

Comme au début de son « Adieu », Bolyai parle encore de sa propre mort. Il se représente comme un vieil arbre qui, dans le champ de repos de ses amis de jeunesse, reste encore seul debout, et dont la tête couverte de neige s'incline vers le soleil couchant, tandis que, sortant de son tronc creusé, un hibou gémit, perché sur les rameaux desséchés de l'espérance, qui fleurissaient jadis aux accents du rossignol. Aujourd'hui il arbore le drapeau blanc, et la forteresse affaiblie, après une longue défense de huit guerres de Troie (quatre-vingts ans), finit par capituler. En quittant la vie, il aperçoit derrière lui une longue file d'élèves distingués; mais il leur demande pardon de ce que, accablé de soucis et de bien d'autres maux, ayant éparpillé ses forces, il ne peut plus rien pour eux. « Que Dieu vous accorde toujours des hommes meilleurs que nous, afin que notre patrie, qui reçoit de l'étranger tout le peu qu'elle possède, puisse un jour à venir lui restituer à son tour quelque chose! »

Et après la gravité solennelle de l'adieu, perce une disposition humoristique, bien rare chez un homme qui écrit son testament. « S'il a été mauvais, » dit Bolyai en parlant de lui-même, « la terre est délivrée de lui; s'il a été bon, il est délivré de la terre. » Il appelle la bière funèbre une nymphe descendue des grands

bois de verts sapins dans les profondeurs du sol, et lui-même est son époux, dont l'union avec cette fiancée sera un mariage sans dissonance. « Que les fiançailles se fassent sans prêtre, sans cérémonie, sans son de cloches. Tout au plus pourrait-on tinter la clochette de l'école, tant pour avertir le professeur, devenu élève d'une classe supérieure, de redoubler de zèle, tant pour appeler les convives du repas de noce au souper bien maigre, mais offert de bon cœur. Et pourtant ces convives-là » (les vers) « viendront bien aussi sans être priés ». C'est dans ce sens qu'il emploie une seconde fois ce mot de « convives » en souhaitant aux survivants, « à ceux qui dînent dehors, un bon appétit, — jusqu'à ce que les convives viennent. » — « On n'élèvera non plus aucun monument, » ajoute-t-il; « mais si quelqu'un plante un pommier *pojnik* devant la *maison* » (la tombe), « il récoltera les remercîments de ceux qui cueilleront les fruits ou qui prendront des greffes à cet arbre! — et cela en mémoire des trois pommes célèbres, dont celle de notre première mère et celle de Pâris ont fait de la terre un satellite de l'enfer, mais celle de Newton l'a fait remonter jusqu'aux astres. On peut même se dispenser de cette plantation; c'est assez de la couverture commune, que la mère tisse pour ses enfants endormis, et dont les larmes qui tombent chaque jour entretiennent la verdure. Sous cette couverture viendront bientôt ceux qui restent encore ici aujourd'hui, et alors nous reposerons tous ensemble dans le sein de la mère commune, et nous ne porterons même pas envie à celui auquel sera échu un coin plus bariolé de la couverture. »

Jusque-là, il comble les survivants de bons souhaits et de promesses consolantes. D'une source éternelle sort le torrent des larmes, qui signifient aussi bien la joie que la douleur. Les larmes qui seront versées ici le jour des funérailles, pourront être, *dans le monde au delà*, les larmes de joie d'un baptême. Elles sont la rosée du matin et la rosée du soir du soleil, qui se lève d'un côté en se couchant de l'autre.

A la même époque où Bolyai écrivait son nécrologe (1855), dans le pressentiment de sa mort prochaine — qui survint un an

plus tard, — il prit encore sans bruit un autre congé — le congé de la poésie. Il brûla ses œuvres poétiques, et en recueillit les cendres dans une coupe de bois, sur laquelle il écrivit ces paroles d'Horace :

. . . . . Poesis,
Si paulum a summo discessit, vergit ad imum.

Cette coupe, avec les cendres, est conservée comme une relique, au lieu où l'on montre aujourd'hui les manuscrits brûlés, « sous l'arbre de la connaissance de notre science exiguë et de notre monstrueuse ignorance, » dans la bibliothèque du Collège Réformé, à Maros-Vásárhely. Là aussi est suspendue une photographie, représentant Bolyai après sa mort. Une noble figure, au front et au nez puissants, illuminée par la majesté de l'esprit et du sublime repos, avec de longs cheveux lisses, descendant jusqu'aux épaules. Quand on a vu ces traits, on comprend mieux le sens du nécrologe que Bolyai a lui-même écrit et suivant le texte duquel un noble pommier a été planté sur sa tombe. Mais par la même raison, s'il est vrai qu'on doive lui ériger un monument de marbre, l'autre monument encore plus original et plus remarquable, le pommier *pojnik*, devra toujours être conservé et soigné avec amour.

Dr. Adolf Dux.

(Extrait du *Pester Lloyd* du 4 février 1880.)

TEMPÉRATURES

ET

DENSITÉS DE L'EAU

DANS L'ESTUAIRE DE LA GIRONDE

PAR M. HAUTREUX

LIEUTENANT DE VAISSEAU
DIRECTEUR DU MOUVEMENT DU PORT DE BORDEAUX

Dans une précédente étude sur les températures de la mer dans l'estuaire girondin, pendant l'hiver exceptionnellement rigoureux de 1879 à 1880, on a montré que les courants tendaient à suivre les passes profondes du fleuve et à s'y cantonner; que le jeu des marées détermine de simples oscillations dans les masses en mouvement; que les mélanges avec l'eau de la mer se font difficilement, et que hors des passes, sur les bancs, les eaux semblent tourbillonner sur elles-mêmes.

Ces faits ne sont pas le résultat d'un état extraordinaire du fleuve dû à la persistance des froids et des vents d'est; ils sont l'état habituel de l'écoulement de la rivière, ainsi qu'il ressort des observations suivantes, comprenant l'étude des températures et des densités en différents points du fleuve pendant plusieurs années consécutives.

Bien que les moyens d'observation dont on disposait fussent très imparfaits, ils ont cependant donné des résultats très concluants.

Températures de l'eau.

On a observé les températures de l'eau, à la surface, à Bordeaux, au Verdon, à Royan et à Bonne-Anse, deux fois par jour,

à 8 heures du matin et à 4 heures du soir, afin d'avoir pour chaque observation des directions de courants opposés. Le service des ponts et chaussées a bien voulu communiquer les observations faites à Cordouan, à la pleine mer, pendant plusieurs années; enfin, les paquebots des Messageries ont donné la température du golfe de Gascogne, sur leur parcours, quatre fois par mois depuis 1876.

Quand on effectue les tracés de ces températures jour par jour, on est immédiatement frappé des faibles variations journalières et du peu d'influence que paraissent avoir les oscillations diurnes de la température de l'air et les renverses des courants de marée, même dans des points où la profondeur de l'eau est faible et où des bancs découvrent sur de vastes étendues à marée basse.

BORDEAUX.

Pendant l'été, sous l'action solaire, les bancs découverts s'échauffent considérablement; pendant l'hiver, durant les périodes de froid, ils se refroidissent beaucoup, et lorsque, avec le flot, la marée vient les recouvrir, leur influence thermale est à peine sensible et ne dépasse pas un degré. Un seul exemple suffira :

Températures de l'eau à Bordeaux en mai 1881.

	SYZYGIE.			QUADRATURE			SYZYGIE.		
Dates..........	13	14	15	20	21	22	28	29	30
8 h. matin......	16°	16°	17°	20°	20°	20°	20°	19°	18°5
4 h. soir........	16°	16.5	17.5	20°	20°	20°	20°	19°	19°

ROYAN.

Les courants de descente entraînent les eaux jusqu'à la limite des bancs et les mettent en présence de la mer; les eaux de retour, au flot, n'apportent pas la température de l'Océan, et les oscillations thermales dues aux marées sont à peine sensibles et ne dépassent pas *un degré*. Exemple :

Températures de l'eau à Royan en mai 1881.

	QUADRATURE.				SYZYGIE.			
Dates..........	20	21	22	23	27	28	29	30
8 h. matin......	15°	15°	15°	15°	15°	16°	16°	17°
4 h. soir........	15°	16°	16°	16°	16°	17°	17°	18°

BONNE-ANSE.

Ce point est tout près de la mer, près de la pointe de la Coubre. Il n'appartient au régime du fleuve que pendant quelques jours, chaque mois, à l'époque des quadratures. Les oscillations thermales dues aux marées ne dépassent pas non plus *un degré.*

Températures à Bonne-Anse en mai 1878.

	SYZYGIE.			QUADRATURE.			SYZYGIE.		
Dates	2	3	4	9	10	11	16	17	18
8 h. matin.....	14°	14°5	14°	14°	14°5	14°5	15°5	16°	16°5
12 h............	14°	14.5	14°	14.5	15.5	15.5	16°	17°	17°
4 h. soir.......	14.5	15°	14°	15°	15.5	15.5	15.5	17.5	16°

CORDOUAN.

Les observations étaient faites seulement à la pleine mer. Elles ne donnent pas d'indications sur les modifications apportées par les marées. Elles montrent que les modifications thermales se produisent lentement, sans secousse, durent longtemps et sont lentes à disparaître. Ces eaux semblent ne se mélanger que difficilement avec les eaux de la mer d'un côté, et avec les eaux du fleuve de l'autre, bien que leur température soit à peu près la moyenne entre les deux; elles paraissent tourbillonner sur les bancs qui entourent les rochers.

GOLFE DE GASCOGNE.

Les observations étaient prises de quart en quart, de jour comme de nuit; ces eaux ne paraissent éprouver aucune modifi-

cation journalière, les différences du jour à la nuit y sont insensibles, seules les modifications saisonnières s'y font sentir, et les moyennes mensuelles sont à peine abaissées d'un degré dans les hivers longs et rigoureux, semblables à celui de 1879 à 1880.

Les deux points extrêmes des observations.

Le Golfe et Bordeaux donnent : le premier, un état thermal moyen qui ne subit pas d'oscillations par suite des variations diurnes ; le second, tout en n'éprouvant que de faibles oscillations journalières, présente des mouvements considérables qui concordent avec ceux de la température de l'air et avec l'état hygrométrique du fleuve.

Le point intermédiaire, Royan, subit le contre-coup de ces influences perturbatrices.

La température de la mer, en dehors des bancs, ne variant qu'avec la saison, peut servir d'étalon pour comparer les températures observées dans les autres points de la rivière.

Les observations embrassent la période de 1877 à 1881, pendant laquelle on a eu des hivers très doux et d'autres très froids ; des étés humides et d'autres très secs.

En réunissant mois par mois pour chaque point les températures les plus élevées et les températures les plus basses, on obtient deux tracés qui permettent d'établir une moyenne et de déterminer les écarts qui peuvent se produire dans les circonstances ordinaires. On peut en déduire l'échelle thermométrique des variations mensuelles et annuelles pour chaque point observé.

(Voir les Tableaux.)

GOLFE DE GASCOGNE.

L'échelle thermométrique annuelle peut varier de 8 degrés : le minimum à 11° en février et le maximum à 19° en août.

CORDOUAN.

Les tracés maxima et minima n'ont pas un écart de plus de deux degrés, si l'on fait abstraction de la période exceptionnelle de l'hiver de 1879 à 1880. — L'échelle thermométrique annuelle peut varier de 12° : le minimum étant à 8° en janvier et le maximum à 20° en août et septembre.

Le thermomètre étant descendu en janvier 1880 à + 5°,5, — l'échelle des variations absolues serait alors comprise entre 5°,5 et 20°, soit 14°,5.

BONNE-ANSE.

Les observations n'ont embrassé que huit mois, du 1er janvier 1878 au 31 août ; elles montrent pour cette année une température *plus basse* que celle de Cordouan, et inférieure de 4°5 à celle de l'Océan, se rapprochant beaucoup de celle de Royan ; c'est un premier indice que le chenal de la passe du Nord est bien plus dépendant du fleuve que les rochers de Cordouan, et que, soit en flot, soit en jusant, les courants se cantonnent et oscillent dans la passe profonde.

ROYAN.

Les tracés maxima et minima ont un écart qui atteint 6° pendant l'hiver et qui n'est que d'un degré pendant l'été.

L'échelle thermométrique annuelle peut varier du minimum de 2°,5 en janvier au maximum de 22° en août ; c'est un écart de 19°,5.

La température moyenne donne 4°,5 en janvier et 20°,5 en août. Les eaux sont donc, pendant l'hiver, généralement plus froides que celles de l'Océan d'environ 5° à 6° ; tandis que pendant l'été elles sont à peine plus chaudes d'un degré que celles de la mer.

Par conséquent, dans la région comprise entre Royan et les

bancs extérieurs, les mouvements des eaux peuvent être suivis, avec le thermomètre, plus facilement en hiver qu'en été.

C'est ainsi que les observations comparées qui ont été faites en décembre 1879 et janvier 1880 ont montré que des eaux qui, en jusant, passaient devant Royan avec la température de 2°,5, descendaient jusqu'aux limites des bancs de la Mauvaise, et là, reprises par le courant de flot, remontaient jusqu'à Royan n'ayant pas changé sensiblement de température, bien qu'elles se fussent trouvées en contact avec les eaux de l'Océan dont la température était de 12°, et qu'elles aient élongé le plateau de Cordouan dont la température était de 6°,5.

Ceci prouve que ces eaux, bien qu'elles fussent poussées vers Cordouan par les vents qui dépendaient de l'Est, se sont maintenues, malgré cela, dans le chenal profond de la côte de Saintonge, s'y sont cantonnées au flot, comme au jusant, conservant une sorte d'indépendance relative au milieu d'eaux très différentes comme température.

BORDEAUX.

Les tracés maxima et minima présentent des écarts de 7° à 8°, aussi considérables pendant l'été que pendant l'hiver.

L'échelle thermométrique a varié de — 2° en janvier à + 27° en juillet; c'est un écart de 29 degrés.

La température moyenne donne + 3° en janvier et 23° en août.

Pendant l'hiver, les températures extrêmes de Bordeaux sont inférieures à celles de Royan de 3 à 4 degrés; pendant l'été, elles leur sont supérieures de 6 à 7 degrés.

Par conséquent, dans la région comprise entre Bordeaux et Royan, les mouvements des eaux peuvent être suivis avec le thermomètre plus facilement en été qu'en hiver.

A Bordeaux, les eaux sont influencées par les variations de température de l'air et par les crues de la rivière; ces mouvements sont faciles à reconnaître sur les tracés; ils sont peu sensibles d'une marée à l'autre, mais ces ébranlements qui

atteignent 4 ou 5 degrés, ont une durée ordinaire d'une quinzaine de jours.

Période de crue en avril 1880.

	SYZYGIE.											QUADRATURE.								
Dates.	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
8h m.	14°	13°5	13	12	11	10	11	10°	11	10°5	12°5	13	13	13°	13°	14°	11°	14°5	14°5
4h s.	14°	13.5	13	12	11	10	10	10.5	11	11.5	13°	13	13	13.5	13.5	14.5	14.5	15°	14°

Chute d'eau dans le mois : 120mm,8.

Les marées de syzygie refoulent les eaux du fleuve vers l'amont et sont un obstacle à la propagation vers l'aval de la perturbation; les marées de quadrature, au contraire, lui permettent d'atteindre Royan et même au delà.

Les vents du N.-O agissent comme les marées de syzygie en refoulant les eaux; les vents du S.-E. agissent comme les marées de quartier en facilitant l'écoulement du fleuve.

La température de l'eau à Bordeaux pendant l'été est supérieure à celle de Royan; les baisses thermales différant peu du maximum de Royan, ne peuvent s'y faire sentir. Le même effet se produit pendant l'hiver avec les hausses thermales. Ce sont les extrêmes de température seuls qui peuvent accuser des différences sensibles sur ce long parcours.

Pendant l'hiver les eaux du fleuve sont abondantes, les eaux de la mer y pénètrent moins, l'état thermal devient presque uniforme entre Bordeaux et Royan; c'est dans l'estuaire que les différences de température peuvent exister.

Pendant l'été, les eaux du fleuve sont maigres, les courants des marées pénètrent au loin, l'estuaire est rempli par les eaux du large; les températures y sont à peu près uniformes partout, c'est dans l'intérieur du fleuve, entre Bordeaux et Royan, que des différences peuvent être observées.

En résumé, les mouvements de température qu'éprouvent les eaux à Bordeaux sont étroitement liés avec les perturbations atmosphériques et avec les crues de la rivière.

Les ébranlements produits par ces diverses causes durent plusieurs jours; il faut plusieurs marées et une persistance marquée dans ces perturbations pour que les eaux en subissent l'influence.

Les oscillations des courants de marée ne produisent pas, même dans l'intérieur du fleuve, des variations de température de plus *d'un degré.*

Les eaux conservent donc sur de longs espaces leur température d'origine.

Lorsque ces températures d'origine sont très différentes, le thermomètre peut indiquer la provenance des eaux et déceler leurs mouvements.

Ces conditions existent entre Bordeaux et Royan, pendant l'été; entre Royan et la mer pendant l'hiver.

L'échelle thermométrique annuelle pour les différents points de la rivière a été :

Golfe de Gascogne...	de 11°	à 19°......	Ecart.	8°
Bonne-Anse........	de 7°	à 20°......	—	13°
Cordouan..........	de 5°,5	à 20°......	—	14°,5
Royan.............	de 2°,5	à 22°......	—	19°,5
Bordeaux...........	de −2°	à 27°......	—	29°

Densités de l'eau.

Les observations de densité de l'eau ont été faites :

En 1878, à bord du brick le *Cerf*, qui était mouillé dans *Bonne-Anse*, près de la pointe de la Coubre.

En 1879, 1880 et 1881, par le capitaine Leroux, à bord de la *Sonora* mouillée soit à Royan, soit au Verdon.

Ces observations ont été faites tantôt avec des densimètres gradués de façon que 27° représentaient la densité de l'eau de mer à 15° de température, tantôt avec un pèse-sel ordinaire dont les graduations, plus petites, ont dû être multipliées par 6 pour concorder avec les autres densimètres.

Les observations n'ont pas été ramenées à une température uniforme, elles sont telles qu'elles ont été recueillies.

Bonne-Anse se trouvant à une distance de 17 kilomètres en dehors de la véritable embouchure du fleuve, de la ligne qui joint Royan au Verdon, les observations qui y ont été faites, paraissaient, *à priori*, devoir être peu influencées par le régime du fleuve, on pensait y trouver toujours des eaux très salées. — Car on sait qu'une molécule d'eau partant de Bordeaux met six jours pour dépasser Royan, que conséquemment elle a été vingt-quatre fois brassée par les courants de marée avant de sortir de l'embouchure, qu'enfin dans le delta du fleuve, compris entre les dangers de la Mauvaise et ceux des Olives, les eaux sorties de la rivière sont en présence des eaux de l'Océan et sont sollicitées aux mélanges par la divagation des passes autour des rochers de Cordouan, par la faible profondeur de l'eau sur les bancs, et par l'agitation causée par les vents du large.

Dès la première série d'observations du mois de janvier 1878 il a été facile de voir que, même à Bonne-Anse, les eaux du fleuve décelaient leur présence par un abaissement marqué de la densité, et qu'à certaines époques elles paraissaient chasser presque complètement les eaux de la mer pendant un ou deux jours.

Densités observées à Bonne-Anse.

Janvier 1878.

	QUADRATURE.								SYZYGIE.						QUADRATURE.			
Dates.	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		26	27	28	29
8 h. m....	23°	23	21	21	23	22	20	21	22	23	25	26	25		26	20	16	20
12 h.	24	23	25	22	25	22	17	18	23	22	24	25	25		26	20	17	19
4 h. s	24	22	21	24	23	22	16	20	22	24	25	24	26		25	20	22	20
Haut. de marées.							Min. 3^m70						Max. 5^m30				Min. 3^m80	

Février 1878.

	QUADRATURE.					SYZYGIE.							QUADRATURE.					
Dates.	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		23	24	25	26	27	28
8 h. m....	24°	22	20	20	22	22	24	25	24	25	25		26	25	22	22	22	22
12 h.......	23	20	22	17	20	22	24	23	23	25	24		25	25	23	20	22	21
4 h. s. ...	23	22	22	17	22	22	24	25	24	25	25		25	22	25	21	21	24
Haut. de marées.				Min. 3^m60						Max. 5^m50						Min. 3^m50		

Ainsi, du 2 au 13 janvier, le densimètre marquait 22° à 24°; le 14, il tombait à 16°; se relevait à 22° le 16; atteignait 26° le 19, et le 28 retombait à 16°.

Il avait plu très peu pendant le mois, les vents avaient soufflé du N.-E. depuis le 8 jusqu'au 22, et la température de l'air s'était maintenue assez basse.

Pendant le mois de février, on trouvait aussi :

Du 2 au 8, le densimètre marquait	23°
Le 13	17°
Du 18 au 24	25°
Le 26	20°

C'étaient encore deux oscillations analogues à celles qui s'étaient produites en janvier.

La direction des vents ne paraissait avoir aucune influence. Cependant il semblait ressortir une certaine périodicité.

En examinant la concordance avec les phases lunaires, on reconnut immédiatement que les maxima de salure semblaient correspondre avec l'époque des syzygies et avec les hauteurs de marées maxima, et que les minima de salure correspondaient avec les quadratures et avec les marées minima.

Ainsi, en janvier, des deux maxima :

le premier à 22° correspondait à des marées de	4m70
le second à 25° — —	5m80

En février :

le premier maximum à 23° correspondait à des marées de.	4m80
le second maximum à 25° — —	5m50

Au contraire les minima de salure correspondaient :

Celui du 14 janvier, marées	3m70
— 28 — —	3m80
— 13 février, marées	3m80
— 26 — —	3m50

En mars, en avril, la même périodicité se remarque; il était tombé beaucoup de pluie depuis la fin de mars, et le fleuve était

débordé en amont de Bordeaux; le mélange d'eau douce se fait bien sentir au densimètre et l'oscillation de la quadrature est tout aussi bien marquée.

Bonne-Anse, avril 1878. — Densités.

							QUADRATURE.			
Dates..........	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
8 h. matin.....	23°	24	22	22	[illegible]	20	14°	18	22	21
12 h	21°	22	20	25	20	20	14°	20	21	19
4 h. soir.......	22°	23	21	22	18	20	17°	22	26	20
Haut. marées...	5^m30						3^m50			

Ainsi en syzygie, avec 5^m30 de marée, le densimètre marque 22° à 24°; — en quadrature, avec 3^m50 de marée, il marque seulement 14°.

En mai et juin, les marées de syzygies n'atteignent que 4^m70; celles des quadratures varient entre 3^m80 et 4^m; la différence de hauteur entre les deux époques lunaires est faible, la différence des densités reste faible aussi.

En juillet et août, les pluies ont cessé, le fleuve est presque à l'étiage, les marées de syzygies dépassent 5^m, la salure remonte à 25°; le mouvement des quadratures est indiqué par une perte de 3 à 4 grammes de sel par litre.

Bonne-Anse, juillet 1878. — Densités.

							QUADRATURE.						SYZYGIE		
Dates..........	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
8 h. matin	24°	25	25	25	25	25	24	22	24	25	25	25	25	25	25	
12 h	24	25	25	25	25	25	22	22	24	25	25	25	25	25	25	
4 h. soir.......	25	25	25	25	25	21	21	23	25	25	25	25	25	25	25	
Haut. marées...	4^m90						3^m60									5^m20

Ces observations montrent clairement les périodes d'écoulement du fleuve, le refoulement de ses eaux par les marées de vive-eau, l'influence de la hauteur de la marée sur ses mouvements.

Ainsi, à Bonne-Anse, près de la limite des bancs de l'embouchure de la Gironde, le densimètre indique que :

1° A l'époque des marées de vive-eau et pendant la saison sèche,

les eaux présentent à peu près les mêmes salures que celles de l'Océan.

2° A l'époque des marées de morte-eau, la salure diminue brusquement pendant un ou deux jours, indiquant un afflux considérable des eaux du fleuve.

3° Le fleuve s'écoule donc à la mer surtout pendant les faibles marées de la quadrature, tandis qu'il est refoulé vers l'amont pendant les fortes marées des syzygies;

4° Plus la hauteur de marée est considérable, plus le fleuve est refoulé; plus elle est faible, plus le fleuve s'écoule à la mer.

Les diminutions de densité sont intimement liées aux périodes de quadratures, mais elles ne concordent pas toujours avec la direction des courants de marée. *A priori*, on pourrait penser que les eaux doivent toujours être d'autant plus salées que le flot existe depuis plus longtemps, et qu'elles doivent être d'autant moins salées que le courant descendant a eu plus de durée. — C'est ce qui ne se produit pas toujours. Reprenons le tableau des densités de janvier 1878 pendant les quadratures, et indiquons les heures et directions des marées, aux heures des observations.

Bonne-Anse, janvier 1878.

DATES	HEURES	DENSITÉS	COURANTS	DATES	HEURES	DENSITÉS	COURANTS
13	8	22°	F. 1^{h}	27	8	20°	F. $3^{h}30$
	12	22	J. 1^{h}		12	20	J. $1^{h}30$
	4	22	B. M.		4	20	J. 6^{h}
14	8	20	F. 3^{h}	28	8	16	F. 3^{h}
	12	17	J. $1^{h}30$		12	17	J. $0^{h}30$
	4	16	J. 6^{h}		4	22	J. 5^{h}
15	8	21	F. 2^{h}	29	8	20	F. 2^{h}
	12	18	F. 6^{h}		12	19	F. 6^{h}
	4	20	J. 4^{h}		4	21	J. 4^{h}

Ainsi, le 13, la densité ne varie pas ni en flot ni en jusant; toutes les eaux qui passent dans Bonne-Anse, et qui parcourent au moins 20 kilomètres, ont la même salure, inférieure à celle de l'Océan, supérieure à celle du fleuve. Le mouvement oscillatoire des eaux, sans mélange avec les voisines, est bien marqué.

Le 14, avec le jusant, à midi, le densimètre accuse la présence des eaux douces; la salure diminue de *six grammes* de sel par litre. Mais le 15, à huit heures du matin, le fleuve est écoulé; il y a deux heures de flot, le densimètre marque 21° à midi. Quatre heures plus tard, nous sommes au plein de la mer; l'estuaire devrait être rempli d'eaux salées, le densimètre marque 18°, c'est-à-dire une salure plus faible que le matin; et enfin, à quatre heures du soir, après quatre heures de jusant, le densimètre marque 20°, c'est-à-dire une salure plus forte qu'à la pleine mer.

A la fin du mois, pour le dernier quartier, des faits absolument semblables se produisent.

Le 27, densités uniformes, quel que soit le courant.

Le 28, on observe 16° après trois heures de flot; et à quatre heures du soir, 22° après cinq heures de jusant.

Le 29, le minimum à 19° a lieu à la pleine mer, et le maximum à 21° après quatre heures de jusant.

Ces faits démontrent que les modifications journalières des densités ne sont pas liées seulement aux oscillations des marées puisque les maxima n'ont pas toujours lieu à la fin du flot, et les minima vers la fin du jusant.

Le capitaine du *Cerf* fait remarquer, en outre, que dans les quadratures, le navire, à Bonne-Anse, reste constamment évité le cap vers le courant de descente, quelle que soit la direction des courants de marée; cette observation montre les tourbillonnements qui existent dans l'estuaire aux marées de morte-eau.

ROYAN ET LE VERDON.

Les observations ont été faites par le capitaine Leroux, à bord de la *Sonora*, chaque jour à huit heures du matin et quatre heures du soir.

1879

Le Verdon. — Les variations de densité dues aux renverse de marées sont très sensibles et atteignent quelquefois 5° d'une marée à l'autre; les diminutions de salure à l'époque des quadratures sont bien indiquées. Le densimètre indique encore ici des mouvements tourbillonnaires spéciaux qui font que les oscillations de l'instrument ne concordent pas toujours avec la nature des courants de marée.

Le Verdon, mars et avril 1879. — *Densités.*

						SYZYGIE									QUADRATURE.			
Dates	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4
Courant	»	»	»	»	»	»	J. 3^h	»	»	»	»	»	»	»	F. 4^h	»	»	»
8 h. matin	18°	16°5	16	17	17	17	23	16	20	20	19	18	19	14	10	15	15	15
4 h. soir	17°	19°	20	18	20	21	20	20	21	21	18	20	15	14	13	15	16	16
Courant	»	»	»	»	»	»	F. 5^h	»	»	»	»	»	»	»	J. 5^h	»	»	»
Haut. de marées	$3^m.95$	»	»	»	»	$4^m.90$	»	»	»	»	»	»	»		$3^m.50$	»	»	»

Ainsi le 24 mars, en syzygie, le maximum à 23° eut lieu après trois heures de jusant, tandis que le minimum à 20° eut lieu après cinq heures de flot. De même le 1er avril, en quadrature, le minimum à 10° eut lieu après quatre heures de flot, et le maximum à 13° eut lieu après cinq heures de jusant.

On a remarqué des aberrations semblables, le 2 mai, en quadrature, et le 7 juin en syzygie.

Il est donc démontré qu'au Verdon les variations de la densité ne sont pas liées strictement aux oscillations de la marée; mais leur dépendance des phases lunaires et des hauteurs de marée est parfaitement indiquée.

Royan. — Les observations furent faites en juillet, août, septembre et octobre; dans ce dernier mois le densimètre fut brisé et les observations arrêtées pour un temps.

Royan, août 1879. — *Densités.*

		SYZYGIE.						QUADRATURE.							SYZYGIE.			
Dates...... ..	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Courant.....	»	J. 2h	J. 1h30	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	J. 2h
4 h. matin...	20°	20	19	17	17	17	18	17	17	17	19	18	18	19	19	21°5	21	22
4 h. soir.....	21°	17	17°5	17	17	18	17	17	16	18	20	19	20	21	20	21	22	19
Courant.....	»	F. 4h	F. 3h	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	F. 3h
Haut. marées.	»	5m	»	»	»	»	»	3m55	»	»	»	»	»	»	»	»	5m.20	»

Nous voyons que l'augmentation de salure en syzygie et les diminutions en quadrature sont bien marquées. Quoique nous soyons dans les eaux maigres de l'été, la différence n'en est pas moins encore de 6 grammes de sel par litre entre les deux périodes.

Les différences dues à la marée sont moins marquées qu'au Verdon; elles ne sont ici que de deux degrés au plus; cela indique que la lutte entre les eaux du fleuve et les eaux de la mer est moins forte à Royan qu'au Verdon.

Des mouvements tourbillonnaires sont encore indiqués par le densimètre, par le défaut de concordance des salures avec la direction des courants de marée.

En juillet, le 21, on a 19° après 3 heures de jusant;
et 17° après 5 heures de flot.
le 27, on a 17° après 4 heures de flot;
et 19°5 après 6 heures de jusant.
le 28, on a 15° après 3 heures de flot;
et 19° après 5 heures de jusant.
En août, le 5, on a 20° après 2 heures de jusant;
et 17° après 4 heures de flot.
le 21, on a 22° après 2 heures de jusant;
et 19° après 3 heures de flot.
En septembre, le 16, on a 22° après 4 heures de jusant;
et 20° après 6 heures de flot.

Ces exemples suffisent pour montrer que souvent la plus grande salure s'est trouvée à la fin du jusant, et les plus faibles après plusieurs heures de flot. C'est évidemment le contraire de ce que l'on devait attendre.

1880 et 1881.

Les observations ont été reprises à Royan, avec un pèse-sel, à partir du mois de mai 1880 jusqu'au mois de mars 1881.

Les mêmes phénomènes ont été notés :

Diminution de salure aux quadratures, oscillations plus considérables pendant l'hiver que pendant l'été, et variations de densité non concordantes avec la direction des courants de marée.

En février 1881, un fait remarquable s'est produit : la *Sonora* dut quitter Royan et se rendre au Verdon ; elle y passa deux jours et demi et revint à Royan : c'était cinq jours après la quadrature.

Février 1881. — Densités (par pèse-sel).

	ROYAN		LE VERDON			ROYAN		
Dates	11	12	12	13	14	14	15	16
Courant	»	»	»	»	»	»	J. 3h	»
8 h. matin	2°	2	»	1	1	»	2	1°5
4 h. soir	2	»	1°5	1	»	2·5	1°5	1°5
Courant	»	»	»	»	»	»	F. 5h	»
Haut. de marées	»	»	»	»	»	»	»	4m90

Les densités ont été moins fortes au Verdon qu'à Royan, et la faible salure a duré au moins 40 heures, pendant lesquelles les courants ont renversé sept fois dans les deux sens.

Il ressortirait de cette observation que les eaux du fleuve s'écoulent bien plus par la passe intérieure du Médoc, Richard-le-Verdon, que par la passe de Saintonge, Méchers-Royan. — Dans cette dernière passe, la salure y étant plus considérable et les oscillations de densité de marée moins fortes, il semble que le flot s'y ouvre un chemin plus facile et moins contesté ; tandis que dans la passe du Médoc, les eaux du fleuve, s'y accumulant, offrent une plus vive résistance aux courants de flot.

Cette indépendance des courants sur les deux rives du fleuve a été observée et consignée par M. Manen, ingénieur hydrographe, dans ses reconnaissances de l'embouchure de la Gironde, en 1874 (pages 96, 102 et 106).

L'observation du 15 février montre encore les eaux moins

salées, après cinq heures de flot, qu'après trois heures et demie de jusant.

A partir du 23 mars 1881, les observations ont été reprises à Royan, avec un densimètre et les mois d'avril et de mai ont fourni des résultats parfaitement analogues aux précédents.

Les différences de densité qui ont été observées dans une même journée, peuvent amener, dans des points peu éloignés, des différences de niveau et provoquer des écoulements en travers du courant régnant, aussi bien dans les couches inférieures qu'à la surface.

Ainsi, puisque au Verdon on a pu constater des différences de densité allant à 5° pendant que les températures restaient constantes; que ces différences ont existé, soit d'une marée à l'autre, soit d'une rive à l'autre; comme la graduation du densimètre est telle que chaque degré représente une différence de poids d'un gramme par litre, il s'ensuit qu'à température égale : une colonne d'eau de 1 mètre, à 20° de densité, sera équilibrée par une colonne de $1^{m}005$ à 15° de densité. Or, au Verdon, la profondeur de l'eau est de 10 mètres; la colonne d'eau, à 15° de densité, pourrait avoir un niveau dépassant la colonne d'eau, 20° de densité, d'une épaisseur de *cinq centimètres*.

A Royan, où la profondeur est de 20 mètres, et où les variations de densité n'ont guère dépassé trois grammes par litre, la différence de niveau pour chaque mètre linéaire serait de 0,003; par conséquent, pour 20 mètres, la différence des niveaux serait encore de *six centimètres*.

La surface tendra donc à s'écouler des eaux les plus légères vers les eaux les plus lourdes, et cette surcharge fera que les eaux les plus lourdes, dans les couches inférieures, se répandront vers les eaux les plus légères. — Ce double mouvement peut expliquer quelques anomalies qui ont été signalées par le densimètre dans le jeu des courants de marée.

Ces courants obéissent à des lois qui sont encore peu expliquées.

1880 et 1881.

Les observations ont été reprises à Royan, avec un pèse-sel, à partir du mois de mai 1880 jusqu'au mois de mars 1881.

Les mêmes phénomènes ont été notés :

Diminution de salure aux quadratures, oscillations plus considérables pendant l'hiver que pendant l'été, et variations de densité non concordantes avec la direction des courants de marée.

En février 1881, un fait remarquable s'est produit : la *Sonora* dut quitter Royan et se rendre au Verdon; elle y passa deux jours et demi et revint à Royan : c'était cinq jours après la quadrature.

Février 1881. — *Densités (par pèse-sel).*

	ROYAN		LE VERDON			ROYAN		
Dates	11	12	12	13	14	14	15	16
Courant	»	»	»	»	»	»	J. 3h	»
8 h. matin	2°	2	»	1	1	»	2	1°5
4 h. soir	2	»	1°5	1	»	2°5	1°5	1°5
Courant	»	»	»	»	»	»	F. 5h	»
Haut. de marées	»	»	»	»	»	»	»	4m90

Les densités ont été moins fortes au Verdon qu'à Royan, et la faible salure a duré au moins 40 heures, pendant lesquelles les courants ont renversé sept fois dans les deux sens.

Il ressortirait de cette observation que les eaux du fleuve s'écoulent bien plus par la passe intérieure du Médoc, Richard-le-Verdon, que par la passe de Saintonge, Méchers-Royan. — Dans cette dernière passe, la salure y étant plus considérable et les oscillations de densité de marée moins fortes, il semble que le flot s'y ouvre un chemin plus facile et moins contesté; tandis que dans la passe du Médoc, les eaux du fleuve, s'y accumulant, offrent une plus vive résistance aux courants de flot.

Cette indépendance des courants sur les deux rives du fleuve a été observée et consignée par M. Manen, ingénieur hydrographe, dans ses reconnaissances de l'embouchure de la Gironde, en 1874 (pages 96, 102 et 106).

L'observation du 15 février montre encore les eaux moins

salées, après cinq heures de flot, qu'après trois heures et demie de jusant.

A partir du 23 mars 1881, les observations ont été reprises à Royan, avec un densimètre et les mois d'avril et de mai ont fourni des résultats parfaitement analogues aux précédents.

Les différences de densité qui ont été observées dans une même journée, peuvent amener, dans des points peu éloignés, des différences de niveau et provoquer des écoulements en travers du courant régnant, aussi bien dans les couches inférieures qu'à la surface.

Ainsi, puisque au Verdon on a pu constater des différences de densité allant à 5° pendant que les températures restaient constantes; que ces différences ont existé, soit d'une marée à l'autre, soit d'une rive à l'autre; comme la graduation du densimètre est telle que chaque degré représente une différence de poids d'un gramme par litre, il s'ensuit qu'à température égale : une colonne d'eau de 1 mètre, à 20° de densité, sera équilibrée par une colonne de $1^{m}005$ à 15° de densité. Or, au Verdon, la profondeur de l'eau est de 10 mètres; la colonne d'eau, à 15° de densité, pourrait avoir un niveau dépassant la colonne d'eau, 20° de densité, d'une épaisseur de *cinq centimètres*.

A Royan, où la profondeur est de 20 mètres, et où les variations de densité n'ont guère dépassé trois grammes par litre, la différence de niveau pour chaque mètre linéaire serait de 0,003; par conséquent, pour 20 mètres, la différence des niveaux serait encore de *six centimètres*.

La surface tendra donc à s'écouler des eaux les plus légères vers les eaux les plus lourdes, et cette surcharge fera que les eaux les plus lourdes, dans les couches inférieures, se répandront vers les eaux les plus légères. — Ce double mouvement peut expliquer quelques anomalies qui ont été signalées par le densimètre dans le jeu des courants de marée.

Ces courants obéissent à des lois qui sont encore peu expliquées.

TABLEAU DES TEMPÉRATURES MENSUELLES

	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juill.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
Golfe de Gascogne.												
	11°5	11°	11°8	12°	14°5	16°5	17°	19°	19°	17°	14°5	13°
Bonne-Anse.												
	7	8	9	11	15	17	19	20	»	»	»	
Cordouan.												
Max.	11.5	11	10.5	13	15	16.5	17.5	20	20	18	15	12.5
Min.	5.8	9	9.5	11	12	14	16	18	17.5	14.5	12.5	9
Moy.	8	10	10	12	13.5	15.5	17	19	18.5	16	13	11
Royan.												
Max.	8	7	11.5	13	15	18	20	21	20	16.5	12	10
Min.	2.5	4	9	11	13	16	18.5	19	19	15.5	11	3.5
Moy.	5.5	6	10.5	12	14	17	19	20	19.5	16	11.5	6.5
Bordeaux.												
Max.	6	8	12.5	15	16	21	26	25.5	23	17	10	6.5
Min.	— 1	5.5	9	10	12	17	20	20	15	12.5	5	0
Moy.	3	7	11	12	14	19	23	22.5	18.5	15	7.5	3

TABLEAU DES DENSITÉS DE L'EAU

	Janv	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juill.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
Bonne-Anse 1878. Densimètre												
Syz.	24 26	24 25.3	25 26	25 24	22 21	20 23	25 25	25 26	» »	» »	» »	» »
Quad.	16 16	20 17	21 21	14 20.5	20 19	20 19	21 21	22 25	» »	» »	» »	» »
Le Verdon 1879. Densimètre.												
Syz.	» »	» »	22 22	20 19	17 20	20 »	» »	» »	» »	» »	» »	» »
Quad.	» »	» »	» 16	14 10	10 5	12 15	» »	» »	» »	» »	» »	» »
Royan 1879. Densimètre.												
Syz.	» »	» »	» »	» »	» »	» »	20 19	21 22	22 23	22 24	» »	» »
Quad.	» »	» »	» »	» »	» »	» »	15 16	17 18	20 19	17 20	» »	» »
Royan 1880. Pèse-sel.												
Syz	» »	» »	» »	» »	24 24	21 21	18 18	24 18	18 21	21 21	21 21	21 21
Quad.	» »	» »	» »	» »	12 12	12 12	15 12	18 15	15 15	12 15	15 12	12 15
Royan 1881.												
Syz.	21 18	18 21	24 21	23 21	21 21	» »	» »	» »	» »	» »	» »	» »
Densimètre.												
Quad.	12 15	12 9	12 12	12 14	12 14	» »	» »	» »	» »	» »	» »	» »

SUR LA DÉPENDANCE

ENTRE

CERTAINES MÉTHODES D'EXTRACTION

DE LA RACINE CARRÉE

ET L'ALGORIHTME DES FRACTIONS CONTINUES

PAR M. LE D[r] SIGISMOND GÜNTHER
Professeur au Gymnase d'Ansbach (Bavière).

L'auteur de ces lignes s'occupe en ce moment d'un travail plus étendu, qui a pour but de soumettre à un examen critique les très nombreuses conjectures provenant des sources les plus diverses, relativement aux procédés d'extraction de la racine carrée chez les mathématiciens de l'antiquité, et d'amener ainsi cette question longtemps discutée à une conclusion finale aussi satisfaisante que possible. Dans cette étude plus générale, nous avons aussi rencontré quelques résultats intéressants au point de vue mathématique. En effet, tandis qu'un assez grand nombre de ceux qui ont traité cette question se sont décidés à admettre que les Grecs, dans l'un ou l'autre de leurs procédés, devaient avoir connaissance du développement d'une racine carrée en fraction continue (1), d'autres savants ont indiqué des méthodes complètement différentes de celle-là et présentant en apparence un caractère tout à fait élémentaire. Mais, en y regardant de plus près, on reconnaît aussi, pour chacune de ces dernières méthodes, qu'elles appartiennent aussi à la catégorie précédente,

---

(1) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig, 1880, t. I, p. 272.

1880 et 1881.

Les observations ont été reprises à Royan, avec un pèse-sel, à partir du mois de mai 1880 jusqu'au mois de mars 1881.

Les mêmes phénomènes ont été notés :

Diminution de salure aux quadratures, oscillations plus considérables pendant l'hiver que pendant l'été, et variations de densité non concordantes avec la direction des courants de marée.

En février 1881, un fait remarquable s'est produit : la *Sonora* dut quitter Royan et se rendre au Verdon; elle y passa deux jours et demi et revint à Royan : c'était cinq jours après la quadrature.

Février 1881. — Densités (par pèse-sel).

	ROYAN		LE VERDON			ROYAN		
Dates	11	12	12	13	14	14	15	16
Courant	»	»	»	»	»	»	J. 3h	»
8 h. matin	2°	2	»	1	1	»	2	1°5
4 h. soir	2	»	1°5	1	»	2·5	1°5	1°5
Courant	»	»	»	»	»	»	F. 5h	»
Haut. de marées	»	»	»	»	»	»	»	4m90

Les densités ont été moins fortes au Verdon qu'à Royan, et la faible salure a duré au moins 40 heures, pendant lesquelles les courants ont renversé sept fois dans les deux sens.

Il ressortirait de cette observation que les eaux du fleuve s'écoulent bien plus par la passe intérieure du Médoc, Richard-le-Verdon, que par la passe de Saintonge, Méchers-Royan. — Dans cette dernière passe, la salure y étant plus considérable et les oscillations de densité de marée moins fortes, il semble que le flot s'y ouvre un chemin plus facile et moins contesté; tandis que dans la passe du Médoc, les eaux du fleuve, s'y accumulant, offrent une plus vive résistance aux courants de flot.

Cette indépendance des courants sur les deux rives du fleuve a été observée et consignée par M. Manen, ingénieur hydrographe, dans ses reconnaissances de l'embouchure de la Gironde, en 1874 (pages 96, 102 et 106).

L'observation du 15 février montre encore les eaux moins

salées, après cinq heures de flot, qu'après trois heures et demie de jusant.

A partir du 23 mars 1881, les observations ont été reprises à Royan, avec un densimètre et les mois d'avril et de mai ont fourni des résultats parfaitement analogues aux précédents.

Les différences de densité qui ont été observées dans une même journée, peuvent amener, dans des points peu éloignés, des différences de niveau et provoquer des écoulements en travers du courant régnant, aussi bien dans les couches inférieures qu'à la surface.

Ainsi, puisque au Verdon on a pu constater des différences de densité allant à 5° pendant que les températures restaient constantes; que ces différences ont existé, soit d'une marée à l'autre, soit d'une rive à l'autre; comme la graduation du densimètre est telle que chaque degré représente une différence de poids d'un gramme par litre, il s'ensuit qu'à température égale : une colonne d'eau de 1 mètre, à 20° de densité, sera équilibrée par une colonne de $1^{m}005$ à 15° de densité. Or, au Verdon, la profondeur de l'eau est de 10 mètres; la colonne d'eau, à 15° de densité, pourrait avoir un niveau dépassant la colonne d'eau, 20° de densité, d'une épaisseur de *cinq centimètres*.

A Royan, où la profondeur est de 20 mètres, et où les variations de densité n'ont guère dépassé trois grammes par litre, la différence de niveau pour chaque mètre linéaire serait de 0,003; par conséquent, pour 20 mètres, la différence des niveaux serait encore de *six centimètres*.

La surface tendra donc à s'écouler des eaux les plus légères vers les eaux les plus lourdes, et cette surcharge fera que les eaux les plus lourdes, dans les couches inférieures, se répandront vers les eaux les plus légères. — Ce double mouvement peut expliquer quelques anomalies qui ont été signalées par le densimètre dans le jeu des courants de marée.

Ces courants obéissent à des lois qui sont encore peu expliquées.

et que leur principe fondamental ne diffère pas sensiblement de ceux qui servent de base à cette catégorie. Il n'est donc pas inutile de démontrer que les méthodes en question reposent uniquement sur un algorithme déguisé des fractions continues, quoique les inventeurs eux-mêmes de ces méthodes, partant d'un point de vue essentiellement différent, aient très bien pu laisser inaperçue la propriété dont il s'agit. Cette démonstration sera développée dans les pages suivantes, pour le procédé proposé par Mollweide (1) au commencement de ce siècle et pour celui qu'a indiqué Alexéief (2) dans ces derniers temps.

I. — La méthode de Mollweide.

Mollweide rattache ses considérations à ce fait, qu'Archimède a connu l'inégalité

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

et par suite aussi la 9e et la 12e des fractions réduites des développements en fractions continues connus

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2+2} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cdots}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}};$$

car la suite des fractions réduites du second développement est effectivement la suivante :

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780} \cdots$$

Or, il ne serait certainement pas admissible de supposer qu'Archimède fût réellement arrivé par cette voie aux valeurs qu'il indique ; il est bien plus probable qu'il y aura été conduit

(1) Mollweide, *Commentationes mathematico-philologicæ tres.* Lipsiæ, 1813, p. 74 sqq.

(2) Alexéief, *Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre* (*Bull. de la Soc. Mathém de France*, t. VII, p. 167 sqq).

par le raisonnement suivant. Soit, dans la figure ci-jointe, $AC = 1$ un rayon du cercle, CB une perpendiculaire sur AC, et l'angle $BAC = 30°$; soit enfin D le point de rencontre de AB avec la circonférence. Soit alors $BC = p$, $BD = u$, $BC - BD = v$; on aura, par les principes de la géométrie,

$$\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{2p-u}{p} = \frac{p+v}{p}.$$

En s'appuyant simplement sur des transformations de proportions non expliquées, mais de même nature en tous cas que celles qui étaient familières aux anciens géomètres, Mollweide parvient aux relations suivantes :

$$\frac{1}{p} = \frac{7p-2u}{4p-1u} = \frac{26p-7u}{15p-4u} = \frac{97p-26u}{56p-15u} = \frac{362p-97u}{209p-56u} = \frac{1351p-362u}{780p-209u} = \cdots$$

A ces équations il ajoute encore les suivantes, obtenues d'une manière analogue :

$$\frac{1}{p} = \frac{19p+7v}{11p+4v} = \frac{71p+26v}{41p+15v} = \frac{265p+97v}{153p+56v} = \frac{989p+362v}{571p+209v} = \cdots$$

dès lors il lui est naturellement facile d'établir l'exactitude des inégalités

$$\frac{1}{p} < \frac{26}{15} < \frac{97}{56} < \frac{362}{209} < \frac{1351}{780} \cdots,$$

$$\frac{1}{p} > \frac{19}{11} > \frac{71}{41} > \frac{265}{153} > \frac{989}{571} \cdots.$$

Mais on reconnaît maintenant sans peine que l'on a affaire ici à deux théorèmes tout à fait généraux sur une fraction continue présentant cette période à deux termes,

$$K = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}},$$

et que, d'après cela, ces deux théorèmes doivent admettre aussi une démonstration indépendante du procédé de Mollweide, fondé principalement sur l'induction. Nous formulerons ces deux théorèmes comme il suit :

Théorème I. — Si l'on désigne par $\frac{P_k}{Q_k}$ la $k^{\text{ième}}$ réduite de K $\left(\text{en posant } \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}\right)$, on aura toujours l'identité

$$\frac{\frac{P_{2k}}{\sqrt{3}} - P_{2k-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{Q_{2k}}{\sqrt{3}} - Q_{2k-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}} = \frac{\frac{P_{2k-2}}{\sqrt{3}} - P_{2k-4} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{Q_{2k-2}}{\sqrt{3}} - Q_{2k-4} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}}.$$

Théorème II. — Dans la même hypothèse, on aura toujours

$$\frac{\frac{P_{2k+1}}{\sqrt{3}} + P_{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{Q_{2k+1}}{\sqrt{3}} + Q_{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{P_{2k-1}}{\sqrt{3}} + P_{2k-2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{Q_{2k-1}}{\sqrt{3}} + Q_{2k-2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Bien qu'il ne fût pas difficile d'établir la vérité de ces formules immédiatement par la voie récurrente, il nous semble cependant préférable de démontrer d'abord quelques propositions auxiliaires qui, par elles-mêmes, ne sont pas sans intérêt pour la théorie de la fraction continue K, et à l'aide desquelles on peut démontrer immédiatement les théorèmes I et II.

Lemme I. — On a toujours

$$P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k} = -1.$$

Car, des formules récurrentes connues, auxquelles sont assujetties les quantités P et Q,

$$P_{2k} = P_{2k-1} + P_{2k-2}, \quad P_{2k-2} = P_{2k} - P_{2k-1},$$
$$Q_{2k} = Q_{2k-1} + Q_{2k-2}, \quad Q_{2k-2} = Q_{2k} - Q_{2k-1},$$

on tire immédiatement

$$P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k} = -1.$$

Lemme II. — On a toujours

$$P_{2k}Q_{2k-4} - P_{2k-4}Q_{2k} = -4.$$

On vérifie cette égalité en se servant des formules

$$P_{2k-4} = P_{2k-2} - P_{2k-3},\quad P_{2k-3} = P_{2k-1} - 2P_{2k-2},$$
$$Q_{2k-4} = Q_{2k-2} - Q_{2k-3},\quad Q_{2k-3} = Q_{2k-1} - 2Q_{2k-2}.$$

En portant dans la première série les valeurs de P_{2k-3} et de Q_{2k-3} résultant de la seconde série, on trouve, comme plus haut,

$$\begin{aligned} P_{2k}Q_{2k-4} - P_{2k-4}Q_{2k} &= P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k} - P_{2k}Q_{2k-3} + P_{2k-3}Q_{2k} \\ &= -1 - (P_{2k}Q_{2k-3} - P_{2k-3}Q_{2k}) \\ &= -1 - [P_{2k}(Q_{2k-1} - 2Q_{2k-2}) - Q_{2k}(P_{2k-1} - 2P_{2k-2})] \\ &= -1 - [(P_{2k}Q_{2k-1} - P_{2k-1}Q_{2k}) - 2(P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k})] \\ &= -1 - (1+2) = -4, \end{aligned}$$

ainsi qu'il résulte du premier lemme démontré.

Lemme III. — On a toujours

$$P_{2k+1}Q_{2k-1} - P_{2k-1}Q_{2k+1} = 2.$$

Le calcul direct donne, en vertu de la formule récurrente qui précède,

$$\begin{aligned} P_{2k+1}Q_{2k-1} - P_{2k-1}Q_{2k+1} &= P_{2k+1}Q_{2k+1} - 2P_{2k+1}Q_{2k} - P_{2k+1}Q_{2k+1} + 2P_{2k}Q_{2k+1} \\ &= -2(P_{2k+1}Q_{2k} - P_{2k}Q_{2k+1}) = +2. \end{aligned}$$

Lemme IV. — On a toujours

$$P_{2k+1}Q_{2k-2} - P_{2k-1}Q_{2k} = -1.$$

Pour démontrer cette proposition, un peu moins simple que les précédentes, considérons les cinq équations

$$\begin{array}{lll} (1) & P_{2k+1} = 2P_{2k} + P_{2k-1}, & Q_{2k} = Q_{2k-1} + Q_{2k-2}, \\ (2) & P_{2k} = P_{2k-1} + P_{2k-2}, & Q_{2k-1} = 2Q_{2k-2} + Q_{2k-3}, \\ (3) & P_{2k-1} = 2P_{2k-2} + P_{2k-3}, & Q_{2k-2} = Q_{2k-3} + Q_{2k-4}, \\ (4) & P_{2k-2} = P_{2k-3} + P_{2k-4}, & Q_{2k-3} = 2Q_{2k-4} + Q_{2k-5}, \\ (5) & P_{2k-3} = 2P_{2k-4} + P_{2k-5}, & Q_{2k-4} = Q_{2k-5} + Q_{2k-6}. \end{array}$$

Au moyen des trois équations (3), (4) et (5), déterminons P_{2k-1},

P_{2k-2}, P_{2k-4}, Q_{2k-3} et Q_{2k-1}, au moyen des autres quantités P et Q; on obtient ainsi

$$(6)\quad \begin{cases} P_{2k-4} = \dfrac{P_{2k-3} - P_{2k-5}}{2}, & Q_{2k-5} = Q_{2k-4} - Q_{2k-6}, \\ P_{2k-2} = \dfrac{3P_{2k-3} - P_{2k-5}}{2}, & Q_{2k-3} = 3Q_{2k-4} - Q_{2k-6}, \\ P_{2k-1} = 4P_{2k-3} - P_{2k-5}, & Q_{2k-2} = 4Q_{2k-4} - Q_{2k-6}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans (2), on a

$$(7)\quad P_{2k} = \frac{11P_{2k-3} - 3P_{2k-5}}{2}, \qquad Q_{2k-1} = 11Q_{2k-4} - 3Q_{2k-6}.$$

Ces valeurs, substituées dans (1), donnent

$$(8)\quad P_{2k+1} = 15P_{2k-3} - 4P_{2k-5}, \qquad Q_{2k} = 15Q_{2k-4} - 4Q_{2k-6}.$$

En ayant égard à (7) et à (8), il vient

$$\begin{aligned} P_{2k+1}Q_{2k-2} - P_{2k-1}Q_{2k} &= 60P_{2k-3}Q_{2k-4} - 15P_{2k-3}Q_{2k-6} - 16P_{2k-5}Q_{2k-4} + 4P_{2k-5}Q_{2k-6} \\ &\quad - 60P_{2k-3}Q_{2k-4} + 15P_{2k-5}Q_{2k-4} + 16P_{2k-3}Q_{2k-6} - 4P_{2k-5}Q_{2k-6} \\ &= P_{2k-3}Q_{2k-6} - P_{2k-5}Q_{2k-4}. \end{aligned}$$

Cette différence est par conséquent constante, et comme on a (voir plus haut), pour $k = 2$,

$$P_5Q_2 - P_3Q_4 = 19.1 - 5.4 = -1,$$

il faut que l'on ait aussi, en général,

$$P_{2k+1}Q_{2k-2} - P_{2k-1}Q_{2k} = -1.$$

Par une marche analogue, on vérifiera enfin que :

Lemme V. — On a toujours

$$P_{2k}Q_{2k-1} - P_{2k-2}Q_{2k+1} = -1.$$

A l'aide de ces lemmes, passons maintenant à la démonstration des théorèmes énoncés plus haut.

Démonstration du théorème I. — A l'équation identique

$$-3 - 3(7 - 4\sqrt{3}) + 12(2 - \sqrt{3}) = 0,$$

on peut, d'après les lemmes I et II, donner la forme suivante :

$$3(P_{2k}Q_{2k-2}-P_{2k-2}Q_{2k})-3(2-\sqrt{3})(P_{2k}Q_{2k-4}-P_{2k-4}Q_{2k})$$
$$+3(7-4\sqrt{3})(P_{2k-2}Q_{2k-1}-P_{2k-4}Q_{2k-2})=0.$$

En développant, et ajoutant de part et d'autre

$$(3\sqrt{3}-6)P_{2k-2}Q_{2k-2},$$

chacun des deux membres de l'égalité pourra se mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs; on a, en effet,

$$(\sqrt{3}P_{2k}-2\sqrt{3}P_{2k-2}+3P_{2k-2})(\sqrt{3}Q_{2k-2}-2\sqrt{3}Q_{2k-1}+3Q_{2k-4})$$
$$=(\sqrt{3}P_{2k-2}-2\sqrt{3}P_{2k-4}+3P_{2k-1})(\sqrt{3}Q_{2k}-2\sqrt{3}Q_{2k-2}+3Q_{2k-2}).$$

Par une division convenable, cette égalité prend immédiatement la forme proposée.

Démonstration du théorème II. — Partons cette fois de l'identité

$$2-(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)-2(2-\sqrt{3})=0.$$

et donnons-lui, en vertu des lemmes III, IV, V et I, la forme suivante :

$$P_{2k+1}Q_{2k-1}-P_{2k-1}Q_{2k+1}+(\sqrt{3}-1)(P_{2k+1}Q_{2k-2}-P_{2k-1}Q_{2k})$$
$$+(\sqrt{3}-1)(P_{2k}Q_{2k-1}-P_{2k-2}Q_{2k+1})$$
$$+2(2-\sqrt{3})(P_{2k}Q_{2k-2}-P_{2k-2}Q_{2k})=0.$$

En développant et réduisant convenablement, on obtiendra la nouvelle égalité

$$(P_{2k+1}+\sqrt{3}P_{2k}-P_{2k})(Q_{2k-1}+\sqrt{3}Q_{2k-2}-Q_{2k-2})$$
$$=(P_{2k-1}+\sqrt{3}P_{2k-2}-P_{2k-2})(Q_{2k+1}+\sqrt{3}Q_{2k}-Q_{2k}),$$

la même précisément qu'on déduirait du théorème II, en chassant les dénominateurs.

Nous ne nous sommes donc pas trop avancés en affirmant plus haut que le procédé de Mollweide reposait en dernière analyse sur un algorithme de fractions continues. Tandis que le mode de déduction de ce géomètre, malgré son incontestable élégance, ne

laisse pas de produire une impression d'autant moins satisfaisante que l'on ne peut se rendre compte pourquoi l'on a employé tel ou tel artifice plutôt que tel ou tel autre, les deux théorèmes auxquels Mollweide ramène les valeurs approximatives d'Archimède (1), se présentent ici comme de simples corollaires de propositions connues de la théorie des fractions continues.

II. — La méthode d'Alexéief.

A première vue, le procédé du géomètre russe favorise, encore à un plus haut degré que celui de Mollweide dont nous venons de parler, l'opinion que ce procédé n'a absolument rien de commun avec les développements connus d'une racine carrée en fraction continue. Alexéief, comme on sait, pour extraire la racine carrée d'un nombre premier N, part de la double inégalité

$$1 < \sqrt{N} < N,$$

et pose ensuite

$$\frac{2N}{N+1} < \sqrt{N} < \frac{N+1}{2}.$$

L'introduction des valeurs

$$\frac{2N}{N+1} = b_1, \qquad \frac{N+1}{2} = a_1$$

donne les nouvelles inégalités

$$\frac{2N}{a_1 + b_1} < \sqrt{N} < \frac{a_1 + b_1}{2},$$

(1) Gauss, dans le compte-rendu d'ailleurs très bienveillant qu'il a donné du travail de Mollweide (*), remarque avec raison que, lors même que les conclusions de ce travail eussent été en réalité celles d'Archimède, ce géomètre n'aurait certainement pas manqué de reconnaître aussi lesquelles des valeurs données par les deux séries qui comprennent entre elles $\sqrt{3}$ pouvaient être considérées à peu près comme également exactes. Mais qu'il eût passé directement, en omettant $\frac{362}{209}$, à la valeur $\frac{1351}{780}$ en tous cas moins facile à traiter, c'est ce que l'on aurait peine à s'expliquer s'il eût suivi la marche que lui attribue Mollweide.

(*) Gauss, *Recension zu Mollweide* (*Götting. gel. Anzeigen*, 1803, p. 11).

et, si l'on pose, en général,

$$\frac{2N}{a_{n-1}+b_{n-1}} = b_n, \quad \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = a_n,$$

on aura encore de nouveau

$$\frac{2N}{a_n+b_n} < \sqrt{N} < \frac{a_n+b_n}{2}.$$

Pour $a_n = \frac{P'_n}{Q'_n}$, on obtient les équations récurrentes

$$P'_n = P'^2_{n-1} + NQ'^2_{n-1},$$
$$Q'_n = 2P'_{n-1}Q'_{n-1}.$$

Déjà C. Henry (¹) a remarqué que cette méthode ne peut être considérée comme entièrement nouvelle, et que, au contraire, plusieurs mathématiciens s'en sont déjà servis. Il fait observer, en particulier, qu'elle ne peut se déduire avec facilité des formules extrêmement générales établies par Éd. Lucas dans son travail connu sur les fondements algébriques de la Goniométrie (²). Tels sont les faits; toutefois nous n'insisterons pas beaucoup là-dessus, Éd. Lucas n'ayant pas indiqué lui-même ce cas particulier de ses formules. Mais, en dehors de ce travail, nous pouvons augmenter presque indéfiniment le nombre des précurseurs d'Alexéief, comme il résultera du tableau que nous avons dressé, qui contient aussi les quelques noms cités par Henry. Il faut toutefois distinguer dans ces précurseurs deux catégories. A la première appartiennent seulement deux hommes, poursuivant le même but qu'Alexéief, savoir, de renfermer indéfiniment la racine carrée entre une moyenne harmonique et une moyenne arithmétique. Ces deux hommes sont le danois Oppermann, au sujet duquel nous empruntons nos renseignements au livre de Heiberg (³), et un autre danois, Steen, qui a développé encore davantage l'idée de son

---

(¹) C. Henry, *Sur une valeur approchée de* $\sqrt{2}$ *et sur deux approximations de* $\sqrt{3}$ (*Bull. des Sciences math. et astron.*, 2ᵉ série, t. III, 1ʳᵉ part., p. 515 et suiv.).

(²) Éd. Lucas, *Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*American journal of Mathematics*, vol. I, 1878, p. 225).

(³) Heiberg, *Quæstiones Archimedeæ*, Hauniæ, 1879, p. 65.

et que, d'après cela, ces deux théorèmes doivent admettre aussi une démonstration indépendante du procédé de Mollweide, fondé principalement sur l'induction. Nous formulerons ces deux théorèmes comme il suit :

Théorème I. — Si l'on désigne par $\frac{P_k}{Q_k}$ la $k^{\text{ième}}$ réduite de K $\left(\text{en posant } \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}\right)$, on aura toujours l'identité

$$\frac{\frac{P_{2k}}{\sqrt{3}} - P_{2k-2}.\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{Q_{2k}}{\sqrt{3}} - Q_{2k-2}.\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} = \frac{\frac{P_{2k-2}}{\sqrt{3}} - P_{2k-4}.\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{Q_{2k-2}}{\sqrt{3}} - Q_{2k-4}.\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}.$$

Théorème II. — Dans la même hypothèse, on aura toujours

$$\frac{\frac{P_{2k+1}}{\sqrt{3}} + P_{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{Q_{2k+1}}{\sqrt{3}} + Q_{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{P_{2k-1}}{\sqrt{3}} + P_{2k-2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{Q_{2k-1}}{\sqrt{3}} + Q_{2k-2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Bien qu'il ne fût pas difficile d'établir la vérité de ces formules immédiatement par la voie récurrente, il nous semble cependant préférable de démontrer d'abord quelques propositions auxiliaires qui, par elles-mêmes, ne sont pas sans intérêt pour la théorie de la fraction continue K, et à l'aide desquelles on peut démontrer immédiatement les théorèmes I et II.

Lemme I. — On a toujours

$$P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k} = -1.$$

Car, des formules récurrentes connues, auxquelles sont assujetties les quantités P et Q,

$$P_{2k} = P_{2k-1} + P_{2k-2}, \quad P_{2k-2} = P_{2k} - P_{2k-1},$$
$$Q_{2k} = Q_{2k-1} + Q_{2k-2}, \quad Q_{2k-2} = Q_{2k} - Q_{2k-1},$$

on tire immédiatement

$$P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k} = -1.$$

Lemme II. — On a toujours

$$P_{2k}Q_{2k-4} - P_{2k-4}Q_{2k} = -4.$$

On vérifie cette égalité en se servant des formules

$$P_{2k-4} = P_{2k-2} - P_{2k-3},\quad P_{2k-3} = P_{2k-1} - 2P_{2k-2},$$
$$Q_{2k-4} = Q_{2k-2} - Q_{2k-3},\quad Q_{2k-3} = Q_{2k-1} - 2Q_{2k-2}.$$

En portant dans la première série les valeurs de P_{2k-3} et de Q_{2k-3} résultant de la seconde série, on trouve, comme plus haut,

$$\begin{aligned} P_{2k}Q_{2k-4} - P_{2k-4}Q_{2k} &= P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k} - P_{2k}Q_{2k-3} + P_{2k-3}Q_{2k} \\ &= -1 - (P_{2k}Q_{2k-3} - P_{2k-3}Q_{2k}) \\ &= -1 - [P_{2k}(Q_{2k-1} - 2Q_{2k-2}) - Q_{2k}(P_{2k-1} - 2P_{2k-2})] \\ &= -1 - [(P_{2k}Q_{2k-1} - P_{2k-1}Q_{2k}) - 2(P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k})] \\ &= -1 - (1+2) = -4, \end{aligned}$$

ainsi qu'il résulte du premier lemme démontré.

Lemme III. — On a toujours

$$P_{2k+1}Q_{2k-1} - P_{2k-1}Q_{2k+1} = 2.$$

Le calcul direct donne, en vertu de la formule récurrente qui précède,

$$\begin{aligned} P_{2k+1}Q_{2k-1} - P_{2k-1}Q_{2k+1} &= P_{2k+1}Q_{2k+1} - 2P_{2k+1}Q_{2k} - P_{2k+1}Q_{2k+1} + 2P_{2k}Q_{2k+1} \\ &= -2(P_{2k+1}Q_{2k} - P_{2k}Q_{2k+1}) = +2. \end{aligned}$$

Lemme IV. — On a toujours

$$P_{2k+1}Q_{2k-2} - P_{2k-1}Q_{2k} = -1.$$

Pour démontrer cette proposition, un peu moins simple que les précédentes, considérons les cinq équations

$$\begin{array}{lll} (1) & P_{2k+1} = 2P_{2k} + P_{2k-1}, & Q_{2k} = Q_{2k-1} + Q_{2k-2}, \\ (2) & P_{2k} = P_{2k-1} + P_{2k-2}, & Q_{2k-1} = 2Q_{2k-2} + Q_{2k-3}, \\ (3) & P_{2k-1} = 2P_{2k-2} + P_{2k-3}, & Q_{2k-2} = Q_{2k-3} + Q_{2k-4}, \\ (4) & P_{2k-2} = P_{2k-3} + P_{2k-4}, & Q_{2k-3} = 2Q_{2k-4} + Q_{2k-5}, \\ (5) & P_{2k-3} = 2P_{2k-4} + P_{2k-5}, & Q_{2k-4} = Q_{2k-5} + Q_{2k-6}. \end{array}$$

Au moyen des trois équations (3), (4) et (5), déterminons P_{2k-1},

P_{2k-2}, P_{2k-4}, Q_{2k-3} et Q_{2k-1}, au moyen des autres quantités P et Q; on obtient ainsi

$$(6)\quad \begin{cases} P_{2k-4} = \dfrac{P_{2k-3} - P_{2k-5}}{2}, & Q_{2k-5} = Q_{2k-4} - Q_{2k-6}, \\ P_{2k-2} = \dfrac{3P_{2k-3} - P_{2k-5}}{2}, & Q_{2k-3} = 3Q_{2k-4} - Q_{2k-6}, \\ P_{2k-1} = 4P_{2k-3} - P_{2k-5}, & Q_{2k-2} = 4Q_{2k-4} - Q_{2k-6}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans (2), on a

$$(7)\quad P_{2k} = \frac{11P_{2k-3} - 3P_{2k-5}}{2}, \qquad Q_{2k-1} = 11Q_{2k-4} - 3Q_{2k-6}.$$

Ces valeurs, substituées dans (1), donnent

$$(8)\quad P_{2k+1} = 15P_{2k-3} - 4P_{2k-5}, \qquad Q_{2k} = 15Q_{2k-4} - 4Q_{2k-6}.$$

En ayant égard à (7) et à (8), il vient

$$\begin{aligned} P_{2k+1}Q_{2k-2} - P_{2k-1}Q_{2k} &= 60P_{2k-3}Q_{2k-4} - 15P_{2k-3}Q_{2k-6} - 16P_{2k-5}Q_{2k-4} + 4P_{2k-5}Q_{2k-6} \\ &\quad - 60P_{2k-3}Q_{2k-4} + 15P_{2k-5}Q_{2k-4} + 16P_{2k-3}Q_{2k-6} - 4P_{2k-5}Q_{2k-6} \\ &= P_{2k-3}Q_{2k-6} - P_{2k-5}Q_{2k-4}. \end{aligned}$$

Cette différence est par conséquent constante, et comme on a (voir plus haut), pour $k = 2$,

$$P_5Q_2 - P_3Q_4 = 19.\,1 - 5.\,4 = -1,$$

il faut que l'on ait aussi, en général,

$$P_{2k+1}Q_{2k-2} - P_{2k-1}Q_{2k} = -1.$$

Par une marche analogue, on vérifiera enfin que :

Lemme V. — On a toujours

$$P_{2k}Q_{2k-1} - P_{2k-2}Q_{2k+1} = -1.$$

A l'aide de ces lemmes, passons maintenant à la démonstration des théorèmes énoncés plus haut.

Démonstration du théorème I. — A l'équation identique

$$-3 - 3(7 - 4\sqrt{3}) + 12(2 - \sqrt{3}) = 0,$$

on peut, d'après les lemmes I et II, donner la forme suivante :

$$3(P_{2k}Q_{2k-2}-P_{2k-2}Q_{2k})-3(2-\sqrt{3})(P_{2k}Q_{2k-1}-P_{2k-1}Q_{2k})$$
$$+3(7-4\sqrt{3})(P_{2k-2}Q_{2k-1}-P_{2k-1}Q_{2k-2})=0.$$

En développant, et ajoutant de part et d'autre

$$(3\sqrt{3}-6)P_{2k-2}Q_{2k-2},$$

chacun des deux membres de l'égalité pourra se mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs ; on a, en effet,

$$(\sqrt{3}P_{2k}-2\sqrt{3}P_{2k-2}+3P_{2k-2})(\sqrt{3}Q_{2k-2}-2\sqrt{3}Q_{2k-1}+3Q_{2k-1})$$
$$=(\sqrt{3}P_{2k-2}-2\sqrt{3}P_{2k-1}+3P_{2k-1})(\sqrt{3}Q_{2k}-2\sqrt{3}Q_{2k-2}+3Q_{2k-2}).$$

Par une division convenable, cette égalité prend immédiatement la forme proposée.

Démonstration du théorème II. — Partons cette fois de l'identité

$$2-(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)-2(2-\sqrt{3})=0.$$

et donnons-lui, en vertu des lemmes III, IV, V et I, la forme suivante :

$$P_{2k+1}Q_{2k-1}-P_{2k-1}Q_{2k+1}+(\sqrt{3}-1)(P_{2k+1}Q_{2k-2}-P_{2k-1}Q_{2k})$$
$$+(\sqrt{3}-1)(P_{2k}Q_{2k-1}-P_{2k-2}Q_{2k+1})$$
$$+2(2-\sqrt{3})(P_{2k}Q_{2k-2}-P_{2k-2}Q_{2k})=0.$$

En développant et réduisant convenablement, on obtiendra la nouvelle égalité

$$(P_{2k+1}+\sqrt{3}P_{2k}-P_{2k})(Q_{2k-1}+\sqrt{3}Q_{2k-2}-Q_{2k-2})$$
$$=(P_{2k-1}+\sqrt{3}P_{2k-2}-P_{2k-2})(Q_{2k+1}+\sqrt{3}Q_{2k}-Q_{2k}),$$

la même précisément qu'on déduirait du théorème II, en chassant les dénominateurs.

Nous ne nous sommes donc pas trop avancés en affirmant plus haut que le procédé de Mollweide reposait en dernière analyse sur un algorithme de fractions continues. Tandis que le mode de déduction de ce géomètre, malgré son incontestable élégance, ne

approfondie de Favaro. En dehors de Pacioli (1), antérieurement auquel, comme nous l'avons déjà dit, on n'a encore pu jusqu'ici rien signaler ayant trait à cette méthode, Favaro l'a trouvée chez Cardan (2), chez Lazisio (3), Tartaglia (4), Ghaligai (5), et Unicorno (6), de sorte qu'elle doit avoir été tout à fait familière aux arithméticiens italiens du XVIe siècle. Nous ajoutons, pour compléter cette liste, que Buzengeiger (7) a pu interpréter géométriquement, tout à fait dans le même sens, une construction géométrique donnée par Commandino (8) dans son célèbre commentaire sur Archimède. Parmi les géomètres modernes, c'est principalement J. Bertrand qui a remis en mémoire cette règle retombée dans l'oubli, et qui en a montré l'utilité pour le calcul des irrationnelles du second degré (9). Entraîné par cet exemple, le prince Boncompagni (10) a donné l'impulsion aux travaux déjà cités de Moret-Blanc et de l'auteur du présent écrit.

Nous croyons, dans les pages qui précèdent, avoir atteint notre but, qui était de faire rentrer aussi la méthode d'Alexéief dans la classe des algorithmes de fractions continues déguisés. Il nous semble cependant devoir encore attirer particulièrement l'attention de nos lecteurs sur ce point, que nos recherches ne contiennent pas la mondre critique contre le travail du géomètre russe. Le texte entier de son Mémoire témoigne du caractère entièrement personnel de l'œuvre, et par les matières qu'il contient, surtout

---

(1) FAVARO, *Notizie storiche sulle frazioni continue* (*Bullet. di Bibliogr. e di Storia delle Sc. math. e fis.*, t. VII, p. 478 sqq.).

(2) *Ibid.*, p. 490 sqq.

(3) *Ibid.*, p. 487 sqq.

(4) *Ibid.*, p. 491 sqq.

(5) *Ibid.*, p. 484 sqq.

(6) *Ibid.*, p. 498 sqq.

(7) BUZENGEIGER, *Methode der griechischen Geometer, um für Wurzeln solcher Zahlen, die keine Quadratwurzeln sind, annähernde rationale Brüche zu finden* (*Zeitschrift f. Astron. u. verw. Wissensch.*, t. V, p. 90).

(8) *Archimedis opera nonnulla a* FEDERICO COMMANDINO *Urbinate nuper in latinum conversa et commentariis illustrata*. Venetiis, 1558, fol. 8.

(9) J. BERTRAND, *Traité d'Arithmétique*, 4e édition. Paris, 1867, p. 247.

(10) B. BONCOMPAGNI, Question 1111. *Nouv. Ann. de Math.*, 2e Sér., t. XII, p. 191.

par les applications que l'auteur en a faites à des questions arithmologiques, les recherches de M. Alexéief seront d'un vif intérêt pour ceux-là mêmes qui ont déjà puisé à d'autres sources les principes de cette méthode.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE

DES

LOIS DE DALTON

RELATIVES A L'ÉVAPORATION DES LIQUIDES

PAR M. E. LAVAL

INTRODUCTION

Il n'existe sur l'évaporation des liquides, considérée au point de vue général, d'autres expériences que celles de Dalton. Quoique elles paraissent avoir été exécutées un peu sommairement, et que, dans l'idée de leur auteur, elles n'eussent sans doute d'autre but que de donner une première idée du phénomène, leurs résultats font encore foi en physique, parce qu'ils sont les seuls.

Voici ces résultats (¹) :

1ʳᵉ Loi. — *La quantité de liquide évaporée est proportionnelle à la surface du liquide.*

Ce principe est évident *à priori*.

2ᵐᵉ Loi. — L'évaporation augmente avec la nature du liquide : *Elle est proportionnelle à la force élastique maximum de la vapeur pour cette température.*

Dalton a opéré sur l'eau et l'alcool; les vases contenant ces liquides ont été chauffés jusqu'à des températures voisines des points d'ébullition.

3ᵉ Loi. — Si l'atmosphère ou, d'une manière générale, l'espace situé au-dessus du liquide renferme déjà de la vapeur de ce même liquide, l'*évaporation est proportionnelle à la différence entre la*

(¹) *Annales de Gilbert*, t. XV.

tension maximum et la tension actuelle de la vapeur dans cet espace.

Il paraît bien évident, en lisant cet énoncé, qu'il s'agit de la tension maximum relative à la température de l'atmosphère. Dans les applications à l'hygrométrie, on a l'habitude d'ajouter que, pour le cas de l'humidité extrême, cette différence se réduit à zéro, et l'évaporation s'arrête, ce qui est conforme à l'expérience. Mais d'un autre côté, on lit également dans la plupart des traités de physique, cette autre observation : dans le cas de l'air sec, la différence se réduisant à son premier terme, la 3e loi comprend la 2e comme cas particulier, ce qui suppose évidemment que la tension maximum est supposée être celle relative à la température du liquide. Il y a là une équivoque dont on croit se tirer en spécifiant que ces lois ne sont exactes qu'autant que la température du liquide et celle de l'air sont peu différentes (1).

Nous avons vu d'ailleurs que Dalton avait poussé la vérification de sa 2e loi jusqu'à des températures voisines du point d'ébullition et conséquemment notablement supérieures à la température de l'air. Cela suppose que les deux lois sont indépendantes l'une de l'autre; mais ici nous nous heurtons à un résultat contraire à l'expérience, car si l'évaporation est à la fois proportionnelle à F_t et à $(F_{t'} - f)$, dans le cas où $f = 0$ et $F_{t'} = F_t$, c'est-à-dire dans l'air sec et lorsque la température du liquide est la même que celle de l'air, l'évaporation devrait être proportionnelle à F_t^2, ce qui n'est pas vérifié par l'expérience. Il y a donc pour cette 3e loi un embarras d'appréciation qui demande une nouvelle vérification expérimentale.

4me Loi. — *L'évaporation est en raison inverse de la pression.*

Pour vérifier cette loi, Dalton s'est contenté de profiter des écarts de la pression ambiante.

---

(1) On lit dans le *Traité de physique* de MM. Drion et Fernet : « Cette loi n'est sensiblement exacte que si la différence des tensions n'est pas très considérable. »
M. Jamin, dans la dernière édition de son *Cours de physique*, a supprimé complètement la loi de la proportionnalité à la tension maximum du liquide, ce qui revient à considérer cette loi comme un cas particulier de la suivante.

Avant de décrire les expériences nouvelles que j'ai entreprises dans un but de vérification, il importe de bien définir le phénomène.

Si nous supposons un liquide de profondeur et de surface indéfinies, l'expérience prouve que la surface est en général le siège d'une transformation du liquide en vapeur, plus ou moins rapide, mais certainement *spontanée* (¹).

Les considérations par lesquelles M. Clausius a rattaché le phénomène général de la vaporisation à la théorie des gaz, donnent bien la raison de la plupart des causes modifiantes de l'évaporation, mais elles sont impuissantes à en montrer la cause déterminante et à en justifier la spontanéité.

D'après lui, en effet, les vitesses de translation des molécules du liquide étant inégales, il peut arriver accidentellement qu'à la surface certaines d'entre elles, échappant à la sphère d'action de leurs voisines, s'élancent dans l'espace situé au-dessus du liquide; on voit que la difficulté d'expliquer la spontanéité du phénomène n'est que reculée. Quelle est, en effet, cette cause accidentelle qui permet à une molécule de la surface d'échapper à la sphère d'action des molécules voisines? La théorie de la constitution des liquides n'en peut pas admettre dans un liquide en équilibre sous l'action de la pesanteur, et à surface rigoureusement horizontale. Il n'est pas possible, dans ce cas, à une molécule de la surface, d'échapper aux liens qui l'enchaînent à cette surface, sans troubler l'équilibre général; on en est donc réduit à invoquer une cause extérieure modifiant l'état d'équilibre, soit une agitation produisant à la surface de légers mouvements ondulatoires, soit une variation locale de température, source de courants superficiels.

On remarquera du reste que l'évaporation, une fois commencée sous une semblable influence, continuera d'elle-même, car elle a pour conséquence un abaissement de température de la surface, et par conséquent elle en trouble l'équilibre.

(¹) La profondeur et la surface indéfinies doivent s'entendre, en pratique, d'un liquide dont la masse soit assez grande pour que les petites variations de température qui sont la conséquence de l'évaporation ne viennent pas, à leur tour, modifier celle-ci pendant la durée de l'observation.

Laissant de côté cette origine obscure du phénomène, nous le prendrons tel qu'on l'observe en pleine activité, pour en déterminer les lois.

Mes expériences ont eu pour but d'étudier l'influence :

1° De la température du liquide (2e loi de Dalton);

2° De la température du gaz qui constitue l'atmosphère (sous pression constante) ;

3° De la pression du gaz (à température constante) (4e loi de Dalton) ;

4° De la vapeur de même espèce, déjà existant dans l'atmosphère (3e loi de Dalton).

Procédés d'expérimentation.

Le procédé le plus précis est sans contredit la méthode des pesées, la balance étant de tous les instruments de mesure celui qui donne l'approximation la plus grande. Mais comme il est utile de varier les procédés d'expérimentation, j'en ai imaginé un autre qui dans certains cas est d'une application plus commode.

Le vase évaporatoire A (*fig.* 1) est en communication au moyen d'un tube latéral non flexible avec un vase de Mariotte B, en verre, destiné à fournir au vase A de nouvelles quantités de liquides au fur et à mesure de l'abaissement du niveau de celui-ci. Le tube du vase de Mariotte est assez libre dans son bouchon pour qu'on puisse le soulever à volonté. On remplit de liquide le vase A, puis le vase B, et on place rapidement le bouchon de ce dernier ; on soulève alors graduellement le tube jusqu'à l'apparition de la première bulle. On conçoit que, à partir de ce moment, chaque bulle qui s'échappe correspond à un volume de liquide évaporé, et il semble qu'en comptant le nombre de bulles dans un temps donné ou mieux, en observant le temps écoulé entre deux bulles consécutives, on puisse être renseigné d'une manière très exacte et très précise sur la marche de l'évaporation. Mais, en pratique, on reconnaît que ce ne sont pas des bulles isolées, mais des séries de

bulles qui s'échappent du tube. En effet, la bulle qui grossit peu à peu à l'extrémité du tube doit, pour le quitter, vaincre une certaine adhérence, qui est d'autant plus grande que le tube est plus étroit et d'ailleurs plus considérable entre le verre et l'eau qu'entre un tube métallique et l'eau. Cet effort exige l'établissement d'une différence de niveau suffisante dont la pression hydrostatique lui fasse équilibre et même le dépasse. Or l'adhérence une fois vaincue, et l'air mis en mouvement, il faut remplacer le volume total qui correspond à la différence du niveau en question, volume qui est d'autant plus grand que la surface du vase évaporatoire est plus considérable. Une seule bulle ne suffisant pas, c'est une série qui va s'échapper. Chaque série doit être du même nombre de bulles, ce que l'expérience vérifie. Toutefois, les intervalles de temps qui sépareront l'apparition de deux séries consécutives seront bien en raison inverse des vitesses d'évaporation. Ce sont ces intervalles que j'observais (1).

J'avais déjà expérimenté ce procédé, lorsque j'eus connaissance d'un évaporomètre conçu d'après un plan analogue, que M. Dupré avait proposé au Congrès de météorologie de Vienne.

M. Dupré alimente également son vase évaporatoire avec un vase de Mariotte; mais celui-ci a la forme d'une burette étroite, et ce sont les volumes gazeux qu'il lit sur une graduation portée par cette burette (*fig.* 2).

J'ai employé ce procédé toujours dans un but de variation, et lorsque les circonstances le permettaient, conjointement avec le précédent. Voici, du reste, pour les deux, une discussion de leur dégré de précision.

En opérant avec l'appareil Dupré, qui permet de mesurer le volume d'une bulle, j'ai trouvé que, avec un tube de verre de $2^{mm}5$ de diamètre, la bulle vaut $0^{cc}089$; avec un tube métallique de $1^{mm}8$, elle vaut $0^{cc}059$.

(1) La multiplicité des bulles dans une série est un obstacle à une bonne observation. On réduit leur nombre à quatre ou cinq tout au plus en se servant d'un tube en cuivre et faisant communiquer le vase de Mariotte avec le vase évaporatoire par un tube court et très étroit.

Mon vase évaporatoire ayant une superficie de 7600 millimètres carrés, une bulle équivaut dans le premier cas à un abaissement de niveau de $0^{mm}011$, et; dans le second, à un abaissement de $0^{mm}008$.

Dans les expériences exécutées à l'aide de mon appareil, le temps était mesuré par les battements d'un petit pendule, donnant des tiers de seconde environ; il y en avait en moyenne 100 ou 200 à compter. Les résultats étaient donc des nombres de deux chiffres, le dernier douteux. Il faut remarquer, en outre, qu'au fur et à mesure que l'évaporation s'accélère, l'erreur relative augmente.

Dans les expériences exécutées à l'aide de l'appareil de M. Dupré, les observations devaient avoir une durée fixe; avec une burette étroite, les volumes lus pouvaient à la rigueur être représentés par des nombres de deux chiffres (le dernier douteux), mais l'erreur relative était ici plus considérable pour les évaporations les plus faibles.

Influence de la température du liquide.

J'ai opéré sur l'eau et j'ai employé successivement deux procédés : l'appareil de M. Dupré et mon évaporomètre à vase de Mariotte.

Expériences avec l'appareil de M. Dupré. — Le vase évaporatoire était en cuivre et pouvait être échauffé au moyen d'une lampe. Un thermomètre dont le réservoir occupait toute la hauteur du liquide en donnait la température. Un second, placé dans l'air, devait témoigner de la constance de la température de celui-ci. Un hygromètre était consulté de temps en temps dans un but analogue. Enfin des précautions étaient prises pour que les gaz chauds de la lampe ne vinssent pas se mélanger à l'air situé au-dessus du liquide. Les observations étaient continues, car l'échauffement de l'eau se faisait graduellement, mais en reculant ou approchant la lampe, on pouvait obtenir une température stationnaire pendant dix minutes, durée de chaque observation.

TEMPÉRATURE MOYENNE pendant la durée de chaque observation t	ÉVAPORATION e	TENSION MAXIMUM F_t
25	2,5	24 mill.
30	3,2	32
35	4,3	42
42	6,0	61
48	8,2	83
55	11,8	117

Les résultats montrent à simple vue que la 2e loi de Dalton se vérifie parfaitement. Le rapport des évaporations aux tensions maximum est constant.

La deuxième série d'observations que je donnerai a été obtenue au moyen de mon appareil à vase de Mariotte. La disposition générale était toujours la même.

TEMPÉRATURE t	TENSION MAXIMUM F_t	INTERVALLES observés $\frac{1}{e}$	PRODUITS $F_t \times \frac{1}{e}$
16	15,4	360	5544
24	22,2	257	5705
32	35,4	161	5699
40	54,9	104	5709
50	92,0	60	5520
45	71,4	80	5712
35	41,8	137	5728
30	31,5	181	5701

Les courbes ci-annexées (*fig.* 3) montrent le parallélisme complet de la marche de l'évaporation et de la force élastique. Pour construire celle de la deuxième série on a pris les inverses des intervalles, c'est-à-dire les vitesses d'évaporation elles-mêmes. La vérification de la loi est moins exacte en commençant dans la première série, parce que, dans ce cas, le mode d'expérimentation comporte une erreur relative plus grande; le contraire a lieu

pour la seconde série dont le mode d'expérimentation comporte une erreur relative plus grande dans les hautes températures (1).

Influence de la température du gaz.

La théorie de Clausius permet de prévoir que la présence d'un gaz étranger, dans l'espace où se rend la vapeur, retardera l'évaporation par suite des chocs qu'éprouveront au départ les molécules de vapeur rencontrant celles du gaz, chocs dont un certain nombre auront pour effet de renvoyer dans le liquide quelques-unes des molécules qui en étaient sorties. Ce retard de l'évaporation devra du reste augmenter avec la densité du gaz. Or, celle-ci se compose de trois éléments : la nature du gaz, sa température et sa pression. Examinons séparément l'influence de ces trois éléments. On peut prévoir que les gaz dont les molécules sont les plus ténues retarderont le moins l'évaporation.

Quant aux rôles de la température et de la pression, qu'il est difficile de séparer en pratique, il semble que l'influence de la température sous la pression constante soit très faible, car la dilatation a pour effet de diminuer le nombre des molécules qui circulent dans un espace donné, et au point de vue des chocs avec les molécules de vapeur, la rareté des molécules gazeuses peut compenser leur augmentation d'énergie.

Je décrirai d'abord mes expériences relatives à la température du gaz, qui confirment ces prévisions de la théorie.

Le vase évaporatoire taré d'avance était placé sur une cloche assez vaste déposée sur une plaque de fer pouvant être échauffée; deux petits thermomètres, placés l'un en haut, l'autre en bas de la cloche, parvenaient, au bout d'un certain temps, à une température identique. L'air intérieur était desséché par une couche de chaux vive répandue sur une plaque de fer.

---

(1) Ces expériences sur l'eau, vérifiant parfaitement une loi déjà universellement adoptée, je crois inutile de décrire celles que j'ai faites avec d'autres liquides (l'alcool et la benzine) et qui conduisent au même résultat.

Les expériences étaient forcément isolées, mais chaque série a été obtenue soit dans la même journée, soit dans un laps de temps pendant lequel la pression barométrique s'est trouvée constante.

Le vase évaporatoire placé sous la cloche portait avec lui un petit thermomètre. Rien n'empêchait de choisir la température du liquide aussi voisine de celle de l'air que l'on aurait voulu si ce n'est la nécessité d'obéir au précepte de la variation dans les expériences. Or, si la température du liquide était originairement beaucoup plus basse que celle de l'air, il y avait réchauffement pendant tout le temps de l'exposition dans la cloche. Ce réchauffement n'ayant jamais atteint plus de 2 ou 3 degrés, j'ai pu prendre sans erreur sensible pour la température du liquide, la moyenne entre les température initiale et finale (1); cette température servait à corriger les évaporations obtenues de la proportionnalité à la tension maximum du liquide en vertu de la première loi étudiée plus haut.

Éther (1re Série).

TEMPÉRATURE de l'air t'	TEMPÉRATURE du liquide t	ÉVAPORATION brute e	F_t	ÉVAPORATION corrigée $\frac{e}{F_t}$
10	10	0,46	286,40	0,00160
15	10	0,46	286,40	0,00160
22	15	0,57	353,62	0,00164
27	20	0,71	433,26	0,00164
30	25	0,85	526,93	0,00161
35	25	0,86	526,93	0,00163
40	25	0,88	526,93	0,00165

(1) Le réchauffement s'exerce surtout sur la surface du liquide. Il était à craindre que la température de celle-ci fût supérieure à la température des couches profondes. En choisissant un thermomètre à réservoir très petit et l'inclinant près de la surface, on pouvait espérer s'approcher davantage de sa véritable température.

Mais il y a une cause d'erreur beaucoup plus grande : la partie sèche des parois du vase s'échauffe aussi, de sorte qu'à la fin de l'expérience le pourtour de cette paroi (à l'intérieur) possède une température supérieure à celle du liquide, et quand on transporte ensuite le vase sur le plateau de la balance, le liquide, agité par ce mouvement, mouille cette paroi et s'y évapore rapidement, d'où une exagération dans le résultat. Cette cause d'erreur est importante à signaler, car on ne peut que l'atténuer par des précautions, sans la supprimer. Je faisais usage, dans le cas des liquides volatils, de vases en verre épais, peu susceptibles de s'échauffer notablement dans la durée de l'exposition.

Éther (2e Série).

t'	t	e	F_t	$\frac{e}{F_t}$
— 5	— 5	0,22	144,82	0,00152
— 3	0	0,28	183,34	0,00154
0	0	0,28	183,34	0,00154
+ 5	+ 5	0,33	230,11	0,00155
+ 8	+ 5	0,35	230,11	0,00155

Benzine

t'	t	e	F_t	$\frac{e}{F_t}$
14	15	0,340	60,02	0,00566
30	25	0,540	96,09	0,00571
37	30	0,680	119,89	0,00575
42	35	0,840	148,37	0,00566
51,5	40	1,035	182,27	0,00567

Il est impossible pour l'eau de conserver le même dispositif. La cloche des expériences précédentes qui pouvait être rapidement échauffée eût été trop peu vaste. On pouvait craindre que pendant la durée de l'expérience nécessairement plus longue, l'air arrivât à un état hygrométrique sensible, en dépit de la présence de l'acide sulfurique. Je l'ai remplacée par une caisse en bois de plus grande capacité, munie de thermomètres et de larges vases plats remplis d'acide sulfurique. A défaut de moyens rapides d'échauffement, j'ai dû me contenter des variations ambiantes de la température ; aussi toutes les expériences sont isolées et par conséquent ont été faites sous des pressions barométriques variables. Toutefois, comme les trop grands écarts ont été évités, les tableaux suivants les réunissent en deux groupes : 1° celles où la pression barométrique était de 758 millimètres à 760 ; 2° celles où cette pression s'est trouvée supérieure à 770 sans dépasser 775.

Il résulte du reste de ces résultats comme des précédents, que la température de l'atmosphère n'influe pas sur l'évaporation des

liquides, du moins d'une manière sensible à nos moyens d'observation.

Eau (1re Série).

t'	t	e	F_t	$\frac{e}{F_t}$
5	5	0,055	17,73	0,00310
10	10	0,075	24,20	0,00309
20	12,5	0, 090	23,66	0,00314
35	25	0,185	59,35	0,00311
39	30	0,241	78,49	0,00307

Eau (2e Série).

t'	t	e	F	$\frac{e}{F_t}$
— 3	0	0,035	12,83	0,00272
— 1	0	0,037	12,83	0,00287
— 0,5	0	0,037	12,83	0,00287
+ 4	0	0,039	12,83	0,00304
26	15	0,099	33,02	0,00302
36	30	0,230	78,49	0,00294

Influence de la pression de l'atmosphère.

La loi de Dalton universellement admise (la proportionnalité inverse de l'évaporation à la pression) n'a été vérifiée par son auteur qu'au moyen des variations ordinaires de la pression atmosphérique. J'ai repris cette vérification en l'étendant à des pressions variant depuis 100 millimètres jusqu'à 760.

L'appareil se compose (*fig. 4*) d'une cloche tubulée placée sur la platine d'une machine pneumatique. Un tube en caoutchouc épais partant du haut de la cloche la fait communiquer avec un manomètre formé d'un double tube; les deux branches étaient d'égal diamètre et les lectures se faisaient au moyen d'une échelle en centimètres placée entre elles, le zéro se trouvant vers le milieu comme dans le baromètre de Gay-Lussac.

Le vase évaporatoire, muni d'un petit thermomètre, était

disposé sous la cloche au-dessus d'un vase plat renfermant de l'acide sulfurique. Dans le cas des pressions très basses, ce vase ne m'ayant pas paru produire une absorption assez rapide de la vapeur, j'y ai adjoint quelques bandes de papier Joseph imbibées de cet acide et appliquées sur les parois de la cloche, où elles se maintenaient adhérentes.

Pour faire une opération, on tarait le vase évaporatoire sur la balance, puis on le plaçait sous la cloche et on amenait par quelques coups de piston la pression au degré voulu; on l'y maintenait en tenant fermé le robinet de la machine pendant un temps plus ou moins long, au bout duquel on laissait rentrer l'air et l'on rapportait le vase sur le plateau de la balance.

Il est certain que le temps employé à manœuvrer la pompe, et celui pendant lequel on fait rentrer l'air comptent dans la durée de l'expérience, et qu'alors les conditions ne sont plus les mêmes. Mais cette cause d'erreur était sensiblement négligeable, l'ensemble de ces opérations ne durant que 5 à 6 secondes au plus, sur 3 minutes au moins que durait l'exposition sous la cloche (1).

Dans le cas de l'eau, une précaution essentielle à prendre, c'était d'opérer avec de l'eau récemment bouillie. Il se produit, en effet, avec l'eau aérée un abondant départ de petites bulles qui activent évidemment l'évaporation.

Il était impossible de faire plus de deux ou trois observations consécutives; au bout de ce temps il reste de la vapeur d'eau dans l'atmosphère, l'acide sulfurique n'absorbe pas assez vite.

---

(1) Ce procédé d'expérimentation pourra paraître un peu grossier si on le compare à certaines recherches de physique qui exigent qu'on observe des dixièmes de millimètre dans les pressions et des centièmes de degré dans les températures; mais un examen scrupuleux des conditions mêmes de l'expérience montre que les moyens décrits ci-dessus donnent une approximation suffisante. En effet, vu la rapidité avec laquelle on doit lire la pression, transporter le liquide de la balance à la cloche et *vice-versa*, la pression ne peut être évaluée qu'à 2 ou 3 millimètres près. Inutile de s'occuper de correction de température ou de capillarité. L'évaporation est obtenue à 1 ou 2 milligrammes pour l'eau, à 1 centigramme seulement pour les liquides volatils. Il sera donc plus que suffisant d'observer la température du liquide à 1 degré près, le terme de correction F_t ne variant pas dans cet intervalle de manière à introduire une cause d'erreur sur ce chiffre.

Dans le cas des autres liquides, je ne faisais également pas plus de deux ou trois observations consécutives, afin de pouvoir négliger l'influence de la vapeur déjà répandue sous la cloche.

Comme il est impossible de s'astreindre à donner à toutes les expériences la même durée, ni de les faire à la même température, les résultats bruts que je donne ci-dessous sont transformés en *évaporations corrigées* c'est-à-dire divisés par la durée en minutes, et par la tension maximum (F,) relative à la température du liquide.

Dans le tableau suivant, relatif à l'eau, j'ai conservé les groupes d'observation ; dans chacun d'eux, j'ai commencé en général par une pression voisine de 760 millimètres ; chacun des groupes a servi séparément d'ailleurs à effectuer le calcul de l'exposant *n*, ainsi qu'il sera expliqué plus loin.

Expériences avec l'eau.

PRESSION	DURÉE en minutes	TEMPÉRATURE de l'eau	ÉVAPORATION brute	ÉVAPORATION corrigée	n
761mm	10m	19,0	0,141	0,000862	»
612	8	19,5	0,151	0,001119	1,193
426	10	19,5	0,288	0,001708	1,181
784	10	20,8	0,152	0,000831	»
327	6	20,5	0,252	0,002396	1,183
767	10	21,9	0,168	0,000859	»
569	6	21,7	0,140	0,001208	1,126
300	4	21,5	0,198	0,002595	1,178
520	9	17,7	0,237	0,001356	»
207	5	17,7	0,303	0,004020	1,179
759	10	22,0	0,166	0,000844	»
272	4	22,0	0,228	0,002899	1,199
145	4	21,7	0,472	0,006112	1,195
85	3	20,5	0,520	0,009266	1,095
577	7	20,3	0,149	0,001201	»
447	5	20,0	0,140	0,001610	1,147
764	10	17,5	0,126	0,000849	»
382	8	17,5	0,237	0,001965	1,210
142	5	17,5	0,448	0,006028	1,165
769	6	20,0	0,085	0,000821	»
119	4	19,5	0,472	0,006112	1,190
106	3	19,5	0,437	0,008639	1,188

Si l'on examine le tracé graphique qui résulte de ces diverses observations (*fig.* 5), on reconnaît qu'il s'éloigne notablement de l'hyperbole équilatère qui représenterait la loi de Dalton. Faute d'idée théorique qui conduise à une forme particulière de fonction, je proposerais de conserver en dénominateur le terme qui représente la pression, sauf à l'affecter d'un exposant qui sera calculé de la manière suivante :

On a pour l'évaporation e

$$e = \frac{A}{p^n}.$$

A étant une fonction des autres éléments variables dont nous ne nous occupons pas en ce moment, on en tire

$$\log e = \log A - n \log p.$$

Pour une autre pression,

$$\log e' = \log A - n \log p'.$$

Si donc n est réellement constant, on l'aura par la formule

$$n = \frac{\log e' - \log e}{\log p - \log p'}.$$

La moyenne des observations ci-dessus donne $n = 1{,}183$, et en supprimant la troisième figure comme douteuse

$$n = 1{,}18.$$

Les liquides plus volatils que l'eau ont été mis en expérience d'une manière un peu différente. Pour la plupart d'entre eux, les forces élastiques maximum ne sont connues que de 5 en 5 degrés; or elles varient assez rapidement pour qu'il eût été nécessaire d'observer la température à $\frac{1}{10}$ de degré. Le calcul d'interpolation exigé par la correction à faire n'aurait pas reposé, dans ce cas, sur une base expérimentale suffisamment sûre, et j'ai préféré grouper mes expériences en séries d'un petit nombre, en prenant toutes les précautions nécessaires pour opérer à la même température. Le liquide se refroidissant à chaque opération (de 1 ou

2 degrés au plus), je le renouvelais, et je ne considérais l'observation comme bonne que si la moyenne de température, avant et après, était la même.

J'ai trouvé ainsi que l'exposant n est pour les liquides ci-dessous :

Alcool vinique...........	1,08
Alcool méthylique........	1,08
Benzine..................	0,66
Éther....................	0,61

PRESSION en millimètres	DURÉE en minutes	ÉVAPORATION brute	ÉVAPORATION par minute	n
Expériences avec l'alcool vinique.				
761	12	0,38	0,031	»
571	10	0,42	0,042	1,057
351	6	0,51	0,085	1,052
606	10	0,35	0,035	»
281	5	0,41	0,082	1,108
770	15	0,42	0,027	»
351	5	0,32	0,064	1,098
246	5	0,61	0,122	1,099
Alcool méthylique.				
765	16	0,135	0,0085	»
616	10	0,11	0,01[illegible]0	1,139
511	10	0,13	0,0130	1,053
275	5	0,12	0,0240	1,014
258	6	0,16	0,0266	1,077
Éther.				
765	15	0,215	0,0142	»
521	10	0,18	0,0180	0,617
700	15	0,225	0,0150	»
451	10	0,20	0,0200	0,654
361	10	0,23	0,0230	»
276	10	0,26	0,0260	0,597
Benzine.				
756	10	0,13	0,0130	»
586	10	0,155	0,0155	0,690
481	7	0,125	0,0175	0,652
381	8	0,16	0,0200	0,628
226	6	0,16	0,0266	0,678

VARIATION DE L'EXPOSANT n AVEC LA NATURE DU GAZ.

Des expériences exécutées en vue de reconnaître l'influence de la nature du gaz sur l'évaporation ne m'avaient donné sous la pression de 760 que des résultats trop peu distincts pour que je les rapporte ici. Toutefois, j'ai reconnu que l'évaporation de l'alcool et de l'essence de térébenthine est sensiblement la même dans l'hydrogène, dans l'air et dans l'acide carbonique ; que celle de l'eau est peu différente dans l'hydrogène et dans l'air, mais que certains liquides plus volatils, et surtout l'éther, présentent une évaporation bien évidemment accélérée dans l'hydrogène et retardée dans l'acide carbonique.

Les expériences suivantes ont pour but d'examiner si l'exposant n ne varie pas avec la nature du gaz. Le dispositif est le même, sauf addition d'un tube amenant le gaz sous la cloche.

Évaporation de l'eau dans l'hydrogène.

PRESSION	DURÉE	TEMPÉRATURE de l'eau	ÉVAPORATION brute	ÉVAPORATION corrigée	n
768	10	16,3	0,125	0,00099	»
701	12	16,0	0,171	0,00107	0,85
656	10	15,7	0,148	0,00111	0,72
504	11	15,3	0,195	0,00138	0,78
367	10	15,3	0,230	0,00177	0,78

Évaporation de l'éther dans l'hydrogène.

PRESSION	DURÉE	ÉVAPORATION brute	ÉVAPORATION par minute	n
770	16	0,190	0,0118	»
651	13	0,192	0,0128	0,48
769	15	0,210	0,0140	»
607	14	0,245	0,0175	0,53
628	10	0,190	0,0190	»
421	10	0,230	0,0230	0,47

Évaporation de l'éther dans l'acide carbonique.

PRESSION	DURÉE	ÉVAPORATION brute	ÉVAPORATION par minute	n
759	15	0,185	0,0122	»
620	10	0,150	0,0150	1,02
504	15	0,275	0,0182	0,94
768	16	0,180	0,0112	»
340	10	0,250	0,0250	0,99

Influence de la vapeur du liquide existant dans l'atmosphère.

Dalton avait observé l'évaporation de l'eau dans des atmosphères contenant de la vapeur de ce liquide à diverses tensions, et la nécessité de trouver une formule qui s'annule pour le cas de la saturation complète l'avait conduit à essayer de l'expression $(F_t - f)$ qui en effet vérifie assez bien les résultats de l'expérience lorsque la température du liquide ne varie pas trop.

J'ai déjà fait remarquer qu'il est impossible de conserver ce facteur dans la formule de l'évaporation, à cause de l'équivoque à laquelle il prête.

Mes premières expériences ont été faites directement par la méthode des pesées.

Le vase évaporatoire était mis en expérience dans une chambre de petite dimension, où il était facile de produire à volonté des variations de l'état hygrométrique de l'air. Les températures de l'air et de l'eau ne différaient jamais beaucoup. La pression barométrique s'est trouvée sensiblement constante, et l'état hygrométrique était relevé au moyen d'un hygromètre à point de rosée (Type Regnault modifié par M. Alluard).

Au lieu de faire intervenir la tension de la vapeur, il m'a paru plus simple de conserver l'état hygrométrique lui-même, et comme la fonction doit s'annuler dans le cas de la saturation, c'est à l'unité diminuée de l'état hygrométrique que j'ai comparé les évaporations, après les avoir divisées, bien entendu, par la force élastique maximum correspondante à la température de l'eau afin de les ramener en quelque sorte à la même température.

Les trois premières expériences ont été faites en hiver et consécutivement ; les autres ont eu lieu plus tard et sont isolées. La pression barométrique qui était 765 millimètres pendant la première série a varié ensuite de 761,5 à 767 millimètres. D'après la loi trouvée précédemment, ces écarts donneraient pour terme de correction :

$$(767)^{1.18} = 2535.4,$$
$$(761{,}5)^{1.18} = 2514.7.$$

Ces nombres diffèrent assez peu pour qu'on puisse considérer l'erreur commise en ne tenant pas compte de la pression comme négligeable vis-à-vis de l'approximation obtenue dans les expériences.

Dans le tableau suivant, on voit que le rapport de l'évaporation au facteur $(1 - h)$ est bien réellement constant.

TEMPÉRATURE du liquide t	TEMPÉRATURE de l'air t'	ÉTAT hygrométrique h	ÉVAPORATION	TENSION maximum F_t	ÉVAPORATION corrigée	$1 - h$	RAPPORT
11,5	11,3	0,615	0,066	10,12	0,00652	0,385	0.0169
11,8	12,5	0,746	0,046	10,80	0,00426	0,254	0,0168
11	11,5	0,819	0,030	9,79	0,00306	0,181	0,0168
13,5	13,8	0,709	0,055	11,53	0,00477	0,291	0,0164
15	14,2	0,626	0,081	12,70	0,00640	0,374	0,0171
15,5	17	0,585	0,089	13,11	0,00678	0,415	0,0163
15,5	19	0,570	0,093	13,11	0,00708	0,430	0,0165

Ces expériences ayant eu lieu à des températures de l'eau et de l'air très voisines, ne sont pas à l'abri de l'objection suivante : t et t' étant sensiblement les mêmes, le facteur $1 - h$ revient à $\frac{F - f}{F}$, et F lui-même, variant très peu dans le cours de ces expériences, elles auraient tout aussi bien pu servir à vérifier la loi de Dalton elle-même.

La série des recherches suivantes répond à cette objection. La température de l'air étant à peu près constante, j'ai échauffé le liquide progressivement pendant que je faisais d'un autre côté varier l'état hygrométrique : ces expériences ont été faites dans la même journée. L'observation de l'évaporation avait lieu par le procédé du vase de Mariotte. La température de l'air a été en augmentant de 11 à 14°, mais on a démontré précédemment que cette variation n'a aucune influence sur l'évaporation.

TEMPÉRATURE de l'eau t	INTERVALLES observés	VITESSE d'évaporation	TENSION maximum F_t	VITESSES corrigées	ÉTAT hygrométrique h	$1 - h$	RAPPORT
21	119	908	18,49	49,10	0,60	0,40	122,7
22	76	1316	19,66	66,88	0,46	0,54	123,8
23	91	1098	20,89	52,56	0,57	0,43	122,2
30	60	1666	31,55	52,80	0,57	0,43	122,8
35	40	2500	41,83	59,76	0,52	0,48	124,4
40	30	3333	54,91	60,69	0,51	0,49	123,8
50	20	5000	91,98	54,36	0,54	0,46	118,2

Application au psychromètre

L'application la plus importante de la formule de l'évaporation est celle que l'on en a faite au psychromètre, instrument destiné à donner par une observation facile et à tout moment le degré d'humidité de l'air. Il se compose de deux thermomètres placés l'un auprès de l'autre; l'un d'eux est maintenu constamment mouillé, ou mieux, est mouillé quelques instants avant l'observation. On relève la différence des températures, et des tables calculées à cet effet donnent immédiatement le degré d'humidité.

Les considérations théoriques qui servent à calculer ces tables sont bien simples. Lorsque la différence de température des deux thermomètres est devenue constante, c'est que la chaleur que perd le thermomètre mouillé par suite de l'évaporation est compensée par le réchauffement extérieur; on peut donc poser une équation qui permet de calculer la force élastique de la vapeur d'eau, ou bien le degré d'humidité. La chaleur perdue par suite de l'évaporation est évidemment proportionnelle à celle-ci; on admet que la chaleur d'échauffement est proportionnelle à l'excès de température du thermomètre sec sur le thermomètre mouillé.

Il est bon de faire ici une objection que je ne trouve relatée dans aucun traité de physique. Si c'est l'air qui réchauffe le thermomètre mouillé, comme on l'affirme, ce réchauffement, en vertu d'une loi de Dulong et Petit, serait proportionnel à la puissance 1,233 de l'excès de température et non pas à cet excès. En admettant, comme on le fait, la proportionnalité à l'excès lui-même, on suppose l'existence d'une enceinte à température constante, et on admet que cette température est celle du thermomètre sec. Il est vrai qu'il peut se faire que cette enceinte hypothétique soit effectivement représentée par le thermomètre sec à lui tout seul; je serais assez porté à l'admettre, car il est suffisamment rapproché du thermomètre mouillé pour que son action réchauffante soit prépondérante; d'ailleurs il subit toujours un léger refroidissement et ne donne jamais la température vraie de l'air; comme on peut

s'en assurer en faisant tourner pendant l'observation un thermomètre fronde dans son voisinage immédiat.

Nous admettrons donc, puisque l'expérience le confirme, que c'est le thermomètre sec qui réchauffe le thermomètre mouillé; mais alors il n'est plus exact de prendre sa température pour celle de l'air, comme on le fait dans la formule adoptée

$$x = \frac{F_t - A\,(t' - t)\,H}{F_t'}$$

t' étant la température du thermomètre sec, t celle du thermomètre mouillé et A un coefficient supposé constant. On a vu quelle difficulté d'appréciation présente la loi de Dalton sur laquelle on s'appuie [1].

En se servant de la formule qui résulte de mes expériences, on arrive à l'expression

$$x = 1 - \frac{A'\,(t' - t)\,H^{1.18}}{F_t}$$

Regnault, dans l'étude expérimentale qu'il a faite du psychromètre, a pris pour critérium de l'exactitude de la formule la constance du coefficient A. Opérant successivement au milieu des circonstances les plus variées, il déterminait au même instant les données du psychromètre, et la tension de la vapeur d'eau au moyen de son hygromètre à point de rosée, dont la précision est bien connue.

Prenant alors ce dernier résultat et le transportant dans la formule, il calculait la valeur du coefficient A pour ces diverses circonstances.

Il a trouvé que ce coefficient varie beaucoup et que, d'une manière générale, la valeur qui convient à l'air libre est très

---

(1) L'annnuaire météorologique de Montsouris se tire d'embarras par un procédé qui me semble très discutable. Il fait précéder la formule ci-dessus des mots : « en « désignant par K un coefficient (celui que j'ai nommé A) qui peut être fonction de la température du thermomètre mouillé, de la différence des deux thermomètres et de la vitesse de l'air. »

S'il est possible que ce coefficient soit une fonction (de forme inconnue) des variables de la table, on se demandera quelle confiance il faut accorder à des calculs qui le supposent constant.

différente de celle qui convient à l'air confiné d'une chambre ou même d'une salle plus ou moins vaste.

Pour comparer ma formule à celle en usage, je ne pourrais mieux faire que de suivre cet exemple. Je donne ci-dessous les résultats de deux séries d'expériences que j'ai faites en des lieux très différents par l'altitude et le climat en général. La première série a été faite en 1873, à l'Observatoire météorologique de Clermont, en plein air, sous l'abri des instruments ; la seconde a été obtenue en 1875 à l'École supérieure de commerce et d'industrie de Bordeaux, soit à l'intérieur du cabinet de physique, soit au dehors sur une passerelle attenante à ce cabinet.

Expériences faites à l'Observatoire de Clermont en septembre 1873 (1).

Heures	Circonstances atmosphériques	COEFFICIENT par la formule en usage	COEFFICIENT par ma formule
9 h. matin.	Ciel couvert, air calme........	0,00079	0,00046
3 h. soir...	Ciel couvert, air calme........	0,00119	0,00047
3 h. soir...	Ciel pur, vent d'Ouest faible ..	0,00085	0,00050
3 h. soir...	Brouillard léger.............	0,00082	0,00045
6 h. matin.	Air calme, rosée abondante...	0,00043	0,00035
Midi	Soleil, vent du Sud fort.......	0,00128	0,00049
6 h. matin.	Air calme, rosée abondante...	0,00077	0,00025
2 h. soir ...	Vent du Sud-Ouest modéré ...	0,00100	0,00045
Expériences faites à Bordeaux en juillet 1875 (extérieur).			
8 h. matin.	Vent du Sud-Ouest fort.......	0,00093	0,00042
Midi	Vent modéré ; ciel pur........	0,00087	0,00049
Midi	Air calme (à l'ombre).........	0,00075	0,00047
2 h. soir ...	Air calme (au soleil)..........	0,00084	0,00047
3 h. soir ...	Vent du Sud (au soleil).......	0,00106	0,00051
Expériences à Bordeaux (intérieur).			
	Fenêtres fermées.............	0,00127	0,00058
	D° d°	0,00102	0,00056
	D° d°	0,00121	0,00058
	Fenêtres ouvertes	0,00098	0,00055

(1) Il faut ajouter à ces tableaux la valeur officielle du coefficient qui a servi à calculer les tables en usage et qui est de 0,0008, ainsi que les nombres extrêmes obtenus par Regnault :

Dans une chambre fermée.............. 0,0013 ;
Dans la cour du Collège de France........ 0,0007 ;
D'après les considérations théoriques.... 0,0006.

On peut tirer de ces tableaux plusieurs conséquences :

1° Comme l'avait trouvé Regnault, le coefficient calculé par la formule en usage est notablement différent dans le cas de l'air libre et dans celui de l'air plus ou moins confiné. Mais cette différence est beaucoup moins accentuée si on calcule le coefficient par ma formule.

2° Même à l'air libre, le coefficient d'usage présente des variations absolument inexplicables. Calculé par ma formule, il présente, au contraire, une constance remarquable. Les seules exceptions sont les 5e et 7e expériences, faites à Clermont à six heures du matin (lever du soleil à la fin de septembre), en présence d'une rosée abondante répandue sur la végétation qui entourait les thermomètres. Il est évident que le principe d'une enceinte hypothétique à température constante, qu'on admet pour établir la formule, est loin d'être applicable ici.

3° Les tables actuellement en usage sont certainement beaucoup trop étendues. Ma formule montre que l'on ne peut vraisemblablement calculer l'état hygrométrique que dans des limites plus restreintes, ce qui est du reste conforme à l'expérience. Comme cette formule est calculable par logarithmes, je me propose de l'utiliser pour construire une règle à calcul d'un usage plus commode que les tables.

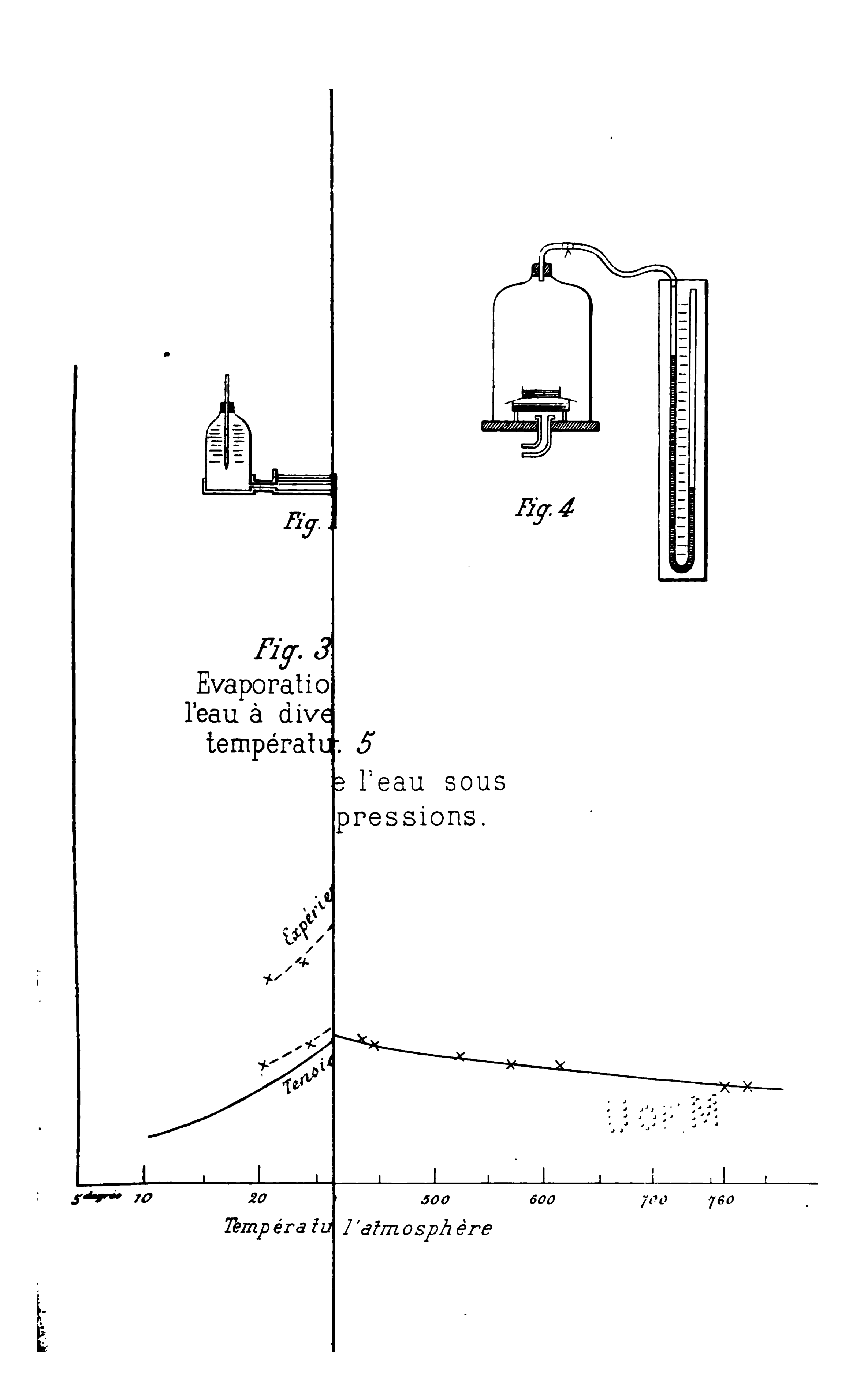


Fig.
Fig. 4
Fig. 3
Evaporatio
l'eau à dive
températu
. 5
e l'eau sous
pressions.
Expérie
Tensi
10
20
500
600
700
760
Températu
l'atmosphère

SECONDE NOTE

SUR

LE SYSTÈME ASTRONOMIQUE D'EUDOXE

PAR M. PAUL TANNERY

Dans le tome I (2e série) des *Mémoires de la Société* (p. 441-449), j'ai publié une *Note sur le système astronomique d'Eudoxe*, où j'ai essayé d'exposer la restitution de ce système, telle qu'elle est due à M. Schiaparelli. Si je reviens aujourd'hui sur ce sujet, c'est à l'occasion de l'important travail que vient de faire paraître M. Th.-H. Martin (1) ; car notre illustre compatriote admet bien, en ce qui concerne les cinq planètes, les résultats auxquels est arrivé le savant astronome de Milan, et que lui-même avait obtenus de son côté. Mais, pour la théorie du Soleil et de la Lune, il combat l'opinion de M. Schiaparelli, que je crois cependant préférable à la sienne. Je me propose donc de discuter la question, qui a son importance, — il s'agit d'attribuer ou de dénier à Eudoxe la théorie de la rétrogradation des nœuds de l'orbite lunaire ; — j'examinerai en même temps quelques-uns des autres problèmes que soulève le Mémoire de M. Th.-H. Martin, et je relèverai diverses inexactitudes qu'il me paraît renfermer.

I

La découverte de la rétrogradation des nœuds de l'orbite lunaire, certainement antérieure à Hipparque, ne peut être revendiquée

---

(1) *Mémoire sur les hypothèses astronomiques d'Eudoxe, de Callippe et d'Aristote.* Paris, Imprimerie nationale, 1881.— Extrait des *Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, t. XXX, 1re partie.

pour aucun autre nom que celui d'Eudoxe : mais au commencement du IVe siècle avant J.-C., l'astronomie était-elle déjà assez avancée pour permettre l'établissement d'une théorie de cette nature? d'autre part, Eudoxe était-il bien l'homme qui pouvait la constituer?

Pour la première de ces deux questions, l'affirmative n'est pas douteuse; depuis longtemps déjà les Grecs savaient que c'était aux barbares qu'il fallait avoir recours pour pénétrer les mystères du ciel, et depuis des siècles les Chaldéens connaissaient la période des éclipses. L'observation assidue de ces phénomènes leur avait aussi nécessairement dévoilé le sens du mouvement sur l'écliptique des points où ils peuvent se produire. Pour les Égyptiens, ou bien ils étaient arrivés par eux-mêmes à ces découvertes, ou bien les invasions réciproques les avaient transplantées sur les bords du Nil sans doute dès avant la conquête perse, car l'astrologie a pu avoir un berceau, elle n'a jamais eu de patrie. Enfin, depuis Anaxagore, les Grecs connaissaient la véritable cause des éclipses. Tous les éléments de la théorie étaient donc préparés; pour la constituer, il suffisait d'un géomètre combinant ces éléments dans la représentation précise de mouvements simples.

Or, d'une part, Eudoxe a été chercher auprès des prêtres égyptiens les données astronomiques qui pouvaient lui être nécessaires; de l'autre, comme géomètre, il fut sans contredit un des plus puissants mathématiciens de l'antiquité, un de ceux qui contribuèrent davantage au développement de la science et dont la marque reste encore le plus profondément empreinte dans les Éléments d'Euclide. La restitution de sa théorie des planètes nous le montre particulièrement familier avec les problèmes relatifs à la sphère, ayant une idée parfaitement nette de la combinaison des mouvements, sachant en tirer le plus heureux parti. En un mot, il est tel qu'on ne peut admettre de sa part une erreur de raisonnement, à moins de prouver mathématiquement qu'il l'ait commise.

Mais si sa valeur comme théoricien est hors de conteste, ce pouvait être, et c'est ce qu'admet M. Th.-H. Martin, un très

médiocre observateur. L'astronomie hellène, qui n'avait alors que le matériel le plus sommaire, et à laquelle la trigonométrie ne devait pas venir en aide avant longtemps, pouvait être, sous le rapport des observations, dans un état d'enfance tel que les plus grossières erreurs y fussent possibles sur la position des astres.

Comme matériel d'observation, je suis disposé à aller encore plus loin que M. Th.-H. Martin, et à refuser à Eudoxe même un instrument quelconque propre à mesurer des distances angulaires. Car, avant la fin du siècle où il vivait, je ne vois aucun indice de mesures de ce genre. Mais il avait en tout cas à sa disposition :

1° L'antique gnomon, connu des Grecs depuis plus de deux siècles, et qui avait suffi pour déterminer l'obliquité de l'écliptique à un demi-degré près ;

2° La clepsydre et le cadran solaire, probablement sphérique [1], qu'Eudoxe avait perfectionné, et dont le nom, l'*araignée*, semble indiquer le réseau de parallèles et de méridiens qui devait le couvrir ;

3° Une sphère sur la surface de laquelle étaient tracés les cercles classiques et figurées les constellations ; la construction de cet appareil est à reporter au temps de Thalès.

Des constructions graphiques sur cette sphère ou sur le plan devaient suppléer au défaut de la trigonométrie, et ici, nous sommes évidemment en droit d'attribuer à Eudoxe la connaissance des procédés géométriques fondamentaux, tandis que l'invention de l'*araignée* montre, d'autre part, que son esprit était suffisamment tourné vers les applications pratiques et qu'il se préoccupait d'améliorer les grossiers moyens d'observation, seuls connus de son temps.

Ces moyens étaient-ils suffisants pour déterminer avec quelque approximation la position d'un astre sur la sphère ? Oui, sauf pour les étoiles à l'intérieur du cercle de perpétuelle apparition et cela par la simple observation de l'heure des levers et des couchers. La

---

(1) G. Rayet, *Les Cadrans solaires coniques*, dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 1875.

clepsydre, réglée sur le cadran solaire, pouvait donner ces heures avec une certaine précision, et on pouvait en déduire immédiatement, d'une part, la différence ascensionnelle avec tel astre choisi pour point de repère, de l'autre, le rapport des arcs de parallèle au-dessus et au-dessous de l'horizon, d'où, par construction, la déclinaison du parallèle, en supposant connue la hauteur du pôle.

Que ce procédé ait été réellement employé dès cette époque, c'est ce qu'on peut conclure des renseignements que nous fournit Hipparque dans ses *Exégèses des Phénomènes d'Aratus et d'Eudoxe* (1). Nous y voyons que le Cnidien déterminait précisément la hauteur du pôle par le rapport des arcs diurne et nocturne du parallèle que décrit le Soleil au solstice d'été, d'autre part qu'il repérait les levers et couchers des constellations par rapport aux signes du zodiaque.

Mais on peut, d'après ces données, supposer un autre procédé qui rendait inutile même l'emploi de la clepsydre. L'année populaire des Grecs, celle qui réglait les travaux des champs, était en réalité une année sidérale, dont les saisons étaient fixées par les levers et couchers apparents du matin et du soir de certaines étoiles. De cet usage, aussi vieux qu'Hésiode, était née la croyance, déjà combattue par Anaximène, que c'était de l'influence des étoiles que dépendaient les variations des saisons et les changements du temps. L'astronomie grecque commença donc surtout par la réunion d'observations sur les dates des levers et couchers du matin et du soir des diverses constellations et étoiles, et par la liaison de ces observations avec des essais de prédictions météorologiques. Tout astronome crut donc devoir faire son almanach ou *parapegme;* Eudoxe donna le sien comme l'avaient fait avant lui Euctémon et Démocrite, comme le firent après lui Philippe de Locride, Callippe, Conon, Dosithée, Hipparque lui-même et les réformateurs du calendrier césarien (2).

---

(1) Ouvrage publié dans l'*Uranologion* de Petau. Paris, 1630.

(2) Des débris de ces *parapegmes* nous sont conservés dans l'*Introduction aux phénomènes* de Geminus et dans les *Phases des fixes* de Ptolémée (*Uranologion* de Petau).

La longitude du Soleil étant donnée par la date même de l'observation d'un lever ou coucher apparent du matin ou du soir, et par une théorie aussi grossière que l'on voudra du mouvement propre du Soleil, la réduction au lever ou coucher vrai pouvait se faire par le repérage avec les étoiles zodiacales se levant ou se couchant en même temps que l'astre observé; ayant ainsi le point de l'écliptique se levant ou se couchant en même temps que cet astre, on obtient par une construction facile un cercle de la sphère sur lequel se trouve ce dernier. Deux observations permettent donc de déterminer la position sur la sphère.

A la vérité, ce procédé s'entache facilement d'erreurs considérables, sur lesquelles il est inutile d'insister. Mais son essence même rend en tout cas impossible une erreur *sur le sens de la latitude*, et ce point est important pour la discussion que nous ferons plus loin de la théorie de la Lune d'après Eudoxe.

II

Nous pourrions nous en tenir là et concéder à M. Th. H. Martin qu'Eudoxe était bien plus mathématicien et théoricien qu'observateur en astronomie; mais il peut être intéressant d'établir que ses erreurs d'observation ne sont pas démontrées tellement considérables pour qu'on doive lui dénier ce que l'antiquité lui a reconnu, le premier rang parmi les astronomes antérieurs à Hipparque.

La discussion de ses observations des phases des fixes, d'après les données conservées par Geminus, n'a jamais été faite sérieusement et elle soulève de sérieuses difficultés. J'essaierai de montrer dans une autre étude que le parapegme d'Eudoxe a pu être fait avec une certaine précipitation et en utilisant trop des observations antérieures non comparables à celles qu'il pouvait faire lui-même, mais qu'on lui doit tout au moins l'ébauche de la théorie des phases des fixes, telle que nous la retrouvons, vers la fin du siècle où il vivait, dans Autolycus de Pitane.

Je ne m'arrêterai pas non plus aux données que renferme le papyrus grec dit *Art d'Eudoxe,* et dont il ne faut user qu'avec une

extrême réserve (1). Au reste l'opinion défavorable qui pèse sur Eudoxe en tant qu'observateur, repose à peu près exclusivement sur les critiques acerbes qu'a dirigées contre lui Hipparque, dans l'ouvrage dont nous avons déjà parlé.

Que ces critiques soient injustes et empreintes d'exagération, Petau l'a déjà reconnu, et un rapide examen suffit pour en convaincre.

Elles portent sur deux ouvrages qu'on attribuait à Eudoxe, les *Phénomènes* et le *Miroir*, où l'astronome de Cnide aurait décrit la sphère étoilée.

Il est assez peu croyable qu'Eudoxe ait réellement écrit deux traités qui n'étaient qu'une répétition l'un de l'autre, sauf quelques divergences comme celle relative à l'indication du climat auquel se rapporte la description. Ce climat était déterminé, comme nous l'avons dit, par le rapport entre la longueur du jour et de la nuit au solstice d'été, $\frac{5}{3}$ dans le *Miroir*, $\frac{12}{7}$ dans les *Phénomènes*. Le premier rapport est assez exact pour Cyzique, où Eudoxe a établi sa renommée de savant, le second ne le serait que pour la Macédoine (Abdère, observatoire de Démocrite). Il est très possible en conséquence que les *Phénomènes* n'aient été qu'une révision posthume du *Miroir*, mise au courant pour la Macédoine à l'époque où ce royaume acquit la prépondérance dans les affaires grecques. On sait d'ailleurs que c'est ce traité que mit en vers Aratus pour le roi Antigone Gonatas.

En tout cas, les extraits textuels que donne Hipparque des ouvrages attribués à Eudoxe, montrent immédiatement que le but

---

(1) Il me semble notamment singulier que M. Th.-H. Martin (p. 59-60) préfère la donnée du rapport $\frac{9}{8}$ entre le diamètre du Soleil et celui de la Lune d'après Eudoxe, à celle du rapport 9 qui repose sur le témoignage précis d'Archimède. Dire que le Syracusain « a oublié le dénominateur 8, » c'est oublier soi-même que les Grecs ne désignaient point les fractions comme nous. Archimède ne pouvait confondre ἐπόγδοον avec ἐννεαπλάσιον.

L'*Art d'Eudoxe* est au reste une rédaction pleine d'erreurs, due à un élève astronome, postérieure à Eudoxe de près de deux siècles, et souvent en contradiction avec les données authentiques du parapegme de Geminus.

de leur auteur n'était pas plus élevé que celui d'Aratus. Il ne s'y était proposé qu'une description sommaire, sans prétention à la rigueur scientifique ; il n'indiquait que très approximativement la position des constellations, et il n'y a pas de motifs sérieux de voir dans les inexactitudes auxquelles il se laisse aller dès lors, des erreurs d'observation. D'ailleurs, ces inexactitudes sont aggravées singulièrement par Hipparque, soit qu'il se trompe sur les étoiles que désigne Eudoxe, soit qu'il prenne trop à la lettre les expressions du Cnidien.

Je ne donnerai qu'un seul exemple de la légèreté du critique, parce qu'il se rapporte à un point d'un certain intérêt pour l'histoire de l'astronomie. Hipparque admet qu'Eudoxe plaçait les points équinoxiaux à la moitié des signes, sur ce que le Cnidien dit seulement, et évidemment dans un sens vague, que l'équateur passe par le milieu du Bélier et de la Balance, et les tropiques respectivement par le milieu du Cancer et celui du Capricorne.

Il n'y a certainement pas là une raison suffisante de croire qu'Eudoxe ait changé la détermination qu'il avait donnée dans son parapegme, et d'après laquelle les équinoxes et les solstices tombaient le huitième jour à partir de l'entrée du Soleil dans les signes correspondants. Bœckh [1] a très bien expliqué le motif de cette détermination, singulière à première vue. C'est que le Cnidien commençait sa division de l'écliptique par le point correspondant au lever héliaque de Sirius, et faisait partir de là son signe du Lion, le premier de l'année. On ne peut méconnaître ici un emprunt à l'astronomie égyptienne.

La seule erreur vraiment grave qn'on puisse en toute justice reprocher à Eudoxe, et qui est bien constatée, c'est d'avoir rejeté l'anomalie du mouvement propre du Soleil et d'avoir considéré comme uniforme sa circulation en longitude, alors que les observations de Méton et d'Euctémon avaient déjà fait ressortir l'inégale répartition dans la durée de l'année des solstices et dès équinoxes.

---

(1) *Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten, vorzüglich den Eudoxischen*, Berlin, 1863.

Mais cette erreur fut-elle entraînée par de fausses observations? Il n'y en a pas de preuves. Eudoxe a certainement observé un solstice d'été, celui qui servit de point de départ au commencement de son cycle, fixé par Bœckh au 22-23 juillet de l'année julienne proleptique 381 avant J.-C., et rien n'indique que cette observation ait été erronée. Mais s'il s'est hâté de publier les résultats de son voyage en Égypte, ce qu'il est permis de soupçonner, il a parfaitement pu ne pas faire d'autres observations, et il était en droit, eu égard aux moyens grossiers dont on disposait alors, de suspecter les résultats obtenus par ses précurseurs.

Pour incriminer le parti auquel il s'arrêta, il faudrait connaître exactement le but qu'il se proposait. Son cycle luni-solaire était destiné à la réforme du calendrier civil des Grecs, pour lequel l'exacte détermination des équinoxes et du solstice d'hiver n'avait pas d'intérêt; la réforme au contraire présentait un caractère d'urgence. Lorsque, sans doute un peu plus tard, Eudoxe combina son système céleste, ce pouvait encore être une prudente réserve que de se borner à la théorie des anomalies qui paraissaient suffisamment constatées, et de laisser à l'avenir l'explication de celles qui semblaient plus ou moins douteuses. Au reste, Callippe réforma plus tard à cet égard et sans difficulté le système astronomique du Cnidien.

III

Nous ne pouvons en fait constater la valeur d'Eudoxe comme observateur; mais il n'y a pas de motif suffisant pour la déprécier; d'ailleurs, pour constituer sa théorie, il n'avait nullement besoin d'être un habile observateur, il lui suffisait d'être renseigné sur le sens général des phénomènes et d'avoir acquis des notions précises sur les périodes astronomiques. Or, l'examen de son cycle montre qu'à cet égard, il avait rapporté d'Égypte des données plus exactes que toutes celles de ses précurseurs.

On sait que Méton avait proposé, à partir de 432 avant J.-C., une période luni-solaire de 19 ans, comprenant 235 mois et 6940 jours. Méton admettait donc les données suivantes :

Pour l'année solaire...............	365^j,2631579
au lieu de : année tropique.......	365 ,2436680 (1)
ou : année sidérale...............	365 ,2563744
Pour le mois synodique............	29^j,53191
au lieu de........................	29 ,53059

Malgré ses avantages, le cycle de Méton ne paraît pas avoir été adopté par les Athéniens avant 330 avant J.-C., ainsi que Bœckh l'a montré ; c'est l'époque où Callippe en proposa d'ailleurs une réforme, qui ne semble pas avoir jamais été adoptée officiellement à Athènes.

Dans l'intervalle, la patrie de Méton, après des intercalations plus ou moins arbitraires, avait fini par adopter le cycle d'Eudoxe, qui, plus compliqué, avait l'avantage de conserver l'antique période de l'octaétéride.

Voici quelles en étaient les combinaisons, comme les rapporte Geminus. L'année astronomique est fixée à 365^j,25, ce qui, pour 8 ans, fait 2922 jours, répartis en 99 mois. Dans la période double, de 16 ans, on ajoute 3 jours, pour rétablir l'accord avec le cours de la Lune, et au bout de vingt périodes (160 ans), on retranche un mois de 30 jours, ce qui contrebalance pour l'année solaire l'effet de ces intercalations successives.

Le cycle total comprend donc 160 ans, faisant 58440 jours, répartis en 1979 mois, ce qui donne pour le mois synodique une durée de 29^j53007.

La durée admise par Eudoxe est d'ailleurs, d'après Geminus, identique à la durée adoptée par les Chaldéens. La période de l'ἐξελιγμός de ces derniers comprenait d'autre part pour 19756 jours, 669 mois synodiques, 717 mois anomalistiques et 726 mois draconitiques, ce qui donne pour la durée de ce dernier mois 27^j,21212 au lieu de 27^j,21222.

Eudoxe rejeta l'anomalie de la Lune, de même que celle du

(1) Valeur corrigée pour 432 avant J.-C. L'année civile des Grecs commençant à la première lune après le solstice d'été, leur année astronomique doit être considérée comme tropique, même avant la découverte de la précession des équinoxes. L'année astronomique égyptienne doit au contraire être regardée comme sidérale.

Soleil, ou du moins ne s'en occupa pas. Mais Callippe, qui corrigea sur ces deux points le système astronomique du Cnidien, dut connaître la période chaldéenne. Nous avons d'ailleurs un grave témoignage, quoi qu'en dise M. Th.-H. Martin, qui rejette le fait comme impossible, que cette période ou bien celle qui en est le tiers était également connue d'Eudoxe comme pouvant servir à la prédiction des éclipses. C'est l'attribution d'une telle prédiction à son disciple Hélicon de Cyzique. A la vérité, cette prédiction, pour une éclipse de Soleil, ne put être faite qu'au hasard, puisque les anciens ne pouvaient alors connaître si ce phénomène serait ou non visible en tel lieu donné de la Terre. Mais cela n'avait jamais arrêté les Chaldéens; comme pour les oracles, on a toujours célébré les prédictions couronnées de succès, et oublié les mésaventures des faux prophètes.

Le rejet de l'anomalie du mouvement propre de la Lune dans son orbite était d'ailleurs, pour ainsi dire, une conséquence de celui de l'anomalie du Soleil. Eudoxe crut en effet devoir calquer l'une sur l'autre les théories des deux astres; il fut même trop fidèle à ce principe, puisque, comme nous le verrons, il admit pour le Soleil un mouvement analogue à celui de la rétrogradation des nœuds de l'orbite lunaire. Celui-ci devait donc lui être bien démontré pour que l'analogie l'entraînât. Sauf cette faute, il s'était évidemment borné, pour constituer sa théorie mathématique des phénomènes, aux faits les plus saillants qui ressortaient de l'observation; il avait négligé les variations qui lui semblaient accessoires. Celles-ci devaient plus tard, en temps et lieu, trouver facilement place dans son système.

IV

Avant d'aborder l'examen du texte relatif à la théorie de la Lune d'après Eudoxe, il nous reste à apprécier la valeur critique de son auteur. Il s'agit, en effet, de savoir si, nous trouvant en présence d'une erreur grave et incontestable, nous serons en droit de l'attribuer à l'historien du système plutôt qu'à Eudoxe. Nous savons ce que vaut ce dernier; quel jugement porterons-nous sur l'autre?

S'il ne s'agissait que de Simplicius, qui nous a conservé, dans son commentaire sur le traité *Du ciel* d'Aristote, à peu près tout ce que nous savons du système d'Eudoxe, la question serait vite tranchée. Mais si le commentateur du VIe siècle est un bien piètre mathématicien, c'est un copiste fidèle, et ici, comme il nous l'apprend, il suit le traité *Sur les sphères ramenantes*, consacré par Sosigène au perfectionnement mécanique qu'Aristote avait prétendu apporter au système déjà corrigé astronomiquement par Callippe.

Si nous rappelons que ce Sosigène, comme l'a établi M. Th.-H. Martin, était un péripatéticien vivant à la fin du IIe siècle après J.-C., et n'a que le nom de commun avec l'astronome contemporain de Jules César, il devient clair que les renseignements que lui emprunte Simplicius ne peuvent être considérés comme transmis par un auteur absolument compétent. Nous ne sommes donc nullement garantis contre une inexactitude dans ces renseignements, et s'ils nous conduisent à des conséquences absurdes, nous serons en droit de les contrôler par le raisonnement et de ne les admettre que sous le bénéfice de ce contrôle. Nous devrons nous demander avant tout s'il n'y a pas autre chose qu'un vice de rédaction dans des données dont la conséquence rigoureuse serait d'attribuer une erreur grossière à un savant aussi considérable qu'Eudoxe.

A la vérité M. Th.-H. Martin admet que Simplicius a eu entre les mains, outre le traité de Sosigène, l'ouvrage *Des vitesses* écrit par l'astronome de Cnide lui-même, ainsi que les écrits historiques de deux disciples d'Aristote, Eudème et Théophraste. Mais cette hypothèse est toute gratuite. Il est au contraire à peu près certain que ces autres sources n'existaient plus au temps de Simplicius et qu'il ne les connut que par l'intermédiaire de Sosigène. Il était donc dans l'impossibilité de contrôler les dires de ce dernier, et au reste il eût été incapable de faire sérieusement ce contrôle.

Voyons donc ce que dit Sosigène dans Simplicius, pour la théorie de la Lune d'après Eudoxe.

« Quant à la Lune, les choses sont disposées en partie de la même manière (que pour le Soleil), en partie différemment. Elle est de même portée par trois sphères, parce qu'on y a observé de même trois mouvements. De ces sphères, l'une est animée du même mouvement que celle des fixes. La seconde tourne en sens contraire par rapport à la première et autour d'un axe perpendiculaire au cercle moyen du zodiaque, précisément comme pour le Soleil. La troisième n'est pas entièrement comme la troisième sphère du Soleil; si elle est semblablement placée (ayant son axe perpendiculaire au plan de l'orbite), son mouvement n'est pas dans le même sens, mais contraire à celui de la seconde sphère, et par conséquent dans le sens du mouvement de la première. Il s'accomplit avec une lente révolution autour d'un axe perpendiculaire au plan du cercle que semble parcourir la Lune. L'inclinaison de ce plan sur le moyen du zodiaque est égale à la digression maximum de la Lune en latitude. La première sphère est pour le mouvement (diurne) d'orient en occident; la seconde pour le retard qu'on observe dans la Lune le long du zodiaque (mouvement direct en longitude), la troisième pour ce que la Lune ne semble pas revenir aux mêmes points du zodiaque à la position plus boréale ou plus australe, mais que ces points se déplacent constamment contre l'ordre des signes. Et comme la rétrogradation de ces points dans l'espace d'un mois n'est que d'une petite quantité, le mouvement de cette troisième sphère d'orient en occident est supposé assez lent. »

Faisons abstraction de la première sphère qui correspond au mouvement diurne; quiconque a la moindre teinture d'astronomie verra immédiatement, avec M. Schiaparelli, dans le mouvement des deux autres sphères, la représentation, d'une part, de la circulation de la Lune sur son orbite (circulation supposée sans anomalie), de l'autre, le mouvement de nutation de cet orbite autour de l'axe de l'écliptique, mouvement qui entraîne la rétrogradation des nœuds.

A la vérité, nous apercevons une interversion dans l'ordre des vitesses des deux sphères; c'est la troisième qui devrait avoir la

révolution la plus courte, égale en durée au mois draconitique; la seconde, au contraire, qui entraîne la troisième, comme la première entraîne les deux autres, devrait avoir la révolution la plus longue, égale en durée à la période de rétrogradation des nœuds, soit environ 230 lunaisons.

L'erreur paraît remonter à Aristote, qui dit formellement (*Métaph.* XII, 8), que pour toutes les planètes (ce qui n'est vrai que des cinq), la seconde sphère correspond au mouvement en longitude. Le péripatéticien Sosigène aura accepté sans plus de contrôle la parole d'un maître dont l'autorité en pareille matière est certainement plus suspecte encore que la sienne.

Que ce soit bien une erreur, c'est ce qui ressort évidemment de la contradiction du texte, où il est dit que l'axe de la troisième sphère est perpendiculaire au plan de l'orbite apparent, lequel est dès lors supposé incliné sur l'écliptique, comme d'ailleurs le marque Aristote avec précision. M. Th.-H. Martin admet lui-même que l'inclinaison était dès lors fixée à 6° environ. Mais, avec l'interversion des vitesses, l'orbite parcouru pendant un mois serait au contraire à très peu près parallèle au plan de l'écliptique, la variation de latitude n'atteignant que quelques minutes. De la sorte le mouvement de la Lune devrait se représenter comme combiné d'un mouvement mensuel circulaire dans un plan parallèle à l'écliptique et de l'oscillation de ce plan, dans une longue période, entre les latitudes de digression maximum, boréale et australe, ce qui, entre parenthèses, rendrait les éclipses presque impossibles.

Si Eudoxe connaissait réellement les phénomènes à représenter, celui qui a su combiner si heureusement les sphères des cinq planètes ne pouvait commettre une erreur aussi grossière que celle de l'interversion des vitesses ; s'il les ignorait, il ne pouvait en tout cas se figurer un mouvement où la Lune n'eût pas changé chaque mois des latitudes boréales aux latitudes australes. La donnée de Sosigène est donc inadmissible dans tous les cas.

Pour la défendre, M. Th.-H. Martin fait une violence au texte. Lorsqu'il y est très clairement dit que l'inclinaison des équateurs des deux sphères est égale à la digression maximum de la Lune en

latitude, le savant historien admet que plus loin « les positions plus boréales ou plus australes » à expliquer par cette inclinaison doivent être rapportées à l'équateur et non à l'écliptique.

Cette malencontreuse hypothèse n'avance nullement la question. Si Eudoxe pouvait dans ses observations se tromper de 12° dans les variations de la Lune en latitude pendant un mois, ses observations de déclinaison étaient nécessairement aussi inexactes, et il lui était dès lors impossible de reconnaître l'obliquité sur l'écliptique du plan de l'orbite lunaire, alors que M. Th.-H. Martin avoue qu'il la déterminait à un demi-degré près.

Mais des erreurs d'observation aussi grossières ne peuvent aucunement être supposées, ainsi que nous l'avons vu, et toute base est ainsi enlevée à cette inutile hypothèse sur le choix des coordonnées.

V

La question, tranchée pour la Lune, se trouve l'être aussi pour le soleil, puisque les théories des deux astres ne diffèrent que par le degré de l'inclinaison que l'orbite du Soleil est supposé avoir sur le plan moyen du zodiaque et par le sens attaché au mouvement de nutation.

Dans l'opinion de M. Th.-H. Martin, qui pense retrouver les données numériques d'Eudoxe chez des auteurs postérieurs, notamment Théon de Smyrne, l'amplitude du prétendu mouvement du Soleil en latitude aurait atteint un demi-degré de chaque côté du plan moyen du zodiaque, et la période de ce mouvement aurait été de 2922 ans. Dans cette opinion, le mouvement propre du Soleil doit d'ailleurs se représenter, de même que celui de la Lune, par la combinaison d'une circulation (annuelle) dans un plan parallèle au moyen du zodiaque et de l'oscillation de ce plan dans un intervalle d'un degré. Les solstices auraient donc lieu à la même longitude, comptée sur le plan moyen du zodiaque, avec des variations de latitude très lentes (5' au plus par an). Avec les grossiers moyens d'observation de cette époque il est impossible de

se figurer comment ces variations auraient pu être soupçonnées, et M. Th.-H. Martin est, en fait, impuissant à l'expliquer.

Les points équinoxiaux se seraient au contraire déplacés dans cette combinaison de mouvements, de manière que la différence entre la durée du printemps et de l'été et celle de l'automne et de l'hiver, tantôt positive, tantôt négative, eût pu atteindre près de 5° en valeur absolue. C'eût été, en fait, le phénomène le plus saillant; qu'une telle conséquence ne puisse être attribuée à Eudoxe, nous le savons de reste, et par sa détermination des saisons astronomiques, et parce qu'il nous est dit formellement que le troisième mouvement du Soleil avait été conclu de l'observation des solstices.

M. Schiaparelli n'a pas cherché à expliquer l'origine de l'erreur d'Eudoxe; il refuse de rapporter au système du Cnidien la période déduite de Théon de Smyrne; car le mouvement à attribuer à la seconde sphère d'Eudoxe devrait être en sens inverse du mouvement affirmé par Sosigène, si l'on essaie d'appliquer au système les données auxquelles a eu recours M. Th.-H. Martin. Il demande si l'on ne pourrait déduire d'un passage de Pline qu'Eudoxe admettait une période quadriennale. Cette supposition me semble devoir être rejetée, car le texte de Sosigène suppose que la période du troisième mouvement était, d'après Eudoxe, beaucoup plus longue pour le Soleil que pour la Lune.

Il n'est d'ailleurs nullement prouvé qu'Eudoxe eût cherché à préciser très exactement les éléments du mouvement du Soleil en latitude. Peut-être se bornait-il à des conclusions analogues à celles de ce passage du *Miroir* rapporté par Hipparque : « Il semble qu'il y ait aussi pour le Soleil une différence relative aux points solsticiaux, mais elle est beaucoup moins évidente et tout à fait petite. » Cependant la détermination du sens du mouvement de la seconde sphère, inverse du mouvement adopté pour la Lune, devait avoir son motif.

Dans la combinaison de mouvements restituée par M. Schiaparelli et en admettant une inclinaison d'un demi-degré entre les axes de la seconde et de la troisième sphère, les points solsticiaux

oscillent sur un arc de 2°28′. L'année tropique a donc une longueur variable, tantôt plus courte, tantôt plus longue que l'année sidérale de 365j1/4, suivant Eudoxe.

Si le mouvement de la seconde sphère est en sens inverse de celui de la troisième, comme d'après les données de Théon de Smyrne, l'année tropique est plus courte que l'année sidérale lorsque l'obliquité de l'orbite est supérieure à celle du plan moyen du zodiaque (1), elle est plus longue lorsque l'obliquité devient inférieure. C'est le contraire si le mouvement des deux sphères est dans le même sens, comme Eudoxe l'avait admis.

Or il partait, comme nous l'avons vu, de l'observation des solstices. Cette observation se faisait, non pas avec le gnomon simple, qui ne peut donner que le jour de l'année où l'ombre est minimum, mais, puisque Méton savait déjà déterminer l'heure des solstices, avec le cadran sphérique. Si l'année tropique avait été exactement de 365j1/4, au bout de la période quadriennale, le solstice aurait dû être observé exactement à la même heure du jour.

Or la valeur de l'année sidérale paraissait suffisamment établie par la période caniculaire des Égyptiens ; d'autre part, les observations grecques des solstices d'été portaient déjà sur des époques assez éloignées pour que l'avance du solstice ait dû être bien constatée. De ce fait, dont l'étude plus approfondie devait conduire Hipparque à la découverte de la précession des équinoxes, Eudoxe crut devoir trouver l'explication en admettant un mouvement en latitude analogue à celui de la Lune.

La détermination du sens du mouvement de ses deux sphères indique d'ailleurs qu'il trouva l'obliquité de l'écliptique inférieure à la valeur du quinzième de la circonférence déterminée avant lui et qu'il dut naturellement considérer comme moyenne. A cet égard, il aurait montré un réel talent d'observation.

Si le savant astronome de Milan n'est pas arrivé aux mêmes conclusions, c'est peut-être que son attention s'est trop arrêtée sur une tradition conservée par Martianus Capella et le faux Bède,

---

(1) Ou, plus exactement, à une valeur un peu plus faible que cette dernière.

et d'après laquelle la ligne des nœuds de l'orbite solaire sur le plan moyen du zodiaque aurait à très peu près coïncidé avec celle des solstices. Dans cette situation, la différence de l'année tropique à l'année sidérale est à peu près nulle et le phénomène le plus saillant du mouvement attribué au Soleil en latitude est une variation de l'obliquité de l'écliptique.

Mais cette variation ne peut en tous cas être supposée que trop faible pour avoir été conclue sans autre motif des observations faites par les Grecs; d'autre part, la tradition me semble pouvoir être facilement mise d'accord avec l'opinion que j'ai exposée.

Eudoxe n'a dû trouver qu'une très faible différence entre l'obliquité de l'écliptique et celle qu'il devait admettre pour le plan moyen du zodiaque; regardant d'autre part l'année tropique comme plus courte de son temps que l'année sidérale, s'il a précisé la position de la ligne des nœuds de l'orbite solaire sur le plan moyen du zodiaque, il devait la placer au plus en s'écartant des solstices vers le Lion et le Verseau.

Le système d'Eudoxe jouit d'ailleurs d'une longue faveur, et les données de Martianus Capella et du faux Bède peuvent provenir d'une source qui lui ait été postérieure de deux siècles et dont l'auteur a pu tenir compte du mouvement indiqué par l'astronome de Cnide.

Que l'invention du prétendu mouvement du Soleil en latitude ait eu pour motif principal la constatation de la différence entre l'année tropique et l'année sidérale, c'est donc ce qui me paraît le plus probable. Il semble d'ailleurs que l'hypothèse de ce mouvement ait été antérieure à Eudoxe, et que plus ou moins longtemps après lui on ait essayé de la préciser ou de la corriger pour la mettre d'accord avec les phénomènes. C'est ce qu'indiquent les données divergentes de l'antiquité sur l'amplitude de l'oscillation (1° ou 2°) et sur le sens du mouvement. Celui qui résulte des renseignements fournis par Théon de Smyrne a notamment pu être soutenu par analogie avec celui de la rétrogradation des nœuds de l'orbite lunaire. Il suffisait pour l'adopter de changer la détermination du plan moyen du zodiaque.

Que ces efforts pour représenter les phénomènes aient toujours été infructueux, c'était une conséquence nécessaire de la fausseté de l'hypothèse. Il était réservé à Hipparque de découvrir la vérité. Mais dans la combinaison des mouvements par laquelle il expliqua la précession des équinoxes, il suivit les traces du Cnidien, et ce précurseur lui avait facilité sa voie.

Qu'enfin des erreurs d'observation aient paru confirmer pendant longtemps la conséquence de l'hypothèse d'Eudoxe relative à la variabilité de l'obliquité de l'orbite solaire, il n'y a ni à le nier ni à s'en étonner. Mais que ces observations aient eu une concordance telle qu'elles aient pu servir à constituer l'hypothèse dont il s'agit, c'est ce qui paraîtra sans doute incroyable à une réflexion un peu attentive.

VI

Il me reste à signaler une dernière erreur où me paraît être tombé M. Th.-H. Martin (p. 76), cette fois en ce qui concerne la théorie spéciale des planètes Mercure et Vénus.

Aristote (*Métaphys.* XII, 8) dit que les pôles de la troisième sphère, différents pour les différentes planètes, sont cependant identiques pour Mercure et pour Vénus.

M. Th.-H. Martin soutient qu'il faut lire : les pôles de la quatrième sphère, contre l'autorité des manuscrits.

Je rappelle que les pôles de la première sphère, ceux du monde, et les pôles de la seconde, ceux du plan moyen du zodiaque, sont les mêmes pour toutes les planètes. La révolution de la seconde sphère (révolution géocentrique) dure d'ailleurs un an pour Mercure et pour Vénus seules. Les pôles de la troisième sphère pour ces planètes peuvent donc coïncider; mais pour que ceux de la quatrième sphère coïncidassent, il faudrait d'abord la coïncidence des pôles de la troisième, puis l'identité des révolutions pour la troisième sphère, et nous savons pertinemment qu'elles différaient. La donnée d'Aristote ne représente donc pas, comme le pense M. Th.-H. Martin, l'identité entre l'amplitude des variations de Mercure et de Vénus en latitude, et si Eudoxe avait cru à cette

identité, il ne l'eût pas exprimée par l'identité des pôles pour la quatrième sphère.

M. Schiaparelli a très bien expliqué la raison de la donnée d'Aristote, et il y a vu, à bon droit, une éclatante confirmation de la vérité de sa restitution du système d'Eudoxe.

Les pôles de la troisième sphère sont placés sur l'écliptique et à 90° du lieu moyen de la planète, d'après la révolution géocentrique. Or, pour Vénus et Mercure, ce lieu moyen est celui du Soleil, donc les pôles de la troisième sphère doivent coïncider pour ces deux planètes.

CONSIDÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA

GÉNÉRALISATION SUCCESSIVE DE L'IDÉE DE QUANTITÉ

DANS L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR M. J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques à la Faculté des sciences de Bordeaux.

1.

Les calculs abstraits qui font l'objet des Mathématiques pures sont des combinaisons de certaines opérations fondamentales, dont l'emploi plus ou moins réitéré suffit pour déterminer les inconnues d'une question, soit avec une exactitude rigoureuse, soit avec une approximation illimitée.

Les opérations sont possibles sous certaines conditions, et dépendent de la nature des objets qui leur sont soumis et du champ de variation plus ou moins restreint où elles doivent avoir lieu.

On appelle en général *quantité* tout ce qui peut être l'objet d'une opération mathématique.

La définition de la quantité comprend non seulement les objets réels, considérés au point de vue du nombre et de la grandeur, mais encore les signes d'opération eux-mêmes.

Ainsi, un nombre est le symbole de l'addition de plusieurs quantités, considérées, par définition, comme identiques entre elles et que l'on nomme *unités*. Les opérations sur les nombres sont entièrement indépendantes de la nature des unités, et elles ne s'appliquent qu'au symbole de l'opération de la *numération*, en vertu de laquelle les groupes d'unités sont connus.

Une portion de ligne droite peut être considérée comme le signe du déplacement d'un point ou d'une infinité de points, que l'on transporte à une distance donnée et dans une direction donnée. On désigne ce signe de déplacement sous le nom de *vecteur*.

Un angle, au lieu de signifier l'écart existant entre deux directions fixes, deviendra le symbole de la rotation autour d'un point fixe d'une droite qui passe d'une direction donnée à une autre, en entraînant tous les points liés invariablement avec elle. Considéré sous cet aspect, le signe de l'opération de la rotation correspondante à un angle donné prend le nom de *verseur*.

Cette conception de la quantité tend à prévaloir de plus en plus dans les Mathématiques, de même que la méthode fondée sur l'étude *génétique* des quantités finira par l'emporter, au point de vue de l'enseignement et des recherches scientifiques, sur les anciennes méthodes contemplatives, qui règnent encore presque sans partage dans les Traités de Géométrie élémentaire.

D'après ce que nous venons de dire, il faut se garder de confondre, comme on le fait trop souvent, la notion de *quantité* avec celle de *grandeur*, qui correspond à un cas très particulier de la *quantité* (1). Nous conserverons au mot *grandeur* sa signification habituelle, tandis que nous entendrons le mot *quantité* dans son sens le plus large.

2.

Les règles de la combinaison des opérations mathématiques dépendent uniquement de certaines propriétés essentielles de ces opérations, que l'on pourrait appeler *propriétés combinatoires*.

Ce n'est pas d'après les effets physiques auxquels elles correspondent, ou d'après les moyens matériels qui servent à les effectuer que l'on classe les opérations. Leurs définitions générales expriment seulement l'ensemble des propriétés combinatoires

---

(1) Le mot de *quantité* lui-même, en ayant égard à son étymologie, ne représente pas exactement l'idée que nous y attachons. Mais nous avons reculé devant l'introduction d'un néologisme de plus.

qu'elles possèdent, et l'on appelle du même nom des opérations qui, tout en présentant des dissemblances apparentes dans leurs applications comme dans leurs moyens d'exécution, ont le même ensemble de propriétés essentielles.

Nous commencerons l'étude des opérations fondamentales de l'Analyse par le cas le plus simple, celui qui a servi de type aux cas plus compliqués, et dans lequel on peut reconnaître immédiatement l'existence des propriétés combinatoires des opérations. En passant ensuite aux cas plus généraux, nous désignerons par les mêmes noms les opérations qui jouiront des mêmes propriétés combinatoires, et c'est la condition de la permanence de ces propriétés qui nous servira de guide dans le choix des définitions des opérations généralisées. C'est en cela que consiste ce que Hankel a nommé le *principe de permanence des règles du calcul.*

Il peut arriver que, dans certains cas, la nature même de la généralisation appliquée à l'idée de quantité rende impossible la conservation de certaines propriétés des opérations. C'est ce qui a lieu lorsqu'on veut étendre les règles du calcul aux opérations de la Géométrie à trois dimensions, et de là proviennent les difficultés que l'on rencontre dans le *Calcul des Quaternions.*

3.

Considérons d'abord une multitude d'objets, désignés tous par une même dénomination, qui exprime une qualité commune quelconque. Chacun de ces objets sera une *unité.*

En faisant abstraction de toute autre qualité que la qualité commune, toutes les unités seront considérées comme *égales entre elles.*

Si avec ces unités on forme divers groupes, ces groupes, au point de vue où nous sommes placés, ne différeront entre eux que par le *nombre* des unités dont chacun est composé.

Le *nombre* est une propriété primordiale et indéfinissable, et l'on n'ajoute guère à la clarté de cette idée en disant que *le nombre est la loi de formation d'une collection d'unités au moyen des unités individuelles.*

On a inventé, pour distinguer les nombres, des noms et des signes spéciaux, comme *un, deux, trois,* etc., ou 1, 2, 3, etc. Ces noms et ces signes ont été conçus d'une manière plus ou moins systématique, susceptible d'une plus ou moins grande extension. La méthode suivie dans cette nomenclature porte le nom de *numération.*

Toutes les méthodes systématiques de numération, les seules qui puissent s'étendre aux nombres un peu considérables, reposent sur le groupement successif des unités élémentaires en unités d'ordres de plus en plus élevés. Ces groupes étant formés, on considère le nombre total comme le résultat de la fusion de tous ces groupes partiels en un groupe unique, c'est-à-dire comme le résultat d'une *addition* de ces groupes.

L'*addition* est, en général, l'opération qui consiste à réunir deux ou plusieurs groupes d'unités en un seul, et, connaissant les nombres d'unités de chaque groupe partiel, à en conclure le nombre d'unités du groupe total.

Dans la numération ordinaire, on définit un nombre quelconque comme étant le résultat de l'addition de groupes des divers ordres successifs. D'après cela on peut dire que l'opération de la *numération* est un cas particulier de l'addition. Donc la numération jouira de toutes les propriétés de l'addition.

Nous commencerons par étudier les propriétés de l'addition dans le cas le plus simple, celui où les unités sur lesquelles on opère sont des objets réels et distincts.

Nous n'avons pas à nous occuper des moyens par lesquels on réalise physiquement cette réunion des groupes d'unités en un seul. Ces moyens varient avec la nature des unités; ainsi l'on opère soit en comptant les unes à la suite des autres les unités contenues dans les groupes successifs, soit en portant les unes au bout des autres les diverses unités de longueur qui composent plusieurs longueurs données, etc. Nous n'avons ici à nous occuper que des opérations faites au moyen des nombres.

Dans chacun des cas que nous venons de citer, le nombre des objets ne peut varier lorsqu'on les compte dans le même ordre,

sans en introduire de nouveaux et sans en supprimer. Donc l'addition est une opération conduisant à un résultat unique et déterminé, ce que l'on exprime en disant que

1° *L'addition est une opération* UNIFORME.

Pour que l'addition d'un nombre à un autre n'altère pas la valeur de cet autre, il faut et il suffit que le premier nombre soit nul, ce que l'on désigne par le symbole zéro.

Si nous convenons d'appeler *module* d'une opération la valeur qu'il faut donner à l'un des termes de l'opération pour que l'introduction de ce terme n'ait pas d'influence sur le résultat, nous pourrons dire que

2° *Le* MODULE *de l'addition est* ZÉRO.

Si, en comptant une à une, à la suite les unes des autres, les unités qui composent deux groupes a et b, on commence une première fois par le groupe a, une seconde fois par le groupe b, on aura compté les mêmes unités, seulement dans un ordre différent, ce qui ne peut influer sur le nombre total, puisque les unités sont considérées comme identiques entre elles. Donc, dans l'addition de deux nombres, on peut intervertir l'ordre des termes. On verrait pareillement qu'il en est de même pour l'addition de plusieurs nombres. Cette propriété de l'addition s'énonce en disant que

3° *L'addition est une opération* COMMUTATIVE.

Si, dans l'addition d'un nombre quelconque de groupes, on remplace deux ou plusieurs groupes par leur somme, on verrait encore de la même manière que le changement de situation des unités n'en peut altérer le nombre. Donc on peut *associer* deux ou plusieurs groupes pour en former un seul, c'est-à-dire que

4° *L'addition est une opération* ASSOCIATIVE.

Telles sont les quatre propriétés fondamentales de l'addition, sur lesquelles reposent toutes les règles relatives à cette opération.

Nous appellerons *addition* toute opération possédant ces quatre propriétés.

L'addition est toujours possible, lorsque le champ de variation de la grandeur de même espèce que les grandeurs ajoutées est illimité, comme l'est, par exemple, la série des nombres. Mais il y a des cas où l'opération devient impossible, si le champ de variation de la grandeur est restreint. Ainsi l'on ne pourrait porter sur une longueur de 6 mètres la somme de deux longueurs, l'une de 3 mètres et l'autre de 4 mètres.

4.

On nomme opération *inverse* d'une opération donnée, considérée comme *directe*, une autre opération ayant pour but de trouver un des *termes* de l'opération directe, connaissant tous les autres termes et le résultat de cette dernière opération.

L'opération inverse de l'addition, la *soustraction*, a ainsi pour but, connaissant la somme $c = a + b$ de deux nombres et l'un de ces nombres a, de trouver l'autre nombre b.

La soustraction est, comme l'addition, une opération *uniforme;* mais elle ne jouit pas des autres propriétés de l'addition.

La somme c, dont a et b sont les parties, est dite *plus grande* que chacune de ces parties; ou, ce qui revient au même, chacune des parties a et b est dite *moindre* que la somme c.

Étant donnés deux nombres a, c, l'opération de la soustraction $c - a$ sera toujours possible si c est plus grand que a ou tout au moins égal à a. Dans ce dernier cas, le *reste* sera égal au module zéro de l'addition.

Si c est plus petit que a, la soustraction $c - a$ est impossible, et le symbole $c - a$ est absurde.

Si un polynôme a ses termes les uns additifs, les autres soustractifs, on obtiendra sa valeur en effectuant les opérations dans l'ordre indiqué, ce qui donne le même résultat que si l'on retranchait la somme des termes soustractifs de celle des termes additifs; mais, pour que cette dernière opération soit possible, il faut que la somme des termes additifs surpasse celle des termes soustractifs. Dans ce cas, on pourra intervertir à volonté l'ordre des termes du polynôme, en conservant à chacun d'eux son signe,

et considérant chaque terme soustractif comme devant être retranché indifféremment des termes additifs qui le précèdent ou de ceux qui le suivent.

D'après cela, si l'on ajoute ou qu'on retranche à chacun des nombres a, b un même nombre d, tant que d sera moindre que b, la différence $(a - d) - (b - d) = a' - b'$ sera égale à $a - b$, et l'on aura $a - d > b - d$ ou $a' > b'$. Mais si le nombre d surpasse b, le reste $b - d$ prendra la forme *négative* $-(d - b)$, sans que le résultat final ait cessé d'être égal à $a - b$. On continuera, dans ce cas, à écrire $a' > b'$ ou $a' - b' > 0$, b' étant le nombre négatif $-(d - b)$. Donc, au point de vue de l'addition et de la soustraction, on devra considérer les symboles d'opération appelés *nombres négatifs* comme étant moindres que tout nombre positif et que zéro, et comme d'autant plus petits que leur valeur numérique est plus grande.

5.

L'addition de plusieurs quantités numériques égales entre elles se nomme *multiplication;* la valeur commune des quantités ajoutées est dite le *multiplicande;* le nombre des quantités ajoutées est le *multiplicateur,* et le résultat est le *produit.*

L'addition, étant généralement une opération uniforme, l'est encore dans le cas particulier des termes égaux. Donc

1° *La multiplication est une opération uniforme.*

En vertu de la commutativité et de l'associativité de l'addition, on peut remplacer l'addition des nombres égaux au multiplicande par celle des unités qui les composent, puis *associer* ensemble toutes les *premières* unités de chaque groupe, puis toutes les *deuxièmes* unités, et ainsi de suite. Il en résultera autant de groupes qu'il y avait d'unités dans le multiplicande, chaque groupe étant formé d'autant d'unités qu'il y en avait dans le multiplicateur. Il résulte de là que le produit n'est pas altéré lorsqu'on échange entre eux les rôles du multiplicande et du multiplicateur.

On verrait de même, en considérant un produit de trois

facteurs $(a \times b) \times c$, ou, comme on écrit plus simplement $a \times b \times c$, que l'on peut intervertir l'ordre des deux derniers facteurs. Il suffit de considérer $a \times b$ comme un groupe de nombres a, et de réunir les c premiers nombres a de chaque groupe, puis les c deuxièmes nombres a, etc., jusqu'aux c $b^{\text{ièmes}}$ nombres a, ce qui donnera b groupes de c fois a, c'est-à-dire $a \times c \times b$.

De même pour le cas d'un nombre quelconque de facteurs.

Par conséquent,

2° *La multiplication est une opération commutative.*

On démontre de même que

3° *La multiplication est une opération associative.*

Le produit de a par l'unité, ainsi que le produit de l'unité par a étant l'un et l'autre égaux à a, il en résulte que si l'un des facteurs d'une multiplication est l'unité, le produit sera égal à l'autre facteur. Donc

4° *Le module de la multiplication est l'*UNITÉ.

Si le multiplicande est le module zéro de l'addition, le résultat est évidemment nul.

Pour que la multiplication ne perde pas dans ce cas sa propriété commutative, et que l'on ait encore $a \times 0 = 0 \times a$, il suffit de convenir que la multiplication de a par zéro est une autre manière d'écrire $0 \times a$. Dès lors on pourra dire que

5° *Si l'un des facteurs d'un produit est zéro, le produit est aussi zéro.*

Si le multiplicande est un polynôme

$$\pm a \pm b \pm c \pm \ldots,$$

et que l'on effectue l'addition de m quantités égales à ce polynôme, on trouvera pour résultat un polynôme ayant pour termes ceux du multiplicande multipliés chacun par m et précédés chacun de son signe primitif. Donc

$$(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots) \times m = (a \times m) \pm (b \times m) \pm (c \times m) + \ldots.$$

On énonce cette proposition en disant que

6° *La multiplication est une opération* DISTRIBUTIVE *relativement à l'addition et à la soustraction.*

6.

L'opération inverse de la multiplication est la *division*, qui a pour but, connaissant un produit et l'un de ses facteurs, de trouver l'autre facteur. En vertu de la commutativité de la multiplication, cette définition peut se ramener à dire que la division consiste à trouver combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Ce nombre se nomme *quotient* ou *rapport* des deux nombres donnés.

Cette opération est le plus souvent impossible, tant que l'on n'introduit dans les calculs que les nombres entiers; car, sur n nombres entiers consécutifs, un seul est divisible par n.

Mais l'Arithmétique enseigne à trouver dans tous les cas combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, c'est-à-dire à déterminer entre quels multiples consécutifs du diviseur le dividende est compris. On dit alors que *le quotient est connu à moins d'une unité près.*

7.

Si l'on a $a = b \times c$, on en tire, d'après les propriétés de la multiplication, n étant un nombre quelconque,

$$a \times n = (b \times n) \times c.$$

Donc on aura

$$\frac{a}{b} = c = \frac{a \times n}{b \times n}.$$

On ne change donc pas le rapport de deux nombres en multipliant ces deux nombres par un même nombre arbitraire.

Un nombre quelconque c peut être représenté par le rapport de deux nombres a et b, tels que a soit égal à $b \times c$. D'après ce que nous venons de voir, ces deux nombres a, b peuvent être remplacés par des équimultiples quelconques. On peut aussi supposer

que ces deux nombres représentent des unités d'une même espèce quelconque.

L'égalité de deux rapports

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

s'appelle une *proportion*.

En multipliant les deux rapports par le produit $b \times b'$, on en déduira l'égalité des produits de chacun des dividendes par le diviseur de l'autre.

Réciproquement, si a est un multiple de b, l'égalité

$$(2) \qquad a \times b' = a' \times b$$

entraînera la proportion (1).

Si a était divisible par a', la même égalité (2) donnerait aussi la nouvelle proportion

$$(3) \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

8.

Le produit de m facteurs égaux à a est dit la $m^{\text{ième}}$ *puissance* de a, et l'on désigne cette puissance par le symbole a^m, a étant la *base* et m l'*exposant*.

Des propriétés de la multiplication résulte la règle pour la multiplication de deux puissances, exprimée par l'égalité

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

On en tire réciproquement, en posant $m + n = p$, la règle pour la division des puissances,

$$a^p : a^n = a^{p-n}.$$

Pour $p = n$, le quotient $a^n : a^n$ devient égal à l'unité, tandis que la formule précédente donne

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

On fera rentrer ce cas dans le cas général, en convenant que

le symbole a^0 désigne l'unité, quel que soit a. Ainsi, tout nombre élevé à une puissance d'exposant égal au *module* zéro de l'addition représentera le *module* 1 de la multiplication.

Si l'on fait le produit de n puissances de même exposant m, on aura

$$a^m \times a^m \times a^m \times \ldots = (a^m)^n = a^{m \times n} = (a^n)^m.$$

On trouve encore l'égalité

$$\begin{aligned}(a^m \times a^{m'} \times a^{m''} \times \ldots)^n &= a^{mn} \times a^{m'n} \times a^{m''n} \times \ldots \\ &= a^{mn + m'n + m''n + \ldots}, \\ &= a^{(m + m' + m'' + \ldots) \times n}.\end{aligned}$$

Ces deux relations expriment des propriétés de l'élévation aux puissances analogues à la commutativité et à la distributivité dans la multiplication des exposants.

9.

L'élévation aux puissances a^b, ne jouissant pas de la commutativité relativement à ses deux termes a et b, donnera lieu à deux opérations inverses distinctes, répondant aux deux problèmes suivants :

1° Étant donnés la puissance $a^b = c$ et l'exposant b, trouver la base a;

2° Étant données la puissance $a^b = c$ et la base a, trouver l'exposant b.

Les cas de possibilité de ces deux opérations sont encore plus restreints que ceux de la division.

L'Arithmétique nous enseigne à trouver la *racine* a' de la plus grande $b^{\text{ième}}$ puissance contenue dans c, et aussi l'exposant b' de la plus haute puissance de a contenue dans le même nombre c. La solution de ces deux problèmes fournit ensuite les moyens d'obtenir d'autres solutions indéfiniment approchées.

10.

Les résultats que nous venons d'obtenir pour les nombres absolus, qui représentent des objets isolés, inertes et invariables,

s'appliquent également au cas où les unités sont des portions égales d'une même grandeur continue, telle qu'une ligne droite indéfinie, une grandeur angulaire, un temps, etc.

Si l'on juxtapose à la suite les unes des autres des unités de longueur, par exemple, ces unités formeront une ligne unique, que l'on pourra représenter par le *nombre* des unités juxtaposées. Si l'on place de même les unes au bout des autres plusieurs des longueurs ainsi obtenues, on formera une ligne contenant un nombre d'unités égal à la somme des nombres des unités contenues dans les diverses parties, et l'on appellera cette ligne la *somme* de ces mêmes parties.

Il existera ainsi une correspondance exacte entre l'addition des nombres abstraits d'unités et la juxtaposition des segments représentés par ces nombres. D'après cela, cette juxtaposition pourra être désignée par le même nom d'*addition* que l'opération arithmétique, et il est facile de vérifier qu'elle possède toutes les propriétés que nous avons reconnues dans l'addition des nombres d'unités d'espèce quelconque.

Il en sera de même pour la soustraction des longueurs, tant que l'on considèrera celles-ci comme des grandeurs existantes et invariables. On ne pourra, par exemple, soustraire une plus grande longueur d'une plus petite.

Maintenant, au lieu de considérer les lignes comme ayant des grandeurs existantes, et susceptibles d'augmentation indéfinie, mais ne pouvant décroître au delà de zéro, introduisons dans nos symboles l'idée de variation et de mouvement, et, au lieu de cette forme immobile de la ligne considérée en elle-même, substituons-y la notion d'un symbole d'opération, d'un *vecteur* indiquant qu'un point mobile doit se transporter à une certaine distance, sur une certaine droite et dans un certain sens. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici sur le calcul des quantités *positives* subsistera; mais nous pourrons maintenant généraliser les opérations que nous avons décrites, et arriver à faire disparaître par ce moyen les cas d'impossibilité que nous avons rencontrés.

Étant donnée une droite indéfinie dans les deux sens, si un

point, mobile sur cette droite, se déplace une première fois d'une distance de a unités dans un certain sens, que nous appellerons le sens *direct* pour le distinguer du sens opposé ou sens *rétrograde;* s'il se déplace une seconde fois de b unités dans le même sens direct, l'effet définitif de ces deux déplacements successifs sera identique à celui qui résulterait d'un déplacement unique, dans le même sens, et d'une distance de $a + b$ unités de longueur.

Si l'on étudie maintenant les propriétés de cette opération de déplacement, on reconnaît que :

1° Le résultat de ces deux déplacements combinés sera *uniforme,* comme celui de l'addition des nombres a et b;

2° Si l'on permute l'ordre des déplacements, le résultat ne changera pas;

3° Si l'on considère plusieurs déplacements successifs, on pourra remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par le déplacement correspondant à la somme de leurs longueurs;

4° Si l'un des déplacements est nul, le déplacement total se réduira à l'autre déplacement partiel.

Donc l'opération de la combinaison de plusieurs déplacements de même sens jouit des mêmes propriétés que l'addition des nombres, et pourra, par conséquent, recevoir le nom d'*addition* des déplacements.

11.

Considérons maintenant deux déplacements de sens contraires. Si nous supposons, pour fixer les idées, que le premier ait lieu dans le sens direct et le second dans le sens rétrograde, il est clair que le résultat de ces deux déplacements équivaudra à un déplacement unique, dirigé dans le même sens que celui des deux premiers qui a la plus grande longueur, et ayant lui-même une longueur égale à la différence des longueurs des déplacements combinés. Ainsi, si a et b sont les longueurs données, le déplacement résultant sera,

pour $a > b$, un déplacement de longueur $a - b$ dans le sens direct,

et, pour $a < b$, un déplacement de longueur $b - a$ dans le sens rétrograde.

Donc, si dans le calcul on se sert de symboles représentant uniquement la longueur sans indiquer la direction, ce cas le plus simple de la combinaison de deux déplacements opposés présentera deux solutions différentes, qui non seulement seront exprimées par deux notations différentes, $a - b$ et $b - a$, mais qui exigeront, de plus, qu'on y joigne la désignation du sens dans lequel doit être compté le résultat.

Pour trouver le moyen de remédier à ces inconvénients, remarquons d'abord que l'opération en question, considérée en elle-même, quel que soit le sens du résultat, jouit des mêmes propriétés que l'addition. En effet,

1° Le résultat d'un déplacement a, direct ou rétrograde, suivi d'un déplacement b, direct ou rétrograde, équivaudra à un déplacement unique et déterminé, soit direct, soit rétrograde;

2° Le résultat ne change pas si l'on effectue le déplacement b avant le déplacement a, en leur conservant leurs sens respectifs;

3° Si l'on considère trois déplacements successifs a, b, c, déterminés chacun en grandeur et en sens, on pourra obtenir le résultat de leur combinaison soit en combinant a avec b, et le résultat avec c, soit en combinant a avec le résultat de b et de c;

4° Le résultat est égal à a, si b est de longueur nulle.

On reconnaît ici les propriétés fondamentales de l'addition des nombres, et l'on est dès lors conduit à donner le nom d'*addition* à la combinaison des déplacements de sens différents, en convenant de faire représenter aux lettres a, b, c, ..., non plus seulement les longueurs des déplacements, mais encore leurs sens respectifs.

Dès lors le symbole $a + b$ ne signifiera plus que la longueur a doit être augmentée de la longueur b, mais que le déplacement a, de longueur et de sens donnés, doit être suivi du déplacement b, de longueur et de sens donnés. Cette nouvelle opération pourra indifféremment correspondre à une addition ou à une soustraction des longueurs a et b.

Si nous désignons par c le résultat des deux déplacements a et b, nous pourrons écrire, l'opération directe étant commutative,

$$a + b = c, \qquad \text{ou} \qquad b + a = c.$$

L'opération inverse, qui consiste, étant données la somme c et l'une des deux composantes a ou b, à déterminer l'autre composante, portera naturellement le nom de *soustraction*, et s'indiquera par le même signe que la soustraction des nombres. On aura ainsi

$$a = c - b, \qquad \text{ou} \qquad b = c - a.$$

Or, cette soustraction, qui change le résultat du déplacement $c = a + b$ dans le seul déplacement a, s'opère évidemment en faisant succéder au déplacement c un déplacement égal et de sens contraire au déplacement b. Nous pouvons donc considérer le symbole de soustraction $-b$ comme représentant un déplacement égal et de sens contraire à b; de sorte que le signe $-$ peut être interprété comme un symbole indiquant le renversement du sens d'un déplacement.

Dans le cas particulier où a et b sont deux déplacements d'égale longueur et de sens opposés, la succession de ces deux déplacements ramènera le point décrivant à sa place primitive, et par suite le déplacement résultant ne changera pas la position initiale; ce déplacement sera donc égal au *module* de l'opération, c'est-à-dire à zéro. On aura donc dans ce cas

$$a + b = 0.$$

L'opération inverse de cette addition donnera

$$a = 0 - b, \qquad \text{ou} \qquad b = 0 - a,$$

ce que l'on peut écrire plus simplement

$$a = -b, \qquad \text{ou} \qquad b = -a.$$

D'après cela, l'addition du déplacement a peut être remplacée par la soustraction du déplacement b, et *vice versa*. Cela revient à incorporer au symbole a ou b le signe $+$ ou $-$ dont il est

précédé, et alors tout polynôme à termes additifs et soustractifs deviendra, par cette incorporation, un polynôme à termes tous additifs. Ainsi $a - b - c + d$ pourra être considéré comme représentant la résultante des déplacements a, $-b$, $-c$, d, c'est-à-dire comme égal à $a + (-b) + (-c) + d$, où l'on peut remplacer $-b$ et $-c$ par b' et c', ce qui donne

$$a + b' + c' + d.$$

On voit que, dans le cas des quantités *dirigées*, c'est-à-dire des quantités pouvant croître indéfiniment dans deux sens opposés, telles que les déplacements sur une ligne droite indéfinie, les quantités angulaires, le temps, etc., l'addition et la soustraction ne constituent plus, au fond, qu'une seule et même opération, appliquée dans l'un ou l'autre des deux sens, et que la soustraction, pouvant toujours se transformer en addition, pourra participer alors aux propriétés fondamentales de l'addition.

Ainsi, dans le cas, où nous sommes placés, d'un champ de variation illimité dans les deux sens, la soustraction, comme l'addition, sera toujours possible.

Pour abréger le langage, on convient d'appeler *quantités positives* les symboles qui représentent des déplacements dans le sens *direct*, et *quantités négatives* les symboles qui représentent des déplacements dans le sens *rétrograde*.

On prend généralement, pour représenter les quantités positives ou négatives, des segments de l'axe fixe pris dans le sens direct ou dans le sens rétrograde à partir de l'origine des distances.

Nous désignerons à l'avenir par le nom de *vecteurs* ces symboles de déplacement d'un point mobile.

12.

L'addition de m vecteurs égaux entre eux (en longueur et en direction) s'appelle la *multiplication* de l'un de ces vecteurs par m. Le *produit* sera de même signe que le multiplicande.

Les deux nombres qui représentent le multiplicande et le multiplicateur sont commutatifs entre eux, c'est-à-dire, par

exemple, qu'un mobile parcourt la même distance en marchant pendant 6 secondes avec une vitesse de 2 mètres, ou pendant 2 secondes avec une vitesse de 6 mètres.

On peut donc procéder à la multiplication des vecteurs de la même manière que pour les quantités abstraites, la nature des unités étant déterminée par des considérations étrangères aux règles de l'Arithmétique.

On peut aussi étendre la commutativité aux signes. Ainsi, si l'on a à multiplier un vecteur négatif $-a$ par m, le produit sera formé de $a \times m$ unités négatives, et peut être exprimé par $-(a \times m)$, c'est-à-dire par un vecteur de longueur égale à $a \times m$ unités portées dans le sens négatif. Or on parviendrait au même résultat en multipliant le vecteur changé de signe $+a$ par le multiplicateur $-m$ changé de signe, pourvu que l'on définît la multiplication par $-m$ comme consistant à multiplier le multiplicande par le nombre m, et à changer ensuite le signe du produit. On satisfait de cette manière au principe de permanence des règles de calcul.

Ce dernier résultat ne changera pas, si l'on échange entre elles les natures des facteurs en même temps que leurs signes. Ainsi le vecteur $-a$, multiplié par le nombre m, donnera le même produit que le vecteur $-m$ multiplié par le nombre a.

On peut donc maintenant appliquer cette nouvelle opération de la multiplication par un nombre abstrait *négatif* au cas où le vecteur considéré $-b$ serait négatif, et le produit par $-m$ s'obtiendra en multipliant d'abord $-b$ par m, puis en changeant le signe du produit $-(b \times m)$, ce qui donnera $+(b \times m)$ pour le produit de $-b \times -m$. De là la règle des signes dans la multiplication.

13.

Les propriétés de la multiplication des vecteurs sont les mêmes que pour les nombres absolus, et conduisent aux mêmes règles pour la multiplication de deux polynômes, l'un ayant pour termes des vecteurs, l'autre étant composé soit de nombres absolus, soit

de nombres positifs et négatifs, qui se comportent comme des vecteurs.

14.

Nous avons vu que la nature de chacun des deux facteurs d'un produit n'influe en rien sur la manière d'obtenir la valeur numérique du produit. On peut donc, à volonté, faire représenter aux symboles qui désignent les facteurs et le produit soit des nombres abstraits, soit des unités de nature quelconque, pourvu que les nombres ne soient pas altérés.

D'après cela, la division de deux vecteurs ne diffèrera de la division des nombres absolus que par la règle qu'il faudra observer pour les signes et qui coïncide avec celle que nous avons trouvée pour la multiplication.

De même que nous avons pu représenter un nombre absolu, d'une infinité de manières, par le rapport de deux grandeurs absolues, de même tout nombre abstrait, positif ou négatif, pourra, d'une infinité de manières, être représenté par le rapport de deux vecteurs, le signe de l'un de ces vecteurs pouvant être choisi à volonté.

15.

Toutes les propriétés des rapports démontrées pour les nombres absolus (n° 7) s'étendent aussi aux vecteurs, en ayant égard aux signes.

De la généralisation de la multiplication découle celle de l'élévation aux puissances.

Le produit d'un nombre pair de facteurs, tous positifs ou tous négatifs, est toujours positif.

Le produit d'un nombre impair de facteurs, tous positifs ou tous négatifs, est de même signe que chacun des facteurs.

De là résulte que :

1° Toute puissance de degré pair d'un nombre, soit positif, soit négatif, est positive;

2° Toute puissance de degré impair d'un nombre, soit positif, soit négatif, est de même signe que ce nombre.

Il s'ensuit de là, réciproquement, que la puissance de degré pair a^{2n} peut provenir de l'élévation à la puissance $2n$ soit du nombre $+a$, soit du nombre $-a$. Donc l'extraction de la racine $(2n)^{\text{ième}}$ d'un nombre positif *n'est pas une opération uniforme*, puisqu'elle peut être représentée par deux nombres différents $+a$ et $-a$.

L'extraction de la racine $(2n)^{\text{ième}}$ d'un nombre négatif quelconque est une opération impossible, aucun nombre, soit positif, soit négatif, ne pouvant répondre à la question.

L'extraction d'une racine de degré impair $2n+1$ d'une puissance parfaite a^{2n+1} est possible et l'est d'une seule manière, quel que soit le signe de cette puissance.

L'autre problème inverse de l'élévation aux puissances, la recherche de l'exposant est, comme l'extraction des racines, sujet à des exceptions sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

16.

Jusqu'ici l'opération inverse de la multiplication n'a été possible que dans des cas particuliers, ceux où le dividende est un multiple exact du diviseur.

Cette impossibilité est absolue, toutes les fois que les unités que l'on considère sont, par leur nature, indivisibles. Ainsi il est absolument impossible de distribuer dix hommes en trois groupes égaux. Une roue dentée ayant 35 dents, on ne pourra jamais déterminer le nombre des dents de la roue à laquelle elle transmet le mouvement, de manière que celle-ci tourne quatre fois plus vite.

Mais, dans le cas des nombres d'unités appartenant à des grandeurs continues, comme les distances, les temps, etc., et dans le cas des signes d'opération représentés par ces grandeurs, le choix de l'unité étant essentiellement arbitraire, on pourra toujours concevoir cette unité divisée en autant de parties égales que l'on voudra, et prendre une de ces parties pour nouvelle unité. Cette division de l'unité s'opère par des moyens spéciaux à chaque espèce de quantités, soit exactement, soit avec une approximation indéfinie.

Dans cette hypothèse, si l'on propose de diviser un nombre par un nombre b, on commencera par partager chacune des unités de a en b parties égales. Les a unités contiendront ensemble $a \times b$ de ces parties, et par suite, la quantité représentée par le nombre a d'unités primitives le sera maintenant par le nombre $a \times b$ de nouvelles unités.

Ce nombre étant à présent divisible par b, le quotient de la division sera représenté par a nouvelles unités. Puisque chacune de celles-ci est le résultat de la division de l'ancienne unité par b, on pourra la représenter par le symbole $\frac{1}{b}$. Donc l'ensemble des a nouvelles unités sera égal à a fois la quantité $\frac{1}{b}$, ou à $\frac{1}{b} \times a$, relativement à l'ancienne unité.

Donc le résultat de la division de a par b est égal à a fois la $b^{\text{ième}}$ partie de l'ancienne unité, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a,$$

ce que l'on exprime en disant que le quotient de deux nombres est une *fraction* ayant le dividende pour *numérateur* et le diviseur pour *dénominateur*.

Nous emploierons désormais la notation $\frac{a}{b}$ pour désigner la valeur commune des résultats de ces deux opérations.

On peut facilement vérifier que cette fraction $\frac{1}{b} \times a$, étant multipliée par b, reproduit le dividende a.

Si b est un nombre absolu, $\frac{a}{b}$ sera de même signe que a; si b est un nombre négatif, $\frac{a}{b}$ sera de signe opposé à celui de a, comme cela résulte des règles de la multiplication de $\left(\frac{1}{b} \times a\right)$ par b.

La multiplication qui donne $\frac{1}{b} \times a$ pourra être considérée

comme étant commutative, si dans le produit $a \times \frac{1}{b}$ on définit la multiplication par $\frac{1}{b}$ comme équivalente à la division par b.

Si, au lieu de multiplier $\frac{1}{b}$ par a, on multipliait $\frac{c}{b}$ ou $\frac{1}{b} \times c$ par a, on voit facilement que l'on aurait les diverses égalités

$$\left(\frac{1}{b} \times c\right) \times a = \frac{1}{b} \times (c \times a) = \frac{1}{b} \times (a \times c) = \left(\frac{1}{b} \times a\right) \times c$$
$$= \frac{c}{b} \times a = \frac{c \times a}{b} = \frac{a \times c}{b} = \frac{a}{b} \times c.$$

Il s'ensuit de là que l'expression $\frac{c}{b} \times a$ pourra être remplacée par $a \times \frac{c}{b}$, si l'on définit le produit d'un nombre entier par une fraction comme étant obtenu en multipliant l'entier par le numérateur de la fraction, et en divisant le produit par le dénominateur de cette même fraction.

Si l'on remplace maintenant l'entier a par une fraction $\frac{a}{d}$, il résulte de la même définition que le produit de $\frac{a}{d}$ par $\frac{c}{b}$ est égal à $\frac{a \times c}{d \times b}$. De même pour un plus grand nombre de facteurs.

17.

La multiplication des fractions se ramenant à deux multiplications de nombres entiers, l'une et l'autre commutatives et associatives, on voit que la multiplication des fractions jouit également de ces deux propriétés.

De l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ il résulte que toute division par un nombre b peut être changée en une multiplication par la fraction $\frac{1}{b}$.

De même $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \left(a \times \frac{1}{b}\right) \times \left(c \times \frac{1}{d}\right) = a \times \frac{1}{b} \times c \times \frac{1}{d}$.

Donc, à l'aide des fractions on peut changer toutes les divisions en multiplications.

De l'égalité $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$ on conclut que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ est le quotient de la division de $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, ce qui donne la règle connue de la division des fractions.

De la formule $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ on conclut, en faisant $d = c$, d'où $\frac{c}{d} = \frac{c}{c} = 1$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}.$$

De là on tire les règles pour la réduction au même dénominateur et pour la simplification des fractions.

On a $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{1}{d} \times a + \frac{1}{d} \times b = \frac{1}{d} \times (a + b) = \frac{a+b}{d}$, d'où l'on conclut aisément la propriété *distributive* de la multiplication des fractions par rapport à l'addition.

De là résulte encore $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, etc.

Tous ces résultats subsistent lorsqu'on remplace les quotients de nombres entiers par des quotients de nombres fractionnaires.

18.

Les nombres entiers et les nombres fractionnaires s'appellent d'un nom commun *nombres rationnels*.

Les règles pour l'élévation aux puissances des nombres rationnels sont les mêmes que pour les nombres entiers. On a, m et n désignant des *entiers* positifs,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Il en résulte, pour $p > n$,

$$\frac{a^p}{a^n} = a^{p-n}.$$

Pour $p = n$, le quotient serait l'unité, tandis que la règle

précédente donnerait pour ce quotient l'expression a^0. Pour que la règle subsiste, il suffit de définir, comme nous l'avons déjà fait au nº 8, la puissance d'exposant zéro d'un nombre quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, mais différent de zéro, comme représentant l'unité.

Pour $p < n$, le quotient $\frac{a^p}{a^n}$ est égal à

$$\frac{1}{a^{n-p}},$$

tandis que la règle ci-dessus donnerait

$$a^{n-p} = a^{-(p-n)}.$$

Cette règle subsistera donc, si l'on définit une puissance négative a^{-m} comme représentant l'unité divisée par a^m.

On peut aisément s'assurer que, d'après ces conventions, les règles établies plus haut pour le calcul des puissances positives s'appliqueront toutes aux puissances à exposants négatifs.

On pourra ainsi mettre une fraction sous la forme du produit de son numérateur par la puissance de degré — 1 de son dénominateur.

19.

On voit maintenant comment l'introduction des fractions permet d'étendre généralement aux proportions entre nombres fractionnaires toutes les propriétés que nous avions établies, avec des restrictions, pour le cas des nombres entiers.

Les résultats des quatre premières opérations sur les nombres entiers ou fractionnaires peuvent désormais s'exprimer exactement par des fractions.

On peut aussi transformer, si l'on y trouve avantage, un résultat fractionnaire en un autre résultat, soit exact, soit approché, exprimé au moyen de fractions d'espèce choisie d'avance.

Quant aux racines des nombres entiers, à la recherche desquelles se ramène l'extraction des racines des fractions, on démontre que celles qui ne sont pas exprimables en nombres entiers ne le sont pas non plus en nombres fractionnaires. Mais on peut, à

l'aide des fractions, trouver des valeurs dont les $m^{\text{ièmes}}$ puissances différeront aussi peu que l'on voudra d'un nombre donné quelconque, sauf restriction dans le cas où le nombre proposé serait négatif et la racine cherchée d'indice pair.

20.

D'après ce que nous venons de voir, il n'existe aucun nombre fractionnaire qui, élevé à la $n^{\text{ième}}$ puissance, reproduise un nombre entier ou fractionnaire, pris au hasard, en dehors des exceptions, relativement très rares, que présentent les nombres qui sont des puissances exactes.

Mais nous venons de voir aussi qu'il existe une infinité de fractions dont les puissances $n^{\text{ièmes}}$ approchent d'un nombre donné a, les unes formant une série croissante de valeurs dont les $n^{\text{ièmes}}$ puissances approchent de a par défaut, les autres formant une série décroissante donnant des approximations par excès, et cela de telle sorte qu'un terme de la première série pourra différer aussi peu que l'on voudra d'un terme de la seconde, sans que cette différence puisse jamais devenir nulle.

Cela tient à ce que la série des nombres fractionnaires peut croître par degrés aussi rapprochés que l'on voudra, mais en laissant toujours des lacunes qu'il est impossible de remplir; tandis qu'une grandeur continue, comme une ligne, un angle, un temps, etc., ne peut varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

On peut donc, lorsque la série numérique fait défaut, employer, comme mode de représentation, des grandeurs linéaires, par exemple, au moyen desquelles il est possible, comme on l'a déjà vu, d'exprimer les nombres soit entiers, soit fractionnaires.

Par exemple, si l'on considère, dans un carré ABDC, le côté AB et la diagonale BC, une construction très simple montre que le carré ABDC est divisible en quatre triangles égaux, tandis que le carré construit sur BC contient huit de ces triangles; d'où l'on conclut que le carré de la diagonale est double de celui du côté. Le rapport des aires de deux rectangles, dont les bases sont commen-

surables entre elles ainsi que les hauteurs, étant égal au produit du rapport des bases par celui des hauteurs, il en résulte que les aires de deux carrés dont les côtés sont commensurables entre eux auront pour rapport la deuxième puissance du rapport des côtés. Si l'on compare le carré de AB à un carré dont le côté a pour rapport avec AB une quelconque des fractions dont le carré approche de 2 par défaut ou par excès, ce nouveau carré aura une aire qui approchera autant que l'on voudra de l'aire 2 du carré de la diagonale, et celui-ci sera dit la *limite* du carré variable correspondant tour à tour aux *fractions approchées*.

On démontre que, si deux séries de grandeurs, l'une croissante, l'autre décroissante, sont telles que la différence d'un terme de la première avec un terme de la seconde puisse décroître indéfiniment, ces grandeurs ne peuvent pas s'approcher indéfiniment de deux limites différentes, de sorte que la limite commune des deux suites est connue dès que l'on peut trouver une quantité qui soit à la fois plus grande que chacune des quantités de la série croissante et plus petite que chacune des quantités de la série décroissante.

Dans l'exemple actuel, les lignes dont les carrés approchent indéfiniment du double du carré de AB ont pour limite commune la diagonale AD. Les fractions que représentent ces lignes n'ont pas de limite exprimable en nombres. Si cette limite était exprimable en nombre, on la désignerait par $\sqrt{2}$. Bien qu'aucun nombre ne puisse représenter la diagonale, si l'on interprète géométriquement les opérations d'arithmétique, la construction du côté du carré double sera possible, et comme cette construction correspond à l'extraction de la racine carrée arithmétique toutes les fois que celle-ci est possible, on pourra la désigner, pour le cas actuel, par le signe $\sqrt{2}$.

Or l'Arithmétique permettant de calculer deux suites de nombres correspondant aux deux séries de longueurs approchées, le symbole $\sqrt{2}$ exprimera quelles sont les opérations à faire pour obtenir les deux suites de nombres représentant des longueurs dont la limite est le résultat de l'opération géométrique $\sqrt{2}$.

Ces considérations sont indépendantes de la possibilité de la

construction géométrique de la limite des deux suites de valeurs approchées. Il suffit que l'existence de ces deux suites soit démontrée, et que l'on puisse soit construire, soit calculer leurs termes. Faute d'une détermination directe et exacte de la limite, on aura toujours dans la connaissance de ces deux suites un moyen pour comparer cette limite inconnue avec une grandeur donnée, et l'on constatera que cette grandeur diffère de la limite, lorsqu'on pourra trouver un terme de la suite croissante plus grand ou un terme de la suite décroissante plus petit que cette grandeur. Si, au contraire, on reconnaît qu'il n'y a aucun terme de la suite croissante qui soit plus grand, ni aucun terme de la suite décroissante qui soit plus petit, alors la grandeur proposée sera la limite elle-même.

On désignera par un même symbole quelconque et la grandeur continue qui est la limite des *valeurs approchées,* et la suite indéfinie des nombres rationnels qui représentent ces mêmes valeurs approchées. Ce symbole, qui rappelle la loi de formation des *valeurs approchées* d'une quantité incommensurable avec l'unité, se nomme, pour abréger, un nombre *incommensurable*.

Cette imperfection de l'Arithmétique, qui ne peut représenter exactement qu'une partie infiniment restreinte des quantités continues, est sans inconvénient aucun dans les applications à l'étude de la nature, puisque les opérations d'approximation numérique peuvent toujours être poussées assez loin pour que l'erreur commise échappe à nos moyens d'observation.

21.

L'introduction des nombres incommensurables rendra toujours possibles les deux opérations inverses de celle de l'élévation aux puissances pour des valeurs entières ou fractionnaires de la *base*. En effet, l'Arithmétique fournit les moyens de trouver les valeurs de x qui satisfont à l'une ou l'autre des équations

$$x^m = b, \qquad a^x = b,$$

la première pour m entier (et pour b positif si m est pair), la seconde pour a positif ainsi que b.

Si l'exposant m est divisible par n, la racine $n^{\text{ième}}$ de a^m sera $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, puisque $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$. Le principe de permanence des règles de calcul nous conduit à continuer l'emploi de la formule

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

quels que soient les entiers m et n, et d'introduire ainsi l'emploi des exposants fractionnaires comme équivalent à celui des radicaux. On vérifierait aisément que les règles relatives aux puissances entières ont lieu également pour les puissances fractionnaires.

On peut même considérer $\frac{m}{n}$ comme étant une quelconque des fractions qui convergent vers un certain nombre incommensurable, et l'on verra qu'en même temps $a^{\frac{m}{n}}$ convergera vers une certaine limite déterminée, qui sera une puissance de a d'exposant incommensurable, et qui pourra, dans certains cas, être elle-même un nombre commensurable.

Une puissance d'exposant incommensurable d'une base positive a une seule valeur. Si la base est négative, la même puissance n'est plus exprimable en nombres commensurables ou incommensurables.

Si la base a est positive, ainsi que la puissance b, l'équation $a^x = b$ est toujours résoluble, et d'une seulé manière. Si $a > 1$, l'exposant x sera positif ou négatif, suivant que b lui-même sera > 1 ou < 1; l'inverse aura lieu pour $a < 1$.

22.

Ainsi, à l'aide des nombres positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, commensurables ou incommensurables, on peut dans tous les cas exécuter les opérations d'addition et de soustraction, de multiplication et de division, d'élévation aux puissances sur les nombres de toutes les espèces désignées.

Il y a encore toutefois exception pour l'extraction des racines, lorsque, la puissance ayant une valeur négative, l'indice de la

racine est un nombre pair ou un nombre incommensurable. Il en peut être de même pour la recherche de l'exposant, lorsque l'équation $a^x = b$, et que a et b ne sont pas tous les deux positifs.

De plus, l'extraction des racines peut admettre, selon les cas, 2, 1 ou 0 solutions.

Ces irrégularités, analogues à celles que nous avons vues disparaître dans les cas traités jusqu'ici, grâce aux extensions apportées à la notion de quantité, nous font soupçonner encore cette fois la nécessité d'apporter à cette notion une généralisation nouvelle.

23.

Jusqu'à présent, nous avons considéré les nombres *dirigés*, c'est-à-dire les symboles représentant des quantités telles que les déplacements rectilignes, qui peuvent se faire parallèlement à une droite donnée et dans deux sens opposés.

Considérons maintenant des déplacements rectilignes dirigés d'une manière quelconque dans le plan, et que l'on pourra représenter par une longueur rectiligne faisant un angle donné avec une direction fixe, prise pour origine des angles. Nous donnerons encore le nom de *vecteurs* à ces symboles de déplacement.

L'opération du déplacement d'un point d'une position à une autre peut être désignée de plusieurs manières, dont la plus simple est celle qui consiste à employer deux nombres, l'un exprimant la longueur du déplacement, et l'autre exprimant l'angle que fait la direction du déplacement avec l'origine des angles, ce second nombre étant placé sous forme d'indice à la droite du premier. Ainsi le déplacement dont la longueur est r et qui fait avec l'origine des angles un angle p, compté dans le sens des angles croissants, sera représenté, du moins provisoirement, par le symbole r_p. Le nombre r est dit la *longueur* ou le *module* du vecteur; p est son *argument*.

24.

Si l'on suppose une portion quelconque du plan liée invariable

ment avec le point décrivant du vecteur, et entraînée avec ce point de manière que la droite indéfinie dont le vecteur r_p faisait d'abord partie soit assujettie à glisser le long de r_p, tous les points du plan décriront des droites égales et parallèles à r_p, de sorte que le vecteur r_p ne représente pas seulement le déplacement déterminé d'un point, mais encore le déplacement d'une portion de plan, parcourant une longueur donnée r, parallèlement à une droite d'inclinaison donnée p.

On voit, par conséquent, que, si l'on considère le déplacement r_p sous ce dernier point de vue, la ligne r_p pourra être remplacée par toute autre droite égale, parallèle et de même sens.

25.

Si l'on fait parcourir au point décrivant d'abord une ligne AB, puis une seconde ligne BC (le sens du parcours étant indiqué par l'ordre des lettres), ce point sera finalement transporté de A en C, comme il l'aurait été par le déplacement unique AC. Donc, la combinaison de deux déplacements successifs AB, BC pouvant être remplacée par le déplacement AC, on aura le droit de la définir comme *égale* à AC.

Examinons maintenant quelles sont les propriétés de cette combinaison de déplacements.

1° Cette combinaison est *uniforme*.

2° Le vecteur AC se réduit à AB, lorsque la longueur de BC se réduit à zéro, quelque direction que l'on puisse attribuer à la longueur évanouissante. De même, si AB s'évanouit, AC se réduit à BC. Donc le *module* de l'opération est *zéro*.

3° Étant donnés deux vecteurs a et b, si le point mobile parcourt une première fois a, puis b, et une seconde fois b, puis a, il aura parcouru les côtés d'un parallélogramme, pour arriver chaque fois d'une extrémité à l'autre de la même diagonale. Donc l'opération est *commutative*.

4° Si l'on parcourt d'abord AB et BC, ce qui revient à parcourir AC, puis, que l'on parcoure CD; si, d'autre part, on parcourt AB, puis le résultat BD des déplacements BC et CD; on aura, dans

les deux cas, pour résultat final le même déplacement AD. On en conclut que l'opération est *associative.*

Donc l'opération de la combinaison des déplacements consécutifs possède toutes les propriétés caractéristiques de l'addition. Elle pourra donc être appelée elle-même *addition des vecteurs,* et représentée par le signe +.

26.

L'opération inverse de l'addition AB + BC = AC consiste à trouver un déplacement BC qui, ajouté à AB, reproduise AC. Or, si l'on désigne par CB le vecteur de même longueur que BC, mais de sens opposé, on aura, d'après la définition de l'addition AC + CB = AB. Si l'on représente par le signe — l'opération inverse de l'addition, on aura donc AC — BC = AC + CB = AB. Donc la soustraction s'effectue en ajoutant au terme additif le terme soustractif pris en sens contraire. Ainsi, comme nous l'avons déjà vu dans la théorie des déplacements positifs ou négatifs, l'addition d'un vecteur se change en soustraction, et *vice versa,* lorsqu'on renverse le sens dans lequel ce vecteur est parcouru.

Ce renversement du sens d'un vecteur équivaut à l'augmentation ou à la diminution de son argument de deux angles droits, de sorte que

$$r_{p\pm\pi} = -r_p.$$

En général, un vecteur r_p ne change pas lorsqu'on augmente son argument d'un multiple pair, positif ou négatif, de la demi-circonférence; il changera seulement de signe, si l'on augmente son argument d'un multiple impair quelconque de la demi-circonférence; c'est-à-dire que l'on a

$$r_{p+2k\pi} = r_p,$$

$$r_{p+(2k+1)\pi} = -r_p,$$

ou, en réunissant ces deux formules en une seule,

$$r_{p+k\pi} = (-1)^k r_p.$$

Si l'on a plusieurs vecteurs de même argument à combiner ensemble par addition ou par soustraction, on se retrouvera dans le même cas que dans l'addition des *lignes dirigées,* et si l'on opère par la même règle que celle que nous avons suivie pour l'addition des quantités positives et négatives, on obtiendra pour résultat un vecteur ayant pour longueur l'excès de la somme des longueurs des vecteurs dont la direction répond à l'angle p, diminuée de la somme des longueurs des vecteurs de direction opposée, cette longueur pouvant être positive ou négative.

Cela revient à introduire des vecteurs de longueur négative, que l'on pourra changer en vecteurs de longueur positive en augmentant l'argument d'une demi-circonférence. Ainsi pour changer le signe d'un vecteur, il suffira de changer sa longueur de signe, ce qui équivaut à augmenter l'argument de deux angles droits,

$$-r_p = (-r)_p = r_{p \pm \pi}.$$

L'addition et la soustraction des vecteurs parallèles à une même droite donne donc pour résultat

$$\begin{aligned} r_p + r'_p - r''_p \pm \ldots &= r_p + r'_p + (-r'')_p \pm \ldots \\ &= (r + r' - r'' \pm \ldots)_p. \end{aligned}$$

27.

La multiplication d'un vecteur r_p par un nombre entier ρ, revient à l'addition de ρ vecteurs égaux à r_p, ce qui donne

$$r_p \times \rho = (r\rho)_p.$$

Le résultat est le même, comme on le voit facilement, dans le cas où ρ est fractionnaire ou incommensurable.

Si l'on porte sur l'origine des angles l'unité de longueur $O1$ et la longueur $O\rho$ dont le rapport à $O1$ est le nombre ρ, on obtiendra le produit du vecteur $OA = r_p$ par $\rho = \frac{O\rho}{O1}$ en construisant sur la base $O\rho$, homologue à $O1$, un triangle $O\rho B$

semblable au triangle $O1A$; le côté OB du nouveau triangle représentera le vecteur $OA \times \rho$.

Si l'on fait maintenant tourner le triangle $O\rho B$ autour de O d'un angle $\varphi = \rho O \rho' = BOB'$, les vecteurs ρ et $OB = (r \times \rho)^p$ seront changés en ρ_φ et $(r \times \rho)_{p+\varphi}$. Examinons les propriétés de cette nouvelle opération.

1° Elle est *uniforme*.

2° Le résultat $(r \times \rho)_{p+\varphi}$ étant donné par deux opérations commutatives et indépendantes entre elles, une multiplication de longueurs et une addition d'arguments, l'opération est *commutative*.

3° Si l'on introduit un autre opérateur de plus $\rho'_{\varphi'}$, le résultat des deux opérations consécutives sera $(r \times \rho \times \rho')_{p+\varphi+\varphi'}$. Les opérations qui donnent la longueur et l'argument étant associatives, l'opération finale l'est aussi. Donc la construction est une opération *associative*.

4° Si l'un des vecteurs a une longueur égale à l'unité et un argument nul, c'est-à-dire s'il se réduit à l'unité absolue, le résultat se réduit à l'autre vecteur. Donc le *module* de cette opération est l'*unité*.

5° Si la longueur de l'un des vecteurs s'annule, la longueur du vecteur résultant sera nulle aussi. Donc le résultat sera égal au *module zéro de l'addition*.

6° Considérons deux vecteurs AB, BC, et leur somme AC. Si on les soumet tous les trois à l'opération en question relativement au vecteur ρ_φ, il faudra d'abord multiplier leurs modules par ρ, ce qui donne un triangle $AB'C'$ semblable à ABC et semblablement placé. Ensuite on fera tourner ce triangle de l'angle φ, ce qui augmentera de φ les arguments des trois vecteurs. Donc pour opérer sur la somme $AB + BC = AC$, on ajoutera les résultats obtenus en opérant sur les deux parties. Donc l'opération est distributive relativement à l'addition.

Il résulte de là que l'opération en question, jouissant des propriétés fondamentales de la multiplication, doit être assimilée à cette dernière opération. Donc la multiplication de deux ou

plusieurs vecteurs s'effectue en multipliant entre eux les modules et ajoutant les arguments, de sorte que l'on a

$$r_p \times r'_{p'} = (r \times r')_{p+p'}.$$

L'opération inverse, qui prendra le nom de *division*, consistera dans la division des longueurs accompagnée de la soustraction des arguments, de sorte qu'on aura

$$\frac{r_p}{r'_{p'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{p-p'}.$$

On peut donner à cette opération la forme d'une multiplication, en écrivant

$$\left(r.\frac{1}{r'}\right)_{p+(-p')} = r_p \times \left(\frac{1}{r'}\right)_{-p'}.$$

L'élévation aux puissances se fait en élevant la longueur du vecteur à la puissance proposée m, et en multipliant l'argument par m, d'où

$$(r_p)^m = (r^m)_{pm}.$$

Cette formule est vraie pour m entier, quels que soient r et p.

La première des deux opérations inverses de l'élévation des vecteurs aux puissances, l'extraction des racines, sera toujours possible; en d'autres termes, l'élévation d'un vecteur à une puissance fractionnaire quelconque peut toujours s'effectuer.

Soit, par exemple, un vecteur r_p, dont nous supposerons d'abord la longueur r positive, et soit $m = \frac{\mu}{\nu}$ un nombre fractionnaire quelconque, positif ou négatif. On aura

$$(r_p)^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(r^{\frac{\mu}{\nu}}\right)_{\frac{\mu}{\nu}p}.$$

Si la longueur r était négative, on la changerait en une longueur positive en augmentant l'argument p d'une demi-circonférence, ce qui donnerait

$$[(-r)_p]^{\frac{\mu}{\nu}} = (r_{p+\pi})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(r^{\frac{\mu}{\nu}}\right)_{\frac{\mu}{\nu}(p+\pi)}.$$

En particulier, si l'on suppose r négatif et $p = 0$, ou, ce qui

revient au même, r positif et $p = \pi$, et que l'exposant soit une fraction de dénominateur pair, on aura

$$(-r)^{\frac{\mu}{2\nu}} = (r_\pi)^{\frac{\mu}{2\nu}} = \left(r^{\frac{\mu}{2\nu}}\right)_{\frac{\mu}{2\nu}\pi}.$$

Ainsi on a

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = (1_\pi)^{\frac{1}{2}} = 1_{\frac{\pi}{2}}.$$

La racine carrée de -1 est donc représentée par un vecteur de longueur 1, faisant un angle droit avec l'origine des angles. On voit, en effet, qu'en faisant subir deux fois de suite à un vecteur de longueur $+1$ l'opération désignée par $1_{\frac{\pi}{2}}$, et qui consiste en une rotation d'un quadrant, on change ce vecteur en un autre égal à -1; donc $\left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1$, et par conséquent

$$1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}.$$

On désigne généralement ce vecteur $1_{\frac{\pi}{2}}$ par la lettre i.

28.

Lorsqu'un vecteur est défini géométriquement, par la seule considération du résultat final de l'opération, nous avons vu que ce résultat n'est pas changé si l'on altère l'argument d'un multiple quelconque de 2π. Donc la racine $n^{\text{ième}}$ d'un vecteur défini géométriquement a un module de longueur déterminée, mais elle admet une infinité d'arguments différents, qui déterminent n directions distinctes, convenant toutes au vecteur cherché. Ainsi l'on a, quel que soit l'entier k,

$$\sqrt[n]{r_p} = \sqrt[n]{r_{p+2k\pi}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{p}{n}+\frac{2k\pi}{n}}.$$

Les extrémités de tous ces vecteurs sont situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$, qu'elles partagent en n parties égales. Deux solutions sont ou ne sont pas identiques de position, suivant que les nombres $2k$ et $2k'$ qui leur correspondent sont ou non *congrus suivant le module n*. Si l'on a

$$2k'\pi = 2k\pi + 2nh\pi,$$

c'est-à-dire

$$k' \equiv k \text{ (mod. } n),$$

alors $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2k'\pi}{n}$ différeront par un multiple de 2π, et les rayons correspondants à ces valeurs coïncideront.

Si nous comparons ce résultat à celui que nous avons trouvé pour l'opération analogue relative aux nombres positifs ou négatifs, on voit que les irrégularités et les cas d'impossibilité ont maintenant disparu.

D'abord l'extraction des racines est maintenant une opération multiforme, dont le nombre de solutions est constamment égal à l'indice de la racine, ou, plus généralement, au dénominateur de l'indice fractionnaire réduit à sa plus simple expression.

Ensuite cette opération est toujours possible, quels que soient la quantité r_p et l'indice $\frac{m}{n}$ de l'exposant fractionnaire.

29.

Si l'exposant μ était incommensurable, on pourrait le considérer comme la limite d'une fraction de dénominateur infiniment grand, et les côtés du polygone dont les sommets correspondent aux diverses solutions de la question se réduisant à zéro, un point quelconque de la circonférence de rayon r^μ pourrait représenter la puissance $(r_p)^\mu$. Cette puissance n'a donc que son module qui soit déterminé, son argument étant quelconque.

Il en serait autrement si l'argument p n'était plus défini seulement par une direction dans le plan, mais par le nombre fractionnaire ou incommensurable de circonférences qu'il renferme. Dans ce cas, l'élévation aux puissances devient une opération *uniforme*, quelle que soit la nature de l'exposant, entier ou fractionnaire, rationnel ou irrationnel, comme c'est le cas lorsqu'on donne non seulement la position du point r_p sur le plan, mais encore le nombre de fois qu'il a fait le tour de l'origine, dans chacun des deux sens, pour parvenir du point de départ à la position finale.

Ainsi, lorsque l'expression r_p est employée pour désigner un point du plan, abstraction faite de la nature du chemin parcouru pour y arriver, l'opération de l'élévation aux puissances est *multiforme* ou *infiniliforme* suivant que l'exposant est fractionnaire ou incommensurable. Dans les deux cas, les points correspondants aux solutions sont situés sur un cercle, où ils occupent soit les sommets d'un polygone régulier, soit la circonférence entière.

Au contraire, si r et p sont l'un et l'autre des nombres donnés, la valeur de p fera connaître combien de fois, dans le déplacement correspondant à r_p, le point décrivant aura fait le tour de l'origine dans un sens plus que dans l'autre. L'opération est alors possible, et cela d'une seule manière, comme dans le calcul des nombres positifs.

30.

Il nous reste à nous occuper de la seconde opération inverse de l'élévation aux puissances, c'est-à-dire de la recherche de l'exposant ou du *logarithme*, étant données la *base* et la *puissance*. Mais il faut auparavant présenter quelques remarques sur l'expression des *verseurs* sous la forme de puissances.

La fonction r_p peut se décomposer dans le produit de deux facteurs, savoir la *longueur* ou le *module* r, et le *coefficient de rotation* ou *verseur* 1_p. Pour l'élever à une puissance m, on élève à cette puissance le facteur r, et dans l'autre facteur 1_p on multiplie par m l'argument p.

Si l'on veut étendre aux quantités r_p la règle pour l'élévation aux puissances des produits de facteurs numériques, il faut pouvoir mettre 1_p sous la forme d'une puissance dont l'exposant contienne p en facteur. Soit ε la base de cette puissance; on aura alors

$$(1) \qquad 1_p = \varepsilon^p,$$

d'où

$$r_p = r\varepsilon^p, \qquad (r_p)^m = r^m \varepsilon^{mp}.$$

Pour avoir la valeur de l'indéterminée ε, faisons, dans l'égalité

précédente (1), $p = \frac{\pi}{2}$. La valeur de 1_p sera alors $1_{\frac{\pi}{2}} = i$. Donc

$$i = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}},$$

et par suite, en élevant les deux membres à la puissance $\frac{2}{\pi}$,

$$i^{\frac{2}{\pi}} = \varepsilon.$$

Maintenant on aura, pour une puissance quelconque de ε,

$$\varepsilon^p = 1_p = i^{\frac{2p}{\pi}}. \tag{2}$$

Donc la quantité ε ou $i^{\frac{\pi}{2}}$ peut être considérée comme la base d'un système de logarithmes. Ces logarithmes, considérés comme des angles évalués en parties du rayon, seront les exposants des puissances de la base ε qui représentent les *verseurs* correspondants à ces angles.

Si l'on voulait prendre i pour base, on aurait les nouveaux logarithmes en multipliant les anciens par $\frac{2}{\pi}$, de sorte que le logarithme d'un verseur 1_p serait égal à la valeur numérique de l'angle p évaluée *en parties du quadrant*.

Ainsi toute quantité de longueur 1 peut se mettre sous la forme d'une puissance de la base i, de même que toute quantité d'argument nul peut s'exprimer par une puissance de la base e.

Mais l'usage simultané de ces deux bases dans les calculs conduirait à des complications inextricables. Nous verrons bientôt comment on peut éliminer l'une d'elles et exprimer les verseurs, aussi bien que les longueurs, au moyen des puissances de l'autre.

31.

Les quantités que nous désignons sous le nom de vecteurs ont été jusqu'à présent représentées par un symbole composé des deux coordonnées polaires du point du plan qu'elles déterminent. Nous allons maintenant introduire un autre mode de représentation.

Étant donné un vecteur r_p, on peut le décomposer en deux

autres vecteurs, d'arguments choisis à volonté, et dont les longueurs s'obtiennent par la construction d'un parallélogramme ayant r_p pour diagonale.

Le mode de décomposition le plus important est celui dans lequel les arguments des deux composantes seront zéro et $\frac{\pi}{2}$, les modules pouvant être, suivant les cas, positifs ou négatifs.

En désignant ces modules par x et y, le vecteur aura pour expression

$$r_p = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}} = x.1_0 + y.1_{\frac{\pi}{2}},$$

ou enfin

(1) $$r_p = x + iy.$$

Considéré sous cette forme, un vecteur prend le nom de *quantité complexe,* qui rappelle que le vecteur est la somme de deux composantes irréductibles entre elles. A l'avenir nous emploierons concurremment les deux dénominations.

32.

Si l'on suppose maintenant la longueur r égale à l'unité, la valeur de r_p se réduira au verseur 1_p, et les coordonnées x et y ne dépendront plus que de l'angle p. Ces deux fonctions de p, ainsi définies géométriquement, sont connues sous les noms de *cosinus* et de *sinus* de l'angle p.

Dès lors l'égalité (1) deviendra

(2) $$1_p = \cos p + i \sin p,$$

et de cette nouvelle forme donnée à 1_p on peut, à l'aide des principes précédents, joints à un autre principe nouveau, déduire toutes les formules de la Trigonométrie. Ce principe nouveau, qui n'a pas d'analogue dans l'Algèbre des quantités *dirigées*, est le *principe de décomposition*. Il consiste en ce que, si deux quantités complexes sont égales entre elles, leurs *composantes rectangulaires* doivent être égales chacune à chacune. Ainsi de l'équation

$$a + ib = a' + ib'$$

on conclut les deux égalités

$$a = a', \qquad b = b'.$$

Les propriétés des quantités complexes reposant sur leur définition géométrique, ce principe peut être considéré comme évident.

Par des considérations élémentaires, on parvient à établir les développements des fonctions cos p et sin p en séries convergentes pour toutes les valeurs de p. On voit ensuite que la somme de ces séries, multipliées respectivement par l'unité et par i, n'est autre chose que la série qui représente le développement de e^x et dans laquelle on aura remplacé x par ip.

Si donc on prend pour définition de l'opération e^x l'opération par laquelle on exprime aussi approximativement que l'on voudra la limite de la somme

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

la valeur de $\cos p + i \sin p$ sera donnée par la même opération effectuée sur ip au lieu de x, de sorte que l'on aura

$$1_p = \cos p + i \sin p = e^{ip}.$$

33.

Nous adopterons dorénavant, au lieu de la notation 1_p, le symbole e^{ip}, et il est aisé de se convaincre que cette exponentielle *imaginaire* jouit de toutes les propriétés des exponentielles réelles.

D'abord, pour la multiplication, l'égalité $1_p \times 1_q = 1_{p+q}$ peut s'écrire

$$e^{ip} \times e^{iq} = e^{i(p+q)}.$$

De là résultent les règles de la division, de l'élévation aux puissances de degré réel, de l'extraction des racines, etc., dans le cas des exponentielles à exposants imaginaires.

De même, si l'on multiplie entre elles les deux séries qui

expriment e^x et $1_p = e^{ip}$, on obtiendra une série de même forme, qui n'est autre que le développement de e^x dans lequel on aurait remplacé x par $x + ip$, et que nous désignerons, par définition, comme le développement de e^{x+ip}. On conclut de là que l'on aura, pour le produit de deux exponentielles, l'une à exposant réel, l'autre à exposant imaginaire,

$$e^x \times e^{ip} = e^{x+ip}.$$

De même pour le cas de deux exponentielles à exposants complexes.

Nous sommes donc autorisés désormais à remplacer dans tous les cas la notation 1_p par la notation e^{ip}, qui a l'avantage de rattacher au calcul des exponentielles celui des symboles de rotation ou *verseurs*, en rapportant les exponentielles imaginaires à la même base e que les exponentielles à exposants réels, et en assimilant, par conséquent, les arguments multipliés par i à des logarithmes imaginaires de même base que les logarithmes réels.

D'après cela on aura

$$i = 1_{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{i\pi}{2}},$$

et la base provisoire ε que nous avons mentionnée plus haut, sera exprimée par

$$\varepsilon = i^{\frac{2}{\pi}} = e^i.$$

Au lieu de r_p, nous écrirons de même re^{ip}.

34.

Il est maintenant facile de définir l'élévation d'une quantité complexe re^{ip} à une puissance complexe d'exposant $m + in$. En mettant la quantité complexe re^{ip} sous la forme $e^{\log r + ip}$, la puissance d'exposant $m + in$ de cette exponentielle s'obtiendra en multipliant l'exposant $\log r + ip$ par $m + in$, ce qui donne

$$e^{(\log r + ip)(m+in)} = e^{m\log r - np + i(n\log r + mp)}$$
$$= r^m e^{-np}[\cos(n\log r + mp) + i\sin(n\log r + mp)].$$

On résoudra avec la même facilité les deux problèmes inverses du problème de l'élévation aux puissances.

1° *Trouver une quantité z dont la puissance d'indice $m+in$ soit égale à re^{ip}.*

De l'égalité

$$z^{m+in} = re^{ip} = e^{\log r + ip},$$

on tire

$$z = e^{\frac{\log r + ip}{m+in}} = e^{\frac{(\log r + ip)(m-in)}{m^2+n^2}} = e^{\frac{m \log r + np + i(mp - n \log r)}{m^2+n^2}}$$

2° *Trouver à quelle puissance il faut élever une quantité re^{ip} pour obtenir un résultat donné se^{iq}.*

L'équation du problème est

$$(re^{ip})^\lambda = e^{(\log r + ip)\lambda} = se^{iq} = e^{\log s + iq}.$$

En égalant les exposants des deux exponentielles, il viendra

$$\lambda = \frac{\log s + iq}{\log r + ip} = \frac{\log r \log s + pq + i(q \log r - p \log s)}{(\log r)^2 + p^2}.$$

En particulier, le logarithme d'un nombre complexe re^{ip} est égal à $\log r + ip$.

Si nous nous trouvons dans le cas où l'argument p est déterminé seulement à un multiple de la circonférence près, le logarithme de re^{ip} sera susceptible d'une infinité de valeurs, comprises dans la formule

$$\log r + i(p + 2k\pi).$$

Si $p = 0$, r étant positif, la valeur générale du logarithme sera

$$\log r + 2ik\pi;$$

une de ces déterminations est réelle et égale au logarithme arithmétique.

De même, la valeur générale du logarithme de $-r$ est

$$\log(-r) = \log r + (2k+1)i\pi,$$

et aucune de ces déterminations n'est réelle.

On tire de là

$$\log 1 = 2ki\pi, \qquad \log(-1) = (2k+1)i\pi.$$

Si l'on donnait la quantité complexe sous la forme $x + iy$, on pourrait la ramener d'abord à la forme re^{ip}, en posant

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p,$$

d'où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos p = \frac{x}{r}, \quad \sin p = \frac{y}{r}.$$

On aura dès lors

$$\log(x + iy) = \tfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arc\,tang} \frac{+y}{+x} + 2ki\pi,$$

en indiquant par la notation $\operatorname{arc\,tang} \frac{+y}{+x}$ celui des deux arcs moindres que 2π dont la tangente est égale à $\frac{y}{x}$ et dont le cosinus et le sinus sont de mêmes signes respectivement que x et y.

35.

Jusqu'à présent l'usage que nous avons fait de la décomposition d'une quantité complexe a été une conséquence des propriétés communes aux opérations faites sur les quantités complexes et aux opérations faites sur les quantités réelles.

Nous avons opéré sur les parties constituantes, r et p, ou x et y, d'une quantité complexe de la même manière que si ces parties eussent été des quantités complexes, tous les résultats des paragraphes précédents subsistant dans cette dernière hypothèse.

Mais il est une classe de problèmes que l'on résout à l'aide des quantités complexes, en s'appuyant sur des considérations qui n'ont pas leurs analogues dans le calcul des quantités réelles.

Une quantité complexe re^{ip} ou $x + iy$ est déterminée par deux nombres indépendants l'un de l'autre, et deux quantités complexes ne peuvent être égales si elles n'ont pas même

longueur et même argument (à un multiple de 2π près), ou si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires ne sont pas égales de part et d'autre. Ainsi l'égalité

$$re^{ip} = r'e^{ip'}$$

entraîne les deux conditions

$$r = r', \qquad p = p' + 2k\pi;$$

l'égalité $x + iy = x' + iy'$ se décompose de même en deux autres,

$$x = x', \qquad y = y'.$$

En général, une équation entre des quantités complexes $w = u + iv$, $z = x + iy$, formée au moyen des règles du calcul algébrique, se ramène à la forme

$$(1) \qquad \varphi(u,v,x,y) + i\chi(u,v,x,y) = 0,$$

et elle se décompose en deux autres équations entre quantités réelles,

$$(2) \qquad \varphi(u,v,x,y) = 0, \qquad \chi(u,v,x,y) = 0.$$

Mais il ne faut pas oublier que ce dédoublement de l'équation complexe repose essentiellement sur la supposition de la réalité des quantités représentées par les symboles u, v, x, y. Si l'on venait à les remplacer par des valeurs complexes, l'équation (1) n'entraînerait plus les équations (2), mais pourrait se décomposer d'une infinité de manières différentes.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(x + iy)^2 + a(x + iy) + b = 0,$$

qui, pour x, y, a, b réels, se décompose dans les deux suivantes,

$$x^2 - y^2 + ax + b = 0, \qquad 2xy + ay = 0,$$

d'où l'on tire les quatre systèmes de solutions

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ y = \pm \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}, \end{cases}$$

les deux premiers devant être choisis dans le cas de $\frac{a^2}{4} - b > 0$, et les deux autres dans le cas de $\frac{a^2}{4} - b < 0$.

Posons maintenant, s, t, u, v devant être réels,

$$x = s + it, \qquad y = u + iv;$$

l'équation (1) deviendra

$$[s + it + i(u + iv)]^2 + a[s + it + i(u + iv)] + b = 0,$$

et elle se décomposera dans les deux suivantes

$$(s - v)^2 - (t + u)^2 + a(s - v) + b = 0,$$
$$2(s - v)(t + u) + a(t + u) = 0,$$

d'où les quatre solutions

$$\begin{cases} t + u = 0, \\ s - v = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \end{cases} \qquad \begin{cases} s - v = -\frac{a}{2}, \\ t + u = \pm\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = it + v - \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \\ y = iv - t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v + it - \frac{a}{2}, \\ y = iv - t \pm \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}, \end{cases}$$

qui montrent que les valeurs complexes de x et de y sont, dans chaque cas, susceptibles d'une infinité de déterminations, parmi lesquelles se trouvent les déterminations réelles, correspondant à des valeurs nulles de v et de t.

36.

Des équations (2) du n° précédent résulte l'équation

$$\varphi(u,v,x,y) - i\chi(u,v,x,y) = 0.$$

Or, si dans la fonction $F(u + iv, x + iy)$ on change i en $-i$, le résultat ne différera du précédent que par le signe de i. Donc, si une équation a lieu entre les variables complexes $u + iv$, $x + iy$,

où x et y sont supposés des nombres réels, la même équation subsistera lorsqu'on changera, dans les variables ainsi que dans les constantes, i en $-i$, c'est-à-dire lorsqu'on y remplacera toutes les quantités complexes par leurs *conjuguées*.

Cette transformation des quantités en leurs conjuguées revient à changer le sens des ordonnées positives dans le plan, ou, ce qui est la même chose, à changer le sens des rotations positives. En coordonnées polaires, cela revient à changer re^{ip} en re^{-ip}, c'est-à-dire, i en $-i$, ou, ce qui est équivalent, p en $-p$.

La quantité conjuguée $x - iy$ ou re^{-ip}, bien que déterminée complètement lorsque l'on connaît $x + iy$ ou re^{ip}, ne peut pas être considérée comme une fonction analytique de $x + iy$ ou re^{ip}. En effet, si l'on pose

$$x + iy = re^{ip} = z,$$

on voit aisément que $x - iy$ ou re^{-ip} ne peut pas s'exprimer au moyen des opérations de l'Analyse exécutées sur la seule quantité z. On a, en effet,

$$iy = z - x, \qquad \text{d'où} \qquad x - iy = 2x - z = z - 2iy,$$

x et y ne pouvant être éliminés à la fois. De même, on aurait

$$e^{ip} = \frac{z}{r} \quad \text{et} \quad r = ze^{-ip}, \qquad \text{d'où} \qquad re^{-ip} = \frac{r^2}{z} = ze^{-2ip},$$

expressions qui ne peuvent se réduire à des fonctions de z seul.

Il en est de même d'une fonction analytique quelconque de x et de y, qui est déterminée par la connaissance de $z = x + iy = re^{ip}$, mais qui généralement ne peut pas s'exprimer au moyen d'une opération analytique faite sur cette variable complexe. C'est que la détermination de la valeur de cette fonction exige une opération qui ne fait pas partie des opérations analytiques, et qui est fondée sur l'hypothèse de la réalité des deux éléments, x et y, ou r et p, de la variable complexe, réalité dont la condition ne peut être exprimée par les opérations communes aux quantités réelles et aux quantités complexes, qui seules portent le nom de fonctions analytiques.

En effet, si l'on admettait pour x et y des valeurs complexes $x = s + it$, $y = u + iv$, d'où

$$x + iy = s - v + i(t + u) = \xi + i\eta,$$

la connaissance de $\xi + i\eta$ déterminerait seulement $s - v$ et $t + u$, mais ne donnerait pas les valeurs séparées de s et t, non plus que celles de u et v. Donc, tandis que les règles de l'algèbre s'appliquent sans altération au cas où x et y seraient elles-mêmes des quantités complexes, la transformation d'une quantité en sa conjuguée ne s'applique qu'au cas où la variable $z = x + iy$ a ses deux coefficients x et y réels, condition incompatible avec la généralisation donnée aux opérations analytiques, en vertu de laquelle ces opérations sont également applicables à toutes les natures de quantités, réelles ou complexes.

37.

Il y a donc lieu de distinguer deux sortes de dépendances en vertu desquelles une fonction de deux variables indépendantes peut être liée à une variable complexe. Dans le cas général, la fonction dépend des valeurs des deux coefficients x, y de la variable complexe, et peut être considérée comme une fonction des deux variables indépendantes x, y, mais non comme une fonction d'une fonction donnée de ces deux variables. Telles sont les fonctions

$$x, \quad y, \quad x - iy, \quad xy, \quad x^2 + y^2, \quad \log(x + y), \quad \text{etc.}$$

Dans d'autres cas, la fonction ne dépend que du seul groupe $x + iy$, et ne varie pas tant que ce groupe ne changera pas de valeur, par exemple lorsqu'on remplacera x et y par les valeurs complexes $x' + ix''$, $y' + iy''$, assujetties aux conditions

$$x' - y'' = x, \qquad x'' + y' = y.$$

Ces fonctions peuvent s'exprimer, exactement ou approximativement, à l'aide d'opérations analytiques faites sur le groupe $x + iy$. Cauchy a donné à ces fonctions le nom de fonctions *monogènes*.

Le caractère de ces fonctions est d'avoir une *dérivée* par rapport au groupe $z = x + iy = re^{i\rho}$, tandis que, dans les fonctions non monogènes, l'accroissement de la fonction pour des variations infinitésimales de x et de y n'est pas proportionnel à celui de $x + iy$, et par suite les deux accroissements ne peuvent avoir un rapport tendant vers une limite indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$.

En effet, si l'on considère une fonction de deux variables $F(x, y)$, il faut, pour qu'elle ait une dérivée par rapport à $x + ay$, que le rapport $\frac{dF(x,y)}{dx + ady}$ ait une limite indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$. Or, ce rapport peut s'écrire sous la forme

$$\frac{F'(x)dx + F'(y)dy}{dx + ady} = \frac{F'(x) + F'(y)\frac{dy}{dx}}{1 + a\frac{dy}{dx}},$$

et pour qu'il ne dépende pas de $\frac{dy}{dx}$, il faut que l'on ait

$$F'(x) : F'(y) = 1 : a,$$

d'où il résulte

(1) $$F'(y) = aF'(x).$$

Alors on a

$$\frac{dF(x,y)}{d(x+ay)} = F'(x) = \frac{1}{a}F'(y),$$

valeur indépendante de $\frac{dy}{dx}$.

Cette condition (1) indique que $F(x, y)$ est exprimable analytiquement au moyen de $x + ay$. Si l'on pose, en effet, $x + ay = z$, d'où $x = z - ay$, il vient

$$F(x, y) = F(z - ay, y).$$

Si cette fonction se réduit à une fonction de z seul, sa dérivée

partielle prise par rapport à y sera nulle, ce qui donnera, comme condition nécessaire et suffisante,

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial x} . a + \frac{\partial F}{\partial y},$$

ce qui s'accorde avec la condition (1) de la monogénéité. Donc dans ce cas la fonction $F(z - ay, y)$ se réduit à une fonction $f(z)$ de z seul ou de $x + ay$, dont la différentielle $df(x + ay)$ sera $f'(x + ay)\, d(x + ay)$, et qui aura, par suite, une dérivée dépendante, comme $f(z)$, de la seule quantité $x + ay$.

(18 juillet 1882.)

REMARQUES

SUR

L'ENSEIGNEMENT DE LA TRIGONOMÉTRIE[1]

PAR M. J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques à la Faculté des sciences de Bordeaux.

I

La Trigonométrie peut être enseignée à deux points de vue différents, dont le mode habituel d'exposition adopté aujourd'hui pour cette science est un mélange, ne présentant ni la simplicité de l'un, ni la fécondité de l'autre.

On peut, suivant l'esprit de l'ancienne Géométrie, définir le sinus, le cosinus, la tangente, etc., comme étant les rapports deux à deux des côtés d'un triangle rectangle, ce qui restreint d'abord ces définitions au cas de l'angle aigu. On fait voir ensuite comment le besoin de généraliser certaines formules relatives au calcul des triangles peut conduire à attribuer des sinus, des cosinus, etc., aux angles obtus, en introduisant l'emploi des quantités négatives et justifiant cette introduction *a posteriori*. Enfin, on reconnaît, à l'occasion des problèmes analogues à ceux de l'Astronomie, que la généralisation doit encore s'étendre au

---

[1] Cette Note a été publiée pour la première fois dans le *Giornale di Matematiche*, t. XIII, 1875, et elle a été reproduite, depuis, dans d'autres recueils étrangers, et incomplètement dans un journal français. Malgré cette publicité multiple, les remarques qui font le sujet de cette Note ne semblent pas être parvenues à la connaissance des lecteurs français à qui elle était principalement destinée. C'est ce qui m'engage à la réimprimer aujourd'hui, en profitant de l'hospitalité que la *Société des Sciences physiques et naturelles* veut bien lui accorder.

J. H.

cas des angles compris entre deux et quatre quadrants, et enfin aux angles de grandeur quelconque, positive ou négative.

Cette méthode, essentiellement synthétique, a l'inconvénient de ne donner aucune lumière sur la nature des quantités négatives, qui se présentent ici comme des symboles conventionnels, conduisant au but par des compensations d'absurdités. De plus, elle ne prépare pas l'esprit aux méthodes générales de la Géométrie analytique, dont la Goniométrie n'est cependant qu'un cas particulier : l'étude des relations entre les arcs d'un cercle et les coordonnées de leurs extrémités.

Il y aurait, croyons-nous, un avantage considérable à se placer tout d'abord au point de vue de la méthode cartésienne. La Goniométrie, ainsi présentée, prendrait une forme plus simple et plus intuitive. Elle offrirait un premier exemple de la discussion des coordonnées des points d'une courbe; on pourrait la prendre comme point de départ pour l'explication de la vraie théorie des quantités négatives, et cette explication serait alors bien plus lumineuse que celle que l'on rencontre invariablement dans les Traités d'Algèbre, et dont le thème constant est le fameux problème des courriers.

On commencerait par remarquer que la direction d'un rayon mobile autour d'un point fixe est déterminée quand on connaît le point où ce rayon coupe une circonférence quelconque, décrite du point fixe comme centre, et dont on peut, pour plus de simplicité, supposer le demi-diamètre égal à l'unité de longueur. On détermine, en même temps que cette direction, l'angle que fait le rayon mobile avec un demi-diamètre fixe du cercle, dont la *direction* sera prise pour l'*origine des angles*, de même que le point où ce demi-diamètre rencontre la circonférence sera dit l'*origine des arcs*.

Un angle peut être défini comme l'ensemble de deux droites de directions différentes et invariables l'une par rapport à l'autre; ou encore — et c'est le point de vue qui tend à prévaloir dans la Géométrie moderne — un angle est le *symbole d'une opération* consistant à faire tourner un rayon mobile autour d'un point, de

manière qu'il passe d'une direction donnée à une autre direction donnée.

Nous avons expliqué ailleurs comment les rotations exprimées par ce symbole sont susceptibles de signes, et doivent être considérées comme *positives* ou comme *négatives*, suivant que le sens de la rotation est *direct* ou *rétrograde*.

Il en est de même pour les distances comptées sur des axes fixes, et qui sont *positives* ou *négatives*, suivant qu'on les considère comme des *symboles de déplacements rectilignes* effectués dans le sens *direct* ou *rétrograde*.

Deux angles différant entre eux d'un nombre entier de *tours*, parcourus soit dans le sens direct, soit dans le sens rétrograde, sont déterminés par le même point du cercle. Il suffit donc, pour déterminer toutes les directions possibles dans un plan, de savoir déterminer tous les angles compris entre zéro et quatre angles droits.

On y parvient par la connaissance des projections du point correspondant de la circonférence sur le diamètre origine des angles ou *axe horizontal*, et sur un autre diamètre, que l'on choisit, pour plus de simplicité, perpendiculaire au premier, et qu'on nomme *axe vertical*. Pour fixer chacune de ces projections, il suffit de déterminer sa position relativement au centre.

Concevons un point partant du centre, et marchant d'abord sur l'axe horizontal, par exemple, vers l'origine des arcs. Les chemins parcourus dans ce sens *s'ajouteront*, suivant la signification *arithmétique* de ce mot. Si, après avoir parcouru une certaine partie du rayon du cercle, le point se met à marcher dans le sens opposé, sa distance au centre sera *diminuée* (dans l'acception *arithmétique*) de la quantité dont le point aura reculé, et cela aussi longtemps que le point n'aura pas atteint de nouveau le centre. Lorsque le point atteint le centre et le dépasse (sur le *prolongement*, en arrière du centre, de l'axe origine des angles), la distance recommence à croître, mais en sens opposé. De là une complication des divers cas qui pourront se produire, lorsqu'on voudra combiner entre elles des positions du point non

situées toutes les deux sur la direction même de l'origine des arcs. Il faut, pour s'y reconnaître aisément, avoir un moyen de distinguer non seulement la grandeur des distances, mais en outre le sens dans lequel elles devront être portées.

On évitera cette complication en cessant de séparer les deux notions de *grandeur* et de *sens* des chemins parcourus, et les incorporant en une seule, au moyen d'une définition plus générale de l'addition et de la soustraction.

Nous appellerons *addition* d'une distance l'opération qui consiste à déplacer un point mobile d'une quantité égale à cette distance dans un sens convenu, vers la droite, par exemple. Nous appellerons de même *soustraction* d'une distance l'opération (inverse de la précédente) qui consiste à déplacer le point mobile de cette distance dans le sens contraire, soit vers la gauche. D'après cela, l'origine étant le point qui correspond à une distance égale à *zéro*, toute distance a comptée à droite de l'origine sera $0 + a$ ou simplement $+ a$ ou a; toute distance à gauche sera $0 - a$, ou simplement $- a$.

Une discussion très simple conduit aux règles de l'addition et de la soustraction des polynômes algébriques.

On appliquera de même la notion de signe aux distances comptées sur l'axe vertical.

Cela posé, tout point du cercle est déterminé par les deux distances du centre aux deux projections du point sur les deux axes, les deux distances devant être de signes donnés, et l'une au moins de grandeur donnée. En effet, la somme des carrés des deux distances devant être égale à l'unité, la grandeur de l'une déterminera celle de l'autre, tandis que les signes seront indépendants entre eux.

Ces deux distances sont dites les *coordonnées* du point du cercle, et on les distingue par les noms de *cosinus* et de *sinus*.

Le rapport des deux coordonnées est représenté, à l'aide d'une construction fort simple, par un point de la *tangente* au cercle menée à l'origine des arcs, et ce point se trouve au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal, suivant que les deux coordonnées

sont de même signe ou de signes contraires. En donnant un signe à la distance de ce point à l'origine des arcs, comme on l'a fait pour les distances comptées sur les deux axes, et ayant égard à la corrélation qui règne entre la position du point et les signes des coordonnées, on arrive à la règle des signes pour la division, et par suite pour la multiplication. De même pour le rapport inverse de la tangente *(cotangente)*, et pour les inverses du cosinus et du sinus (*sécante* et *cosécante*).

La projection d'une longueur sur un axe quelconque étant déterminée en grandeur et en direction par le produit de la ligne multipliée par le cosinus qu'elle fait avec la partie positive de l'axe, on obtient immédiatement les formules pour le cosinus et le sinus de la somme de deux angles, et, par suite, toutes les autres formules goniométriques et leurs applications à la mesure des triangles, sans qu'il y ait lieu à les soumettre à une nouvelle discussion.

II

L'enseignement de la Trigonométrie est compliqué bien inutilement par l'habitude traditionnelle d'introduire dès le début l'usage de Tables donnant, non les valeurs numériques des fonctions angulaires, mais leurs *logarithmes*. Il serait infiniment préférable de commencer par exposer la construction des Tables des valeurs naturelles de ces fonctions, et cela avec très peu de détails techniques, en se fondant uniquement sur la méthode de la bissection successive des angles. Ce serait un excellent exercice pour les élèves de construire eux-mêmes, d'après les prescriptions indiquées, une petite Table trigonométrique, à deux ou trois décimales, et dont les intervalles seraient assez rapprochés pour rendre l'interpolation facile. Cette Table, revue avec soin, devrait être la seule que l'on mît entre leurs mains; avec son aide, en y joignant le secours de la règle à calcul, ils seraient à même de résoudre promptement toutes les questions de Trigonométrie avec une approximation bien supérieure à l'exactitude de leurs constructions graphiques, et beaucoup plus promptement que par

l'emploi des logarithmes, surtout quand on complique les formules d'angles auxiliaires, en vue, suivant la phrase adoptée, de les rendre *calculables par logarithmes.*

L'usage prématuré des logarithmes trigonométriques, dans un enseignement s'adressant à des jeunes gens encore peu experts dans la pratique du calcul, ne peut que retarder leurs progrès dans cet art et leur en fermer l'intelligence. Le mal est grave surtout lorsqu'on met dans leurs mains novices les grandes Tables qui conviennent seulement aux praticiens exercés, et dont le maniement n'apprend rien de plus, au point de vue de la théorie, que celui des Tables à trois ou quatre figures. On fausse en même temps leurs idées, en leur laissant supposer qu'une approximation à un dix-millionnième près de la valeur d'un résultat correspond aux cas ordinaires de la réalité. Aussi voit-on des élèves qui ne manifestent aucun étonnement lorsqu'on leur demande de calculer le diamètre de la Terre à un centimètre près. De pareils exercices, conséquence logique de l'emploi des grandes Tables, sont-ils propres à initier les jeunes gens à la solution des questions pratiques, comme on en a la prétention? Il est permis d'en douter.

Ce vice capital de la méthode s'étend à tout ce qui se rapporte à l'enseignement du calcul numérique. Au lieu d'occuper durant tant de mortelles heures les pauvres écoliers à transcrire des nombres à *sept* figures (le nombre *sept* est, paraît-il, un nombre sacré en Mathématiques comme ailleurs), et de noyer leurs idées dans des flots de chiffres, ne serait-il pas mieux de faire plus souvent appel à leur intelligence et à leur bon sens, et de leur montrer que l'*art* du calcul, loin d'être une routine aveugle et abrutissante, fournit, au contraire, au calculateur des occasions continuelles de développer les ressources de son esprit d'invention, en lui offrant des sujets d'expériences aussi variés qu'intéressants, et donnant lieu à l'emploi de procédés plus ou moins exacts, plus ou moins expéditifs? Loin de là, dans les Traités même les plus en vogue, on ne trouve pas un seul mot pour avertir l'écolier que l'on perd absolument son temps en prenant avec *sept* figures le logarithme d'un nombre connu seulement à un centième ou un

millième près de sa valeur, et qu'il est insensé de conserver dans une addition plus de chiffres dans une partie des termes qu'il n'en existe dans le terme qui en a le moins. Il n'est pourtant pas besoin de réfléchir longtemps pour se convaincre de l'absurdité de semblables pratiques!

Là où des fautes aussi grossières passent inaperçues, il ne faut pas s'étonner de l'absence de toute indication sur la manière de calculer, au moyen des différences tabulaires, la limite supérieure de l'erreur du résultat, de quelque utilité que soit cette détermination, tant pour l'appréciation de l'exactitude de la valeur obtenue que pour la comparaison des avantages respectifs des diverses méthodes qu'on peut employer pour un même calcul.

Disons maintenant quelques mots sur l'usage des angles auxiliaires employés pour transformer à tout prix les formules proposées en expressions monômes, quelque laborieuse que doive être cette transformation. Nous montrerons sans peine que les formules ainsi obtenues ne sont pas en général les plus aisément *calculables par logarithmes*, et que, la plupart du temps, la simplicité apparente des valeurs auxquelles on parvient n'est qu'un leurre et une illusion d'optique.

Personne d'abord ne niera que la recherche d'un logarithme dans les Tables trigonométriques, si perfectionnées qu'elles soient, exige beaucoup plus de temps et d'attention que la recherche analogue dans les Tables des logarithmes des nombres : la moindre pratique du calcul suffit pour faire apprécier la différence. La substitution de la Table trigonométrique à la Table des logarithmes des nombres ne peut donc être avantageuse qu'autant qu'elle diminue notablement le nombre des *lectures*. Or, c'est précisément le contraire qui arrive dans la plupart des cas.

Considérons, par exemple, les formules pour la résolution d'un triangle sphérique dont on connaît deux côtés a, b et l'angle compris C. Ces formules, telles qu'elles se présentent immédiatement, sont les suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} \cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C, \\ \cot b \sin a - \cot B \sin C = \cos a \cos C, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases}$$

Les formules, dites *calculables par logarithmes*, qu'on en déduit sont celles-ci :

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} a \cos C, & \operatorname{tang} A = \dfrac{\sin\varphi \operatorname{tang} C}{\sin(b-\varphi)}; \\ \operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang} b \cos C, & \operatorname{tang} B = \dfrac{\sin\psi \operatorname{tang} C}{\sin(a-\psi)}; \\ \cos c = \dfrac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi} = \dfrac{\cos b \cos(a-\psi)}{\cos\psi}. \end{cases}$$

L'emploi des formules (2) exige 16 lectures, pour obtenir successivement

$$\begin{array}{rlcl} \log\cos C, & \log\operatorname{tang} a, & \varphi, & \sin\varphi, \\ & \log\operatorname{tang} b, & \psi, & \sin\psi, \\ \log\operatorname{tang} C, & \log\sin(b-\varphi), & A, & \log\sin(a-\psi),\ B, \\ \log\cos a, & \log\cos(b-\varphi), & & \log\cos\varphi, \\ [\text{ou bien } \log\cos b, & \log\cos(a-\psi), & & \log\cos\psi], \end{array}$$

plus 2 soustractions d'angles pour obtenir $b-\varphi$ et $a-\psi$. Or, tant que la routine s'obstinera à conserver la division sexagésimale du cercle, toute opération sur les angles devra être considérée comme exigeant le même travail qu'une lecture.

Les formules (1) étant mises sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} \cos c - \cos a \cos b\,(1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \cos A), \\ \cot A = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \cdot \dfrac{\cos b}{\sin c}\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b}\cos C\right), \\ \cot B = \dfrac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b} \cdot \dfrac{\cos a}{\sin c}\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}\cos C\right), \end{cases}$$

leur calcul n'exige que 15 lectures, *dont 6 dans la Table des nombres,* pour obtenir

$$\begin{array}{l} \log\cos a,\ \log\operatorname{tang} a,\ \log\cos b,\ \log\operatorname{tang} b, \\ \qquad\qquad \log\cos C,\ \log\sin C, \\ N = \dfrac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b}\cos C,\quad N' = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}\cos C,\quad N'' = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \cos C, \\ \log(1-N),\ \log(1-N'),\ \log(1+N''),\ A,\ B,\ C, \end{array}$$

et aucune soustraction d'angles.

Voici le tableau complet des calculs de l'exemple numérique, que M. Serret a développé à l'aide des angles auxiliaires dans son *Traité de Trigonométrie* (p. 180) :

$a = 113^\circ.\ 2'.56'',64$	$\cos C \ldots - \bar{1},876\ 7036$	$\dfrac{\tang b}{\tang a} \ldots - 0,518\ 0004$
$b = 82.39.28,40$	$\tang a \ldots - 0,371\ 1149$	$\dfrac{\cos b}{\sin C} \ldots\ \bar{1},288\ 1502$
$C = 138.50.13,69$	$\tang b \ldots\ 0,889\ 9153$	$1 - N \ldots\ \bar{1},887\ 6267$
$\sin C \ldots\ \bar{1},818\ 3589$	$N' \ldots\ 1,137\ 7338$	$\cot A \ldots - \bar{1},694\ 5773$
$\cos a \ldots - \bar{1},592\ 7532$	$N \ldots\ 1,357\ 9032$	$A = 116^\circ\ 20'\ 2'',21$
$\cos b \ldots\ \bar{1},106\ 5091$	$N' \ldots\ 0,395\ 5940$	$\dfrac{\tang a}{\tang b} \ldots - \bar{1},481\ 1996$
$1 + N' \ldots\ 1,168\ 2617$	$N'_{.} = 13,732\ 00$	$\dfrac{\cos a}{\sin C} \ldots - \bar{1},774\ 3943$
		$1 - N' \ldots - 0,172\ 0236$
$\cos c \ldots - \bar{1},867\ 5240$	$N_{.} = 0,227\ 9834$	$\cot B \ldots - \bar{1},427\ 6175$
$c = 137^\circ.29'.\ 4'',63$	$N' = 2,486\ 0165$	$B = 104^\circ\ 59'\ 8'',38$

Nous avons inscrit dans ce tableau *tous* les calculs qu'un opérateur un peu exercé ne doit pas faire *de tête* ou à l'aide de la règle à calcul. Le nombre des lectures serait encore diminué de 3, si l'on faisait usage des Tables de logarithmes d'addition et de soustraction.

On peut maintenant juger de la différence de longueur entre les calculs actuels et les opérations faites d'après les méthodes artificielles, où l'on emploie les angles auxiliaires, ou même celles qui, comme les analogies de Neper ou les formules de Delambre et Gauss, exigent un assez grand nombre d'additions et de soustractions d'angles.

Nous concluons de là que l'usage direct des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique est de tous les procédés de calcul le plus expéditif, et c'est une pure illusion de croire que l'on gagne quoi que ce soit à transformer ces formules en expressions monômes, soit à l'aide d'angles auxiliaires, soit même à l'aide de formules qui se prêtent d'elles-mêmes à cette transfor-

mation. Il convient donc de rayer des livres d'enseignement cette locution, aussi mal choisie que la méthode qu'elle sert à désigner : « Rendre une formule calculable par logarithmes ».

Il se rencontre, nous en convenons, des cas spéciaux où l'emploi des angles auxiliaires est avantageux; mais ces cas ne se présentent jamais dans les théories qui constituent les Éléments de Trigonométrie. Tout au plus conviendrait-il de donner, *comme simples exercices*, quelques exemples de ces transformations, et de saisir par là une occasion pour en faire ressortir, non les avantages, mais les inconvénients.

III

Les résultats des calculs trigonométriques peuvent être affectés de deux causes d'erreur tout à fait distinctes, dépendant l'une de l'inexactitude nécessaire des Tables logarithmiques, l'autre des erreurs auxquelles sont sujettes les données de la question. On peut toujours, par le choix de Tables assez étendues, faire en sorte que l'erreur due à la première cause disparaisse devant celle qui provient de la seconde.

Supposons un élément x d'un triangle, déterminé au moyen des éléments connus $p, q, \ldots$ ou de leurs fonctions angulaires, par la formule

$$f(x) = \varphi(p, q, \ldots),$$

$f(x)$ désignant une fonction algébrique ou angulaire. Les logarithmes pris immédiatement dans la Table sont sujets à une certaine erreur maximum $d\omega$, qui peut se trouver doublée pour les logarithmes calculés par interpolation, et portée ainsi à une unité du dernier ordre décimal. Si l'on suppose les éléments dont dépendent $p, q, \ldots$ exactement connus, et la fonction $\varphi(p, q, \ldots)$ calculée au moyen des logarithmes, l'erreur tabulaire $\pm d\omega$, affectant le logarithme de la quantité p, équivaudra à une erreur $dp = \pm \frac{p\,d\omega}{M}$ affectant la fonction p elle-même (M étant le module des logarithmes décimaux), et par suite elle produira dans $\varphi(p)$

une erreur égale à $\pm \frac{d\omega}{M} . p \frac{\partial \varphi}{\partial p}$; et de même pour les autres fonctions $q, \ldots$. Donc l'erreur totale commise sur $\log \varphi(p, q, \ldots)$ sera

$$\frac{d\omega}{\varphi(p,q,\ldots)}\left(\pm p \frac{\partial \varphi}{\partial p} \pm q \frac{\partial \varphi}{\partial q} \pm \ldots\right),$$

et, si on désigne par K la somme des valeurs absolues des termes de la parenthèse, le maximum de cette erreur sera

$$\frac{K d\omega}{\varphi(p,q,\ldots)}.$$

Cette erreur étant égale à celle de $\log f(x)$, c'est-à-dire à $\frac{M f'(x) dx}{f(x)}$, on aura donc, à cause de $f(x) = \varphi(p, q, \ldots)$,

$$dx = \frac{K d\omega}{M f'(x)}.$$

Si l'on vient à changer la *forme* de la relation constante qui existe entre les quantités $x, p, q, \ldots$, les expressions de K et de $f'(x)$ changeront, et par suite aussi la valeur de dx. Dans ce cas donc il y a lieu d'examiner quelle est la forme de cette relation qui, pour une étendue donnée des Tables, donnera pour dx la valeur minimum correspondante à tel ou tel système de valeurs de $p, q, \ldots$.

Considérons, par exemple, les deux formules, équivalentes entre elles,

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b)}.$$

La première, mise sous la forme

$$\log \cos c = \log \cos a - \log \cos b,$$

donne, pour maximum de l'erreur que l'on peut commettre sur c,

$$dc = \frac{2}{M} \cot c . d\omega.$$

L'autre formule donne de même

$$dc = \frac{1}{M} \sin c . d\omega,$$

et l'on voit qu'elle est plus avantageuse que la première, quand c doit être un petit angle, le rapport des deux erreurs étant $\frac{2 \cos c}{\sin^2 c}$, ou à peu près $\frac{2}{c^2}$. Ainsi, si l'on suppose dans la première formule $a = 50°$, $b = 49°$, la différence tabulaire du logarithme de $\cos c$ à 7 figures étant 43 pour 10', une erreur d'une unité sur la dernière décimale entraînera une erreur de $\frac{10'}{43}$ ou d'environ 0',25 sur la valeur de l'angle c; tandis que, si l'on prend la seconde formule, une erreur d'une demi-unité sur la valeur de $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} c$ ne donnera sur l'angle qu'une erreur égale à

$$2 . \frac{\frac{1}{2} . 10'}{2111} < 0',01.$$

Mais il en est tout autrement quand on considère les erreurs provenant des données. Dans ce cas, l'inconnue x étant liée aux données $a, b, \ldots$ par une relation

$$f(x) = F(a, b, \ldots),$$

la valeur de l'erreur, prise sans tenir compte de l'inexactitude des Tables,

$$dx = \frac{1}{f'(x)} \left(\frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db + \ldots \right),$$

ne changera pas de grandeur de quelque manière que l'on transforme la relation. Dans ce cas donc, on ne peut rien gagner, au point de vue de l'exactitude, à choisir une formule plutôt qu'une autre, et l'on ne devra songer qu'à prendre la plus simple.

En prenant le même exemple que tout à l'heure, supposons chacun des angles a, b sujet à une erreur de $1''$.

1re FORMULE.	Erreur possible.	2e FORMULE.	Erreur possible.
$\cos a \ldots \bar{1},808\ 0675 \ldots$	25	$\text{tang}\,\frac{1}{3}(a+b) \ldots 0,068\ 5011 \ldots$	43
$\cos b \ldots \bar{1},816\ 9429 \ldots$	24	$\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b) \ldots \bar{3},940\ 8584 \ldots$	2406
$\cos c \ldots \bar{1},991\ 1426 \ldots$	49	$\text{somme} \ldots\ldots\ldots \bar{2},009\ 3595 \ldots$	2449
$c = 11^{\circ}\,32'\,38'',75 \ldots$	$11'',4$	$\text{tang}\,\frac{1}{2}c \ldots\ldots\ldots \bar{1},004\ 0798 \ldots$	1225
		$\frac{1}{2}c = 5^{\circ}.46'.19'',365 \ldots\ldots$	$5'',1$
		$c = 11^{\circ}.32'.38'',73 \ldots\ldots$	$10'',2$

On voit que les deux formules donnent la même approximation, et que la première a sur la seconde l'avantage d'une plus grande simplicité.

LE FRAGMENT D'EUDÈME

SUR LA

QUADRATURE DES LUNULES

PAR M. PAUL TANNERY

I

Dans le tome II (2e série) des *Mémoires de la Société,* j'ai publié [1] une brève analyse du long passage où Simplicius, dans son Commentaire sur le premier livre de la Physique d'Aristote, parle des fausses quadratures de cercle et insère un important extrait de l'*Histoire géométrique* d'Eudème, relatif aux quadratures de lunules obtenues par Hippocrate de Chio.

Je faisais cette analyse sur le texte publié par Bretschneider dans *Die Geometrie und die Geometer vor Eukleides* (Leipzig, 1870), d'après l'édition aldine du Commentaire de Simplicius. Tout en mettant à profit le travail du mathématicien allemand, je faisais quelques réserves sur les conclusions émises par lui. Il n'a pas, en effet, su discerner ce qui était emprunté par Simplicius au disciple d'Aristote de ce qui appartenait au commentateur du VIe siècle après J.-C. Il a cru, dans certains endroits, reconnaître le texte même d'Hippocrate, alors que celui d'Eudème n'était aucunement assuré et réclamait avant tout une critique approfondie. Les résultats auxquels Bretschneider est arrivé en étudiant ce précieux document perdent par là, pour ainsi dire, toute leur valeur, et, à cet égard, son travail était complètement à refaire. Cependant

---

[1] *Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules*, p. 179-184.

aucune critique ne s'était encore élevée, et Hankel, dans *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig, 1874), avait adopté trop légèrement des conclusions que, mieux que tout autre peut-être, il eût été capable de corriger heureusement.

D'ailleurs, pour le but spécial que je me proposais dans ma note sur ce sujet, — établir, contre l'opinion de Bretschneider, qu'Hippocrate avait réellement construit, avec la règle et le compas, ses lunules quarrables, qu'il savait donc résoudre géométriquement un problème du second degré, — c'eût été une tentative inutile que d'entreprendre la restitution du texte même d'Eudème, allégé des maladroites interpolations de Simplicius. Néanmoins le haut intérêt que présente le plus ancien fragment, vraiment sérieux et suffisamment authentique, de la mathématique grecque, m'excitait à approfondir davantage mes recherches et à compléter mon premier et trop faible essai. Mais, après avoir assis mon opinion sur les lignes générales de la restitution à faire, j'abandonnai cette étude, l'imperfection du texte grec imprimé ne me laissant aucun espoir d'arriver, dans le détail, à un résultat satisfaisant.

Quelques années avant que parût l'ouvrage de Bretschneider, Léonard Spengel ([1]) publiait un recueil des fragments d'Eudème, dans lequel le passage de Simplicius qui nous occupe, figure sous le n° XCII. Si les fautes évidentes de l'édition aldine y sont corrigées comme chez Bretschneider, qui ne semble pas, au reste, avoir eu connaissance de ce recueil, et si l'extrait de Simplicius est utilement poursuivi plus loin, la distinction du texte authentique d'Eudème, objet, dans les autres fragments, des recherches du philologue, n'est ici, pour ainsi dire, pas même essayée. La première phrase seule de ce texte est marquée comme appartenant sans conteste au disciple d'Aristote.

Dans le troisième volume des *Fragmenta philosophorum græcorum* de l'édition Didot (1881), Mullach a suivi, pour les

---

([1]) *Eudemi Rhodii peripatetici fragmenta quæ supersunt, editio secunda.* (Berlin, 1870.) — La première édition est de 1865.

fragments d'Eudème, le travail de Spengel et la question n'a pas avancé d'un pas.

Cependant un mathématicien anglais, George Johnston Allman, poursuivant une série d'études sur la géométrie grecque publiées dans l'*Hermathena*, arrivait à cette question de la quadrature des lunules, et reconnaissait l'inconsistance des conclusions de Bretschneider et d'Hankel. Il essaya de traduire le texte d'Eudème (1) seul, et, pour le discerner nettement de celui de Simplicius, il fit usage d'un critérium sur lequel l'attention doit être appelée.

Pour désigner la droite AB, le point K, tous les Grecs depuis Euclide disent ἡ AB, τὸ K. Dans le fragment de Simplicius, on trouve accidentellement les désignations ἡ ἐφ' ᾗ AB, τὸ ἐφ' ᾧ K (la *droite* sur laquelle AB, le *point* sur lequel K). Bretschneider crut reconnaître là l'antique façon de parler d'Hippocrate et la distingua de celle d'Eudème.

Mais ces mêmes formes se retrouvent couramment cent ans après Hippocrate, chez Aristote. Il est donc beaucoup plus logique d'essayer de s'en servir pour distinguer le texte d'Eudème de celui de Simplicius.

Sans doute ce critérium n'est pas absolu pour tous les détails du texte; car chez Aristote on retrouve déjà quelquefois la forme euclidienne plus abrégée, Eudème a donc aussi pu l'employer parfois. Il n'en est pas moins certain qu'en thèse générale, l'application du critérium donne un résultat qui justifie son emploi.

Dans les démonstrations principales, elle permet de retrouver une marche assurée, une suite d'idées nettes et précises, un style et une façon de procéder qui font certainement honneur au premier historien des mathématiques. On trouve ainsi des indications suffisantes pour achever la tâche, et l'on peut mieux mesurer l'extrême infériorité du pauvre commentateur qui nous dit, au reste, avant de commencer sa citation d'Eudème :

« Je vais exposer textuellement ce que dit Eudème, en y ajoutant

(1) *Greek Geometry from Thales to Euclid*, by Allman, part. II (Dublin, Ponsonby, 1881), p. 196-202.

» quelques petits éclaircissements et renvois aux éléments d'Euclide,
» cela en raison de la façon dont commente Eudème qui, suivant
» l'usage des anciens, expose en abrégé les démonstrations. »

M. Allman arriva, en somme, à une restitution du fragment d'Eudème passablement satisfaisante. Si son travail présentait quelques imperfections inévitables dans un premier essai, s'il était insuffisant pour fixer le texte grec, si, enfin, certaines de ses conclusions étaient, à mon sens du moins, peu soutenables, le plus fort de la besogne n'en était pas moins fait par lui.

J'entrai en correspondance particulière avec M. Allman pour lui exposer quelques objections tirées des résultats de mes études antérieures, et j'ai été finalement assez heureux pour l'amener à partager mes opinions. Mais dans les intervalles de cette correspondance, j'étais appelé à m'occuper plus activement de cette même question.

Un savant philologue allemand, Hermann Diels, poursuivant une tâche laissée inachevée par la mort d'Adolf Torstrik, avait entrepris une édition critique du Commentaire de Simplicius, et la collation des manuscrits lui permettait, en particulier pour le fragment qui nous occupe, des corrections d'une haute importance, et une restitution du texte aussi parfaite que possible. S'attachant d'ailleurs, en thèse générale, à bien discerner les citations faites par Simplicius, il crut pour le passage mathématique d'Eudème devoir consulter M. Usener, de l'Université de Bonn, qui avait, de son côté, autrefois étudié ce passage.

En employant le même critérium que M. Allman, mais en l'appliquant moins rigoureusement, M. Usener arriva de son côté, d'accord avec H. Diels, à une restitution sur laquelle il me consulta à mon tour, en me soumettant les épreuves de l'édition en préparation.

Si les savants allemands maintenaient comme d'Eudème, à tort suivant moi, des phrases que M. Allman laissait à Simplicius, il se trouvait que, par contre, ils retranchaient du texte de l'*Histoire géométrique* à peu près tout ce que je demandais alors au mathématicien anglais de ne pas y conserver. J'étais donc, par ce double

désaccord même, confirmé dans mes vues propres, et je pus effectuer avec plus d'assurance que je ne l'aurais fait autrement, la révision qui m'était demandée.

Les changements que son accueil par M. Diels aurait entraînés dans le texte même qu'il avait déjà arrêté, eussent été trop considérables pour un volume dont l'impression s'achevait et qui vient de paraître (1). Mais le savant éditeur a inséré dans un second supplément, à la préface (2), mes notes et observations qui s'étendent au reste à tout le passage de Simplicius. Il a bien voulu les compléter par quelques citations de mes essais, *Sur Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules, — De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide,* — publiés dans les *Mémoires de la Société,* tomes II et IV (2e série), et s'est borné à signaler quelques réserves d'Usener et de lui-même, réserves sur lesquelles je reviendrai plus loin.

II

L'historique de la question, tel que je viens de l'exposer, n'était sans doute pas inutile pour montrer comment il m'est aujourd'hui permis de considérer comme à très peu près complètement élucidé un problème dont je désespérais il y a quatre ans. On comprendra également comment je me propose de publier maintenant : le texte grec du fragment d'Eudème seul, débarrassé de tout ce qui appartient à Simplicius, — la traduction littérale, — quelques observations pour en faciliter l'intelligence, — enfin le développement de mes opinions sur les points où mon avis n'est pas encore partagé par ceux qui m'ont frayé la route. Mais je crois, au préalable, devoir dire quelques mots d'une question relative à l'origine du fragment dont il s'agit.

Est-il assuré, comme je le disais il y a quatre ans, que Simplicius

(1) *Simplicii in Aristotelis physicorum libros quattuor priores* edidit Hermannus Diels. (Berlin, Reimer, 1882.)

(2) *Paulus Tannery Havrensis in Simplicii de Antiphonte et Hippocrate excerpta,* p. 54-60. — P. xxvi-xxxi.

avait à sa disposition la première Histoire des Mathématiques, écrite par Eudème?

On pourrait le penser, quand on voit Simplicius commencer ainsi sa citation : « (Eudème) s'exprime donc ainsi dans le second livre de l'*Histoire Géométrique.* » Cependant un scrupule m'est venu, et un examen plus attentif de la question m'a convaincu du contraire.

J'ai développé mes raisons dans une note insérée dans les *Annales de la Faculté des lettres de Bordeaux* (1); je me contenterai de reproduire ici les conclusions de cet essai :

1° Les travaux historiques d'Eudème furent négligés de bonne heure pour les compilations et extraits qui en furent faits;

2° Ils ne sont plus à la disposition de Proclus, qui ne les connaît que par l'intermédiaire de Porphyre ou par celui de Geminus;

3° Pour la géométrie, Simplicius et Eutocius ont dû user d'un recueil appelé Κηρία et compilé vers la fin du IIIe siècle par un Sporos de Nicée;

4° Toute citation d'Eudème comme historien, postérieure au IVe siècle, est de seconde main.

J'ajouterai seulement que MM. Allman, Usener et Diels ont admis immédiatement ce que je leur soumettais alors à titre de simple conjecture. M. Usener a même été un peu plus loin que ma pensée, et dans une des réserves qu'il formule contre mes observations (p. XXVIII, n° 1), il remarque que l'on peut mettre en question ce que Simplicius doit à Sporos, ce qu'il doit à Eudème.

Il est clair que, du moment où la citation d'Eudème est reconnue de seconde main, on peut se demander si le premier compilateur l'a reproduite fidèlement, s'il ne l'a pas tronquée ici, interpolée là.

En ce qui concerne la fidélité générale de la copie, nous avons, ce semble, une garantie suffisante dans le maintien des formes archaïques dont j'ai parlé et qui n'apparaissent pas dans les autres

(1) N° 1 de 1882. *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes, relatifs à l'histoire des mathématiques*, p. 70-76.

extraits d'Eudème faits par Sporos et conservés par Eutocius (notamment dans la solution par Archytas du problème de Délos). Des mutilations sont peu probables *à priori* surtout dans un auteur très concis, et si nous sommes de fait amenés à en supposer une ou deux, elles seront de l'ordre de celles qu'amènent les négligences des copistes. Quant à des interpolations, la question peut avoir son importance pour l'éditeur de Simplicius; elle n'en a point, en réalité, pour la restitution du texte d'Eudème.

Si, pour cette restitution, nous possédons des critères suffisants, peu nous importe que telle phrase ou tel membre de phrase ait été ajouté par Sporos ou par Simplicius, dès que nous y reconnaissons une addition au texte du disciple d'Aristote. Cependant on peut dire en thèse générale que les interpolations sont de deux sortes; les unes sont réellement explicatives, mais contraires aux habitudes d'Eudème; celles-ci peuvent être de Sporos. Les autres sont des essais, tous maladroits, de démonstrations portant sur des points qu'Eudème considérait comme évidents. Nous n'avons aucune raison de supposer que Sporos eût été aussi incapable de mener à bonne fin de pareils essais de démonstration; ils accusent donc l'ignorance de Simplicius.

Avant la publication du texte d'Eudème et de sa traduction, j'ai enfin à faire quelques remarques sur les règles que j'ai adoptées pour cette publication. M'adressant, non pas à des philologues, mais aux mathématiciens qui s'intéressent à l'histoire de leur science, je ne me suis nullement proposé de donner un texte critique; il faudra, à cet égard, toujours recourir à l'excellente édition de Diels. J'ai donc suivi les leçons de ce dernier ou parfois celles des manuscrits, lorsqu'elles m'ont semblé préférables. Les mots entre < > indiquent les additions proposées au texte des manuscrits, soit par Diels, soit par Usener, soit par moi-même. Ceux entre [ ] les mots pour lesquels il me semblait subsister un doute entre l'attribution à Eudème et l'attribution à Simplicius.

Les mêmes notations sont suivies dans la traduction. J'y ai d'autre part ajouté, *en italique,* ce qui me semblait nécessaire à la parfaite intelligence du sens. Je me suis efforcé d'être aussi

littéral que possible, tout en restant compréhensible. Toutefois, je me suis, à cet égard, moins attaché à la lettre pour les locutions devenues classiques à partir d'Euclide, et me suis surtout efforcé de mettre en relief ce que le langage géométrique d'Eudème a de relativement archaïque.

Pour traduire les formes ἡ ἐφ' ᾗ AB, τὸ ἐφ' ᾧ K, j'ai dit : la droite AB, le point K ; pour ἡ AB, τὸ K, je dis simplement AB, K.

Enfin j'ai, pour le texte et la traduction, numéroté les phrases, afin d'y renvoyer plus facilement dans les observations subséquentes.

III

Texte du fragment d'Eudème.

1). Καὶ οἱ τῶν μηνίσκων δὲ τετραγωνισμοὶ δόξαντες εἶναι τῶν οὐκ ἐπιπολαίων διαγραμμάτων διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν κύκλον ὑφ' Ἱπποκράτους ἐγράφησάν τε πρώτου καὶ κατὰ τρόπον ἔδοξαν ἀποδοθῆναι· διόπερ ἐπὶ πλέον ἁψώμεθά τε καὶ διέλθωμεν. — 2). ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον ἔθετο τῶν πρὸς αὐτοὺς χρησίμων, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει. — 3). (τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις).

4). Δειχθέντος δὲ αὐτῷ τούτου πρῶτον μὲν ἔγραφε μηνίσκου τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν ἔχοντος ἡμικυκλίου τίνα τρόπον γένοιτο ἂν τετραγωνισμός. — 5). ἀπεδίδου δὲ τοῦτο περὶ τρίγωνον ὀρθογώνιόν τε καὶ ἰσοσκελὲς ἡμικύκλιον περιγράψας καὶ περὶ τὴν βάσιν τμῆμα κύκλου τοῖς ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἀφαιρουμένοις ὅμοιον. — 6). ὄντος δὲ τοῦ περὶ τὴν βάσιν τμήματος ἴσου τοῖς περὶ τὰς ἑτέρας ἀμφοτέροις, καὶ κοινοῦ προστεθέντος τοῦ μέρους τοῦ τριγώνου τοῦ ὑπὲρ τὸ τμῆμα τὸ περὶ τὴν βάσιν, ἴσος ἔσται ὁ μηνίσκος τῷ τριγώνῳ. — 7). ἴσος οὖν ὁ μηνίσκος τῷ τριγώνῳ δειχθεὶς τετραγωνίζοιτο ἄν. — 8). οὕτως μὲν οὖν ἡμικυκλίου τὴν ἔξω τοῦ μηνίσκου περιφέρειαν ὑποθέμενος ἐτετραγώνισεν τὸν μηνίσκον εὐκόλως..

9). Εἶτα ἐφεξῆς μείζονα ἡμικυκλίου ὑποτίθεται συστησάμενος τραπέζιον τὰς μὲν τρεῖς ἔχον πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις, τὴν δὲ μίαν τὴν μείζω τῶν παραλλήλων τριπλασίαν ἐκείνων ἑκάστης δυνάμει, καὶ τό τε τραπέζιον περιλαβὼν κύκλῳ καὶ περὶ τὴν μεγίστην αὐτοῦ πλευρὰν ὅμοιον τμῆμα περιγράψας τοῖς ὑπὸ τῶν ἴσων τριῶν ἀποτεμνομένοις ἀπὸ τοῦ κύκλου.

— 10). ὅτι δὲ μεῖζόν ἐστιν ἡμικυκλίου τὸ λεχθὲν τμῆμα, δῆλον ἀχθείσης ἐν τῷ τραπεζίῳ διαμέτρου. — 11). ἀνάγκη γὰρ ταύτην ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαν τοῦ τραπεζίου τῆς ὑπολοίπου μιᾶς μείζονα ἢ διπλασίαν εἶναι δυνάμει. — 12). καὶ τὴν μεγίστην ἄρα τῶν τοῦ τραπεζίου πλευρῶν ἀναγκαῖον ἔλαττον δύνασθαι τῆς τε διαμέτρου καὶ τῶν ἑτέρων πλευρῶν ἐκείνης, ὑφ' ἣν ὑποτείνει μετὰ τῆς διαμέτρου ἡ λεχθεῖσα. — 13). ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπὶ τῆς μείζονος τοῦ τραπεζίου πλευρᾶς βεβηκυῖα γωνία. — 14). μεῖζον ἄρα ἡμικυκλίου ἐστὶ τὸ τμῆμα ἐν ᾧ ἐστιν. ὅπερ ἐστὶν ἡ ἔξω περιφέρεια τοῦ μηνίσκου.

15). Εἰ δὲ ἐλάττων ἡμικυκλίου εἴη, προγράψας τοιόνδε τι τοῦτο κατεσκεύασεν. — 16). ἔστω κύκλος οὗ διαμέτρος ἐφ' ᾗ ΑΒ, κέντρον δὲ αὐτοῦ ἐφ' ᾧ Κ· καὶ ἡ μὲν ἐφ' ᾗ ΓΔ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω τὴν ἐφ' ᾗ ΒΚ. — 17). ἡ δὲ ἐφ' ᾗ ΕΖ κείσθω ταύτης < τε > μεταξὺ καὶ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ Β νεύουσα τῶν ἐκ τοῦ κέντρου ἡμιολία οὖσα δυνάμει. — 18). ἡ δὲ ἐφ' ᾗ ΕΗ ἤχθω παρὰ τὴν ἐφ' ᾗ ΑΒ. καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὰ Ε Ζ. συμπιπτέτω δὲ ἐκβαλλομένη ἡ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευχθεῖσα τῇ ἐφ' ᾗ ΕΗ κατὰ τὸ Η καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὰ ΖΗ ἐπεζεύχθωσαν. — 19). φανερὸν δὴ ὅτι ἡ μὲν ἐφ' ᾗ ΕΖ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Β πεσεῖται, ἡ δὲ ἐφ' ᾗ ΒΗ ἴση ἔσται τῇ ἐφ' ᾗ ΕΚ.

20). Τούτων οὖν οὕτως ἐχόντων τὸ τραπέζιον ἐφ' οὗ ΕΚΒΗ περιλήψεται κύκλος. — 21). Ὅπερ καὶ τὸ τρίγωνον περιέξει τὸ ἐφ' οὗ ΕΖΗ, γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα. ***

22). Τούτων οὕτως ἐχόντων ὁ γενόμενος μηνίσκος ἴσος ἔσται τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν τριῶν τριγώνων. — 23). τὰ γὰρ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ἐφ' αἷς ΕΖ ΖΗ ἀφαιρούμενα ἐντὸς τοῦ μηνίσκου ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήμασιν. ἑκάτερον γὰρ τῶν ἐντὸς ἡμιόλιόν ἐστιν ἑκάστου τῶν ἐκτός. — 24). εἰ οὖν ὁ μὲν μηνίσκος τὰ τρία τμήματά ἐστι καὶ τοῦ εὐθυγράμμου τὸ παρὰ τὰ δύο τμήματα, τὸ δὲ εὐθύγραμμον μετὰ τῶν δύο τμημάτων ἐστὶ χωρὶς τῶν τριῶν, ἔστι δὲ τὰ δύο τμήματα τοῖς τρισὶν ἴσα, ἴσος ἂν εἴη ὁ μηνίσκος τῷ εὐθυγράμμῳ.

25). Ὅτι δὲ οὗτος ὁ μηνίσκος ἐλάττονα ἡμικυκλίου τὴν ἐκτὸς ἔχει περιφέρειαν, δείκνυσι διὰ τοῦ τὴν γωνίαν ἐν τῷ ἐκτὸς οὖσαν τμήματι ἀμβλεῖαν εἶναι. — 26). ὅτι δὲ ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ γωνία, δείκνυσιν οὕτως· ἐπεὶ ἡ μὲν ἐφ' ᾗ ΕΖ ἡμιολία ἐστὶ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμει, ἡ δὲ ἐφ' ᾗ ΚΒ μείζων τῆς ἐφ' ᾗ ΒΖ < ἢ διπλασία δυνάμει >, [διότι καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Ζ μείζων < ὀρθῆς >, ὡς δείξω,] — 27) φανερὸν ὅτι κἂν ἡ ἐφ' ᾗ ΒΚ μείζων ᾖ τῆς ἐφ' ᾗ ΒΖ ἢ διπλασία μήκει, καὶ ἡ ἐφ' ᾗ ΚΕ (ὥς [τε] τῆς ἐφ' ᾗ ΚΖ ἄρα), μείζων ἢ διπλασία μήκει. — 28). καὶ δυνάμει· ὥστε ἡ ἐφ' ᾗ ΕΚ

μείζων ἐστὶ τῆς ἐφ' ᾗ KZ ἡ διπλασία δυνάμει. — 29). ἡ δὲ ἐφ' ᾗ EZ ἡμιολία δυνάμει τῆς ἐφ' ᾗ EK· ἡ ἄρα ἐφ' ᾗ EZ μείζων ἐστὶ δυνάμει τῶν ἐφ' αἷς EK KZ. — 30). ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ K γωνία, ἔλαττον ἄρα ἡμικυκλίου τὸ τμῆμα ἐν ᾧ ἐστιν. — 31). οὕτως μὲν οὖν ὁ Ἱπποκράτης [πάντα] μηνίσκον ἐτετραγώνισεν [εἴπερ καὶ] τὸν ἡμικυκλίου καὶ τὸν μείζονα ἡμικυκλίου καὶ τὸν ἐλάττονα ἔχοντα τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν.

32). Ἀλλὰ μηνίσκον ἅμα καὶ κύκλον ἐτετραγώνισεν οὕτως. — 33). ἔστωσαν περὶ κέντρον ἐφ' οὗ K δύο κύκλοι, ἡ δὲ τοῦ ἐκτὸς διάμετρος ἑξαπλασία δυνάμει τῆς τοῦ ἐντός καὶ ἑξαγώνου ἐγγραφέντος εἰς τὸν ἐντὸς κύκλον τοῦ ἐφ' οὗ ΑΒΓΔΕΖ αἵ τε ἐφ' ὧν KA KB KΓ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν ἕως τῆς τοῦ ἐκτὸς κύκλου περιφερείας καὶ < αἱ > ἐφ' ὧν HΘ ΘI ἐπεζεύχθωσαν. καὶ περὶ τὴν ἐφ' ᾗ HI τμῆμα ὅμοιον τῷ ἀφαιρουμένῳ ὑπὸ τῆς ἐφ' ᾗ HΘ περιγεγράφθω. — 34). ἐπεὶ οὖν τὴν μὲν ἐφ' ᾗ HI τριπλασίαν ἀνάγκη εἶναι δυνάμει τῆς ἐφ' ᾗ ΘH τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς, (ἡ γὰρ ὑπὸ δύο ἑξαγώνου πλευρὰς ὑποτείνουσα μετὰ ἄλλης μιᾶς ὀρθὴν περιέχουσα γωνίαν τὴν ἐν ἡμικυκλίῳ ἴσον δύναται τῇ διαμέτρῳ, ἡ δὲ διάμετρος τετραπλάσιον δύναται τῆς τοῦ ἑξαγώνου ἴσης οὔσης τῇ ἐκ τοῦ κέντρου διὰ τὸ τὰ μήκει διπλάσια εἶναι δυνάμει τετραπλάσια), ἡ δὲ ΘH ἑξαπλασία < δυνάμει > τῆς ἐφ' ᾗ AB, δῆλον ὅτι τὸ τμῆμα τὸ περὶ τὴν ἐφ' ᾗ HI περιγραφὲν ἴσο εἶναι συμβαίνει τοῖς τε ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς κύκλου ὑπὸ τῶν ἐφ' αἷς HΘ Θ ἀφαιρουμένοις καὶ τοῖς ἀπὸ τοῦ ἐντὸς ὑπὸ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν ἁπασῶν — 35). ὥστε ὁ μὲν μηνίσκος ἐφ' οὗ HΘI τοῦ τριγώνου ἐλάττων ἂν εἴη ἐφ οὗ τὰ αὐτὰ γράμματα τοῖς ὑπὸ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν ἀφαιρουμένοι τμήμασιν ἀπὸ τοῦ ἐντὸς κύκλου. — 36). ὁ ἄρα μηνίσκος καὶ τὰ ὑπὸ το ἑξαγώνου ἀφαιρούμενα τμήματα ἴσα ἐστὶ τῷ τριγώνῳ. καὶ κοινοῦ προστι θέντος τοῦ ἑξαγώνου τὸ τρίγωνον τοῦτο καὶ τὸ ἑξάγωνον ἴσα ἐστὶ τῷ μηνίσκῳ τῷ λεχθέντι καὶ τῷ κύκλῳ τῷ ἐντός. — 37). εἰ οὖν τὰ εἰρημέ εὐθύγραμμα δυνατὸν τετραγωνισθῆναι, καὶ τὸν κύκλον ἄρα μετὰ τ μηνίσκου.

IV

Traduction du fragment d'Eudème.

1). Quant aux quadratures des lunules, figures qui, en raison leur parenté avec le cercle, semblent en dehors des ordinair Hippocrate fut aussi le premier à les écrire, et il semble les av exposées d'une façon satisfaisante; aussi nous allons nous y attach

de plus près et les parcourir. — 2). Il les a commencées en établissant, comme première des propositions utiles pour ces quadratures, que les segments semblables de cercle sont entre eux dans le même rapport que leurs bases en puissance [1]. — 3). (Il le démontre en s'appuyant sur ce qu'il avait démontré : que les cercles sont dans le même rapport que leurs diamètres en puissance.)

4). Cela démontré, il écrivit en premier lieu comment peut se faire la quadrature d'une lunule dont l'arc extérieur est d'un demi-cercle. — 5). Il l'exposa en circonscrivant un demi-cercle à un triangle rectangle et isoscèle, et en décrivant sur la base un segment de cercle semblable à ceux retranchés par les côtés. — 6). Ce segment sur la base étant égal à la somme des deux sur les côtés, si l'on ajoute de part et d'autre la partie du triangle qui est au-dessus du segment sur la base, la lunule sera égale au triangle. — 7). Dès que la lunule est démontrée égale au triangle, elle peut être carrée. — 8). Ainsi, en supposant d'un demi-cercle l'arc extérieur de la lunule, il carra facilement cette lunule.

9). Il continue ensuite en supposant l'arc extérieur plus grand qu'un demi-cercle. Ayant construit un trapèze qui ait trois côtés égaux entre eux, et le plus grand des côtés parallèles triple en puissance de chacun des autres, il circonscrivit un cercle à ce trapèze, et décrivit sur son plus grand côté un segment semblable à ceux retranchés du cercle par les trois côtés égaux. — 10). Que l'autre segment dont nous avons parlé [2] soit plus grand que le demi-cercle, cela est clair, si l'on mène un diamètre [3] dans le trapèze. — 11). Car ce diamètre, sous-tendant deux côtés *égaux* du trapèze *(et opposé à un angle évidemment obtus)* est nécessairement en puissance plus que double du troisième *des côtés égaux.* — 12). Par suite le plus grand des côtés du trapèze *(triple en puissance)* est nécessairement inférieur en puissance à la somme du

---

(1) « Une droite en puissance » signifie : le carré de cette droite. Une somme « en puissance » signifiera la somme des carrés, etc.

(2) C'est-à-dire celui qui correspond à l'arc extérieur de la lunule.

(3) C'est-à-dire une diagonale.

diamètre et de ce troisième côté, avec lesquels il forme un triangle. — 13). L'angle opposé *dans ce triangle* à ce plus grand côté du trapèze est donc aigu. — 14). Par conséquent le segment dans lequel est inscrit cet angle, c'est-à-dire l'arc extérieur de la lunule, est plus grand qu'un demi-cercle.

15). Si cet arc est plus petit qu'un demi-cercle, il obtient la quadrature en faisant d'abord une construction comme celle-ci. — 16). Soit un cercle qui ait pour diamètre la droite AB, pour centre le point K. Menons la droite CD perpendiculaire sur le milieu de la droite BK. — 17). Inscrivons entre cette perpendiculaire et la circonférence la droite EZ, dirigée vers B, et égale en puissance à une fois et demie le rayon. — 18). Menons la droite EH parallèle à la droite AB. Joignons K à E et à Z. Soit en H la rencontre de la droite EH et du prolongement de celle menée *de K* à Z. Joignons enfin B à Z et à H. — 19). Il est clair que l'une de ces deux dernières droites est le prolongement de la droite EZ qui tombe en B, que l'autre, la droite BH, sera égale à la droite EK.

20). Ceci posé, le trapèze marqué EKBH est inscriptible dans un cercle. — 21). Décrivons aussi le segment qui circonscrit le triangle EZH***. <*Chacun des deux segments sur les droites EZ, ZH, sera semblable à chacun des trois segments sur les droites EK, KB, BH*>.

22). Ceci posé, la lunule formée sera égale au rectiligne composé des trois triangles. — 23). En effet, la somme des segments en dedans de la lunule et retranchés du rectiligne par les droites EZ, ZH, est égale à la somme des segments extérieurs au rectiligne. Car chacun des intérieurs est égal à une fois et demie l'un quelconque des extérieurs. — 24). Si donc la lunule est égale à la somme des trois segments et de ce qui dans le rectiligne est en dehors des deux segments, ou bien si le rectiligne est égal à la lunule augmentée des deux segments et diminuée des trois, comme la somme des deux est égale à celle des trois, la lunule sera égale au rectiligne.

25). Que l'arc extérieur de cette lunule soit inférieur à un demi-cercle, il le montre parce que l'angle inscrit dans le segment

extérieur est obtus. — 26). Que cet angle soit obtus, il le montre ainsi : D'un côté, la droite EZ est en puissance égale à une fois et demie chacun des rayons; d'autre part la droite KB est < en puissance > plus que < double de > la droite BZ, [parce que, comme je le montrerai, l'angle en Z est plus grand < qu'un droit >] — 27). Or il est clair que si l'on avait la droite BK en longueur plus que double de BZ, on aurait aussi en longueur la droite KE plus que double *soit que la droite BZ*, soit que la droite KZ. — 28). Mais il en sera de même pour les puissances; par conséquent la droite EK est en puissance plus que double de la droite KZ. — 29). Et comme la droite EZ est égale en puissance à une fois et demie la droite EK, on en conclut que la droite EZ est en puissance plus grande que la somme des droites EK et KZ. — 30). Donc l'angle en K est obtus, donc le segment dans lequel il est inscrit est inférieur à un demi-cercle. — 31). C'est ainsi qu'Hippocrate a carré [toutes] les lunules, suivant que leur arc extérieur est d'un demi-cercle, ou qu'il est soit plus grand, soit plus petit qu'un demi-cercle.

32). Mais il a carré aussi comme suit la somme d'une lunule et d'un cercle. — 33). Soit autour du point K comme centre deux cercles, tels que le diamètre de l'extérieur soit en puissance sextuple du diamètre de l'intérieur. Ayant inscrit dans le cercle intérieur l'hexagone marqué ABCDEZ, prolongez jusqu'à la circonférence du cercle extérieur les rayons marqués KA, KB, KC, et joignez les droites HG, GI. Enfin sur la droite HI, décrivez un segment semblable à celui retranché par la droite HG. — 34). Comme nécessairement la droite HI est en puissance triple de la droite GH, côté de l'hexagone (car la sous-tendante de deux côtés de l'hexagone forme avec un troisième un angle droit inscrit dans le demi-cercle, en sorte que leur somme en puissance vaut le diamètre, tandis que le diamètre est en puissance quadruple du côté de l'hexagone, puisque celui-ci est égal au rayon, et que le double en longueur est quadruple en puissance), comme d'autre part, la droite GH est sextuple *en puissance* de la droite AB, il est clair que le segment décrit sur la droite HI se trouvera égal à la somme

de ceux retranchés du cercle extérieur par les droites HG, GI et de ceux retranchés du cercle intérieur par tous les côtés de l'hexagone. — 35). En sorte que la lunule marquée HGI sera plus petite que le triangle marqué des mêmes lettres, de la somme des segments retranchés du cercle intérieur par les côtés de l'hexagone. — 36). Par conséquent la somme de la lunule et des segments retranchés par l'hexagone sera égale au triangle. En ajoutant de part et d'autre cet hexagone, la somme du triangle en question et de l'hexagone sera égale à celle de la lunule et du cercle intérieur. — 37). Si donc on peut carrer les rectilignes dont il s'agit, on pourra aussi carrer la somme du cercle et de la lunule.

V

Voici maintenant les observations nouvelles que me suggère le document reproduit et traduit ci-dessus. Je les ai classées suivant le numérotage que j'ai adopté pour les divisions du texte.

1). Il semble clair, d'après le début, qu'Eudème vient de parler des quadratures des figures rectilignes, des quadratures *ordinaires*. On ne peut douter que ce ne fût un de ces objets principaux des *Éléments* que, comme nous le savons, Hippocrate fut le premier à composer, et qui durent nécessairement servir de base aux rédactions subséquentes des ouvrages géométriques portant le même titre, jusqu'à ce qu'Euclide, profitant de tous les travaux antérieurs, composât le monument durable qui nous est parvenu.

Les quadratures des lunules faisaient-elles aussi partie de ces *Éléments* d'Hippocrate? Nous admettrons la négative : parce que, d'une part, l'impression qui ressort de l'analyse qu'en donne Eudème, est celle d'un tout complet par lui-même, d'un livre spécial et isolé, non d'une suite de théorèmes détachés d'un ensemble plus étendu; parce que, d'un autre côté, il serait difficile d'expliquer comment la tradition n'aurait pas maintenu dans le cadre des *Éléments* des propositions aussi intéressantes, comment on ne les retrouverait pas dans Euclide qui, sans conteste, en a admis bien d'autres ne se prêtant pas davantage aux applications ultérieures.

2). Il est à remarquer ici, à l'appui de l'observation qui précède, que le théorème qui, d'après le témoignage d'Eudème, ouvrait le traité d'Hippocrate, — la proportionnalité des segments semblables aux carrés de leurs bases, — ne se retrouve pas, dans l'œuvre d'Euclide, malgré son importance évidente. D'autre part, au moins dans notre restitution, après avoir dit que ce théorème était établi par Hippocrate comme la première des propositions utiles pour ses quadratures, Eudème n'en cite pas d'autres.

Faut-il croire qu'il ait fait des omissions volontaires? quelles seraient ces omissions?

Dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placés, nous devons porter notre attention sur les théorèmes et problèmes dont Hippocrate fait expressément usage et qui ne se retrouvent pas non plus chez Euclide.

Nous remarquons à cet égard la proposition quadruple que le carré du côté d'un triangle est plus grand ou plus petit que la somme des carrés des deux autres côtés, ou pour parler le langage ancien, que le côté d'un triangle est en puissance plus grand ou plus petit que la somme des deux autres suivant que l'angle opposé au premier est obtus ou aigu, et réciproquement. Voir 11), 13), 26), 30).

Je ne parle pas des constructions spéciales 9), 17), qui devaient former évidemment l'objet de lemmes particuliers aux quadratures de la seconde et de la troisième lunule. Mais les théorèmes que nous venons d'énoncer, et dont l'absence chez Euclide y constitue une lacune évidente, n'offraient-ils pas un intérêt général assez grand pour qu'Hippocrate les plaçât au début de son livre, s'il ne les avait pas démontrés ailleurs? Eudème les aurait-il passés sous silence ou n'aurait-il pas fait quelque omission semblable?

Il n'y aurait à cela rien d'impossible; il est clair qu'Eudème analysant l'ouvrage d'Hippocrate, ne s'attache qu'à ce qui lui semble saillant et sans doute aussi à ce dont il n'a pas eu à parler ailleurs. Il est remarquable notamment qu'il passe brièvement sur les constructions et les démonstrations des quadratures, s'arrêtant au contraire à prouver que dans la seconde et la troisième lunule,

les arcs extérieurs sont pour l'une, plus grand, pour l'autre, plus petit que la demi-circonférence. Il est probable qu'il a vu là des exemples de démonstrations d'un genre peu ordinaire de son temps, qu'il a cru devoir par conséquent mettre davantage en lumière. Mais pour plus de brièveté et peut-être parce qu'il avait eu déjà occasion de les rapprocher du théorème de Pythagore, aura-t-il négligé de mentionner au début de son analyse les propositions sur lesquelles reposent les démonstrations conservées par lui.

Après mûre réflexion, nous croyons toutefois qu'il n'en est rien et qu'Hippocrate supposait connus d'ailleurs les théorèmes dont il s'agit. Nous insistons à cet égard sur le singulier — *4) Cela démontré,* — qui précède l'exposé de la première quadrature, et qui prouve pour nous que le livre d'Hippocrate ne renfermait qu'un seul théorème préliminaire. Comme par « les propositions utiles pour ces quadratures » Eudème pouvait entendre toutes les propositions du livre d'Hippocrate, l'emploi de ce singulier nous paraît décisif.

3). De ce que nous venons de dire, et du texte d'Eudème, il nous semble résulter qu'Hippocrate renvoyait seulement pour démontrer la proposition 2), à un théorème démontré dans ses *Éléments* comme il se retrouve dans ceux d'Euclide. Cela paraît au contraire peu vraisemblable à M. Usener, si l'on examine bien, remarque-t-il, ce que dit Eudème.

Mais celui-ci nous dit formellement que la proposition 2) était la première. L'importante proposition 3) : que les cercles sont proportionnels aux carrés de leurs diamètres n'aurait donc été que la seconde, ce qui est contre toute logique, quand elle est indispensable pour la précédente. Le temps du verbe δεῖξαι indique bien au contraire qu'elle lui était antérieure de fait. Donc elle ne pouvait être démontrée dans le traité des lunules.

Pourquoi Eudème la mentionne-t-il? C'est que probablement il n'avait pas encore eu l'occasion de la citer. Ce serait un indice de plus à l'appui d'une hypothèse que j'ai émise ailleurs [1] que les

[1] *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes, relatifs à l'histoire des mathématiques.* Voir plus haut.

Histoires d'Eudème étaient rédigées suivant l'ordre des matières et non suivant l'ordre chronologique, ce en quoi on ne peut au reste méconnaître une tradition aristotélique.

Ce point vidé, il resterait à rechercher comment Hippocrate faisait ou avait pu faire ces deux démonstrations. Mais nous croyons devoir nous abstenir autant que possible d'hypothèses à cet égard; nous n'avons en effet aucun indice, et rien, en somme, ne nous empêche de supposer qu'il procédait à peu près comme l'a fait Euclide pour la proposition 3), comme aurait pu le faire Euclide pour la proposition 2).

J'arrive donc à signaler, en raison de son importance, le premier désaccord qui existe ici entre M. Usener et moi pour la restitution du texte d'Eudème.

Voici comment continue après 4) le fragment, dans le texte adopté par M. Diels:

(Simplicius): « Ce dont Euclide a fait la proposition 2 du livre XII des Éléments, ainsi conçue : « Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres. » En effet les segments semblables sont entre eux, comme les cercles. Car des segments semblables sont ceux qui sont la même fraction du cercle, comme deux demi-cercles, deux tiers de cercle. C'est ainsi que »

(Eudème) « les angles inscrits dans les segments semblables sont égaux. Tous ceux inscrits dans les demi-cercles sont droits, dans les segments plus grands, il sont moindres qu'un droit et d'autant plus petits que les segments sont plus grands que les demi-cercles, dans les segments plus petits, ils sont plus grands, et cela d'autant plus que les segments sont plus petits. »

Ce passage peut servir d'exemple typique de la maladresse de Simplicius en géométrie. Il veut faire lui-même la démonstration indiquée par Eudème, mais abandonné à ses propres forces, il croit s'en tirer en adoptant pour les segments semblables la définition qui lui semble la plus simple et dont ce qu'il a à prouver ressort d'ailleurs immédiatement; puis s'apercevant que cette définition n'est pas celle d'Euclide, il la relie sans aucune démonstration à celle-ci, ainsi qu'à ses conséquences bien connues dont il sent la nécessité pour les démonstrations ultérieures.

J'ai donné plus haut les raisons qui me paraissent décisives pour établir qu'après la proposition 2) Hippocrate passait immédiatement aux quadratures, et pour faire en conséquence restituer à Simplicius les lignes relatives aux rapports de grandeur entre les angles inscrits et les segments, lignes que M. Usener croit d'Eudème. Il est à peine utile d'ajouter que j'attribue d'ailleurs, comme lui, la connaissance de ces propositions à Hippocrate, qui fait usage expressément de plusieurs d'entre elles. Je remarquerai seulement que la démonstration des « d'autant plus que » n'est pas dans Euclide, et que leur énoncé, absolument inutile ici, sent le commentateur du VIe siècle.

VI

4). L'exposition, suffisamment claire, de la première quadrature semble faite sans qu'Eudème ait tracé la figure 1. *(Voir les figures.)* Pour la seconde quadrature, s'il a fait une figure (*fig.* 2), ce dont on peut douter, il n'y a point mis de lettres. Dans les deux suivantes enfin, il semble ne recourir qu'à regret à la désignation par lettres, et préférer des périphrases pour indiquer les éléments de la figure dont il parle. Cette tendance différencie essentiellement le style d'Eudème de celui des géomètres grecs de l'époque classique, et une fois bien constatée, ce qui est facile, elle peut servir de guide pour la restitution du texte dans ses détails.

9). Pour la seconde quadrature, Eudème donne seulement, sans la détailler d'ailleurs, la construction de la lunule, et omet la démonstration de la quadrature, la jugeant sans doute assez facile à reconstituer d'après celles de la première et de la troisième. Il ne démontre pas non plus que le trapèze à trois côtés égaux qui sert de base à la construction de la lunule est inscriptible. Il n'a donc pas dû faire de démonstration dans le cas 20) tout à fait semblable. Ces deux points ont été bien reconnus par M. Allman.

11). La démonstration qui suit, que l'arc extérieur de la seconde lunule est plus grand qu'une demi-circonférence, est suffisamment claire dans sa concision, et M. Usener est tenté à tort de l'allonger inutilement. La comparaison qu'il en fait avec la démonstration correspondante pour la troisième lunule est vicieuse, car cette

dernière est également trop allongée par lui-même, et comme pour celle-ci, Eudème est obligé de recourir à l'emploi des lettres, et par conséquent de suivre de plus près le texte d'Hippocrate, elle doit nécessairement être un peu plus longue.

La démonstration pour la seconde lunule repose d'ailleurs sur ce lemme, que dans un trapèze à trois côtés égaux, le quatrième étant plus grand, les angles adjacents au plus petit des deux côtés parallèles sont obtus. La chose était évidente de soi et Eudème n'avait pas besoin d'insister sur ce point, que Simplicius a bien essayé de démontrer, mais sans aboutir.

15). Le langage d'Eudème avant d'exposer la construction de la troisième lunule, indique bien qu'il résume ce que fait Hippocrate.

16). Voir la figure 3 que j'ai débarrassée des inutiles additions de Simplicius.

17). Dans ma note sur la *Solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide* (1), j'ai dit que cette construction dont la nécessité était évidente, mais dont l'énoncé était omis dans l'édition aldine, exigeait la solution du problème du second degré :

$$3x^2 + 3ax = 2a^2;$$

c'est-à-dire, pour Hippocrate, une parabole avec hyperbole d'un rectangle dont les côtés soient dans le rapport 1 : 3.

En effet on a par hypothèse :

$$EZ^2 = \frac{3}{2} AK^2.$$

D'autre part, les triangles ABE, ZBC étant semblables :

$$EB \times ZB = AB \times BC = AK^2$$

c'est-à-dire :

$$(EZ + ZB)ZB = \frac{2}{3} EZ^2$$

ou

$$3ZB(ZB + EZ) = 2EZ^2.$$

(1) Tome IV des *Mémoires de la Société* (2e série), p. 412.

En posant $EZ = a$, $ZB = x$, on a la formule ci-dessus. Comme on doit partir de AK, on construira d'abord :

$$EZ = a = \sqrt{\frac{3}{2} AK^2},$$

par une quadrature, puis ZB par la parabole avec hyperbole. La construction s'achève facilement.

Il est à remarquer au reste que cette construction est présentée comme obtenue isolément, sans qu'il soit besoin de tracer la droite ZB, qui est menée plus tard : 18) et 19). Ces problèmes de *directions* (νεύσεις), c'est-à-dire d'inscription entre deux lignes données d'une droite de longueur donnée dont le prolongement passe par un point donné, semblent donc être dès lors traités pour eux-mêmes, comme ils le seront plus tard par Apollonius dans ses deux livres des *Directions* (Pappus, livr. VII).

21). Cet endroit est peut-être celui qui se trouvait le plus défiguré par les interpolations de Simplicius, et dont par suite la restitution exacte est le plus difficile. Il semble qu'il y ait une lacune que nous avons essayé, dans la traduction, de combler quant au sens.

L'existence de cette lacune s'explique parce que Simplicius n'a pas suivi l'ordre d'idées d'Eudème, et n'aura pas voulu répéter ce qu'il avait énoncé plus haut, en termes d'ailleurs vicieux, la similitude des cinq segments EK, KB, BH, HZ, ZE. Pour Simplicius d'ailleurs cette similitude est la condition de la construction de l'arc intérieur de la lunule, par analogie avec celles des arcs intérieurs de la première et de la seconde lunule. Mais il y aurait à prouver ici, en suivant cette marche, que les arcs HZ, ZE appartiennent à une même circonférence.

Eudème a procédé tout différemment, en déterminant l'arc intérieur comme circonscrit au triangle EZH. Il convenait dès lors d'énoncer le fait de la similitude des segments, sinon de le démontrer.

La lacune semble prouvée par le rapprochement désormais choquant des deux membres de phrase « *Ceci posé* » 20) et 22). Toutefois elle ne doit pas avoir été considérable, la similitude

dont il s'agit se reconnaissant assez facilement pour qu'Eudème en ait jugé la démonstration inutile.

En effet, comme il est clair que les trois segments extérieurs sont semblables entre eux, et les deux intérieurs semblables entre eux de leur côté, il suffit de constater la similitude entre le segment HZ et le segment HB, par exemple. Or, le même angle HEB est inscrit dans les segments supplémentaires des cercles auxquels ils appartiennent respectivement; leur similitude est donc évidente.

26). J'ai apporté au texte depuis la révision que j'ai communiquée à M. Diels, une nouvelle correction indiquée par les additions entre < >, et qui me semble indispensable pour rétablir complètement l'ordre logique que l'on ne peut méconnaître.

Cet ordre peut se représenter comme suit à première vue :

$$EZ^2 = \frac{3}{2} EK^2, \text{ par hypothèse, } (EK = AK). \qquad 26)$$

$$KB^2 > 2BZ^2, \text{ l'angle en Z étant obtus, d'où}$$

$$EK^2 > 2KZ^2, \text{ car } EK = KB, KZ = BZ. \qquad 27) \text{ et } 28)$$

$$EZ^2 = EK^2 + \frac{1}{2} EK^2 > EK^2 + KZ^2. \qquad 29)$$

L'énoncé $KB^2 > 2BZ^2$ est donc essentiel, tandis que l'énoncé $KB^2 > BZ^2$, qui ressort du texte des manuscrits, est inutile.

Pour le membre de phrase mis entre crochets, la difficulté est sérieuse. M. Diels admet que dans le passage où nous sommes arrêtés, Eudème transcrit textuellement Hippocrate, ce qui est sans doute plus voisin de la vérité que pour tout le reste du fragment. Hippocrate aurait donc annoncé une démonstration qu'Eudème aurait omis de reproduire à sa place.

Cette hypothèse est spécieuse; il semble en effet probable qu'Hippocrate n'a pas considéré comme évident que l'angle en Z fût obtus et que pour bien prouver que $KB^2 > 2BZ^2$, il a démontré soit avant, soit après, que l'angle KZB est plus grand qu'un droit. Dans cette hypothèse, il faut donc corriger par cette addition <qu'un droit> le texte des manuscrits.

Mais comment Hippocrate a-t-il pu faire cette démonstration? Il devait naturellement partir de la construction de la droite EZ, construction déterminée, comme nous l'avons vu par la relation :

$$EZ \times ZB + ZB^2 = \frac{2}{3} EZ^2 = AK^2.$$

Or, il ressort immédiatement de cette relation que d'une part :

$$EZ > ZB,$$

de l'autre, dès lors, que

$$AK^2 = KB^2 > 2ZB^2,$$

c'est-à-dire la position même 26).

Logiquement donc, dans l'ordre d'idées rapporté par Eudème, le fait que l'angle en Z est obtus est la conséquence [1], non pas la raison, de la relation : $KB^2 > 2BZ^2$.

Y a-t-il d'ailleurs des raisons pour restituer à Simplicius le membre de phrase douteux?

Remarquons qu'il est parfaitement possible que le texte qu'il avait lui-même sous les yeux fût fautif et qu'il y lût ce qui se trouve maintenant dans les manuscrits, c'est-à-dire :

$$KB^2 > BZ^2.$$

Il veut en ajouter la raison, et il dit : c'est que, comme je le montrerai, l'angle en Z est plus grand, c'est-à-dire l'angle BZK opposé à KB, plus grand que l'angle ZKB opposé à BZ. Puis il oublie de faire cette démonstration, ou plutôt il reconnaît qu'elle est complètement inutile, puisqu'il ne se sert pas de la relation $KB^2 > BZ^2$.

De la sorte, l'honneur des manuscrits de Simplicius serait sauf,

---

[1] M. Allmann m'a cependant indiqué une démonstration où cet ordre logique est renversé. Si EZ est mobile entre la circonférence AEB et la droite CD, sa longueur augmente, en même temps que l'angle en Z. Si celui-ci était droit, on aurait évidemment $EZ^2 = \frac{1}{2} AK^2$. Comme EZ est plus grand de fait, l'angle en Z doit être obtus.

et les additions que j'ai faites à leur texte ne seraient valables que pour la restitution de celui d'Eudème.

27). J'ai ici rétabli le texte des manuscrits, dans un endroit regardé comme désespéré, en modifiant simplement la ponctuation. Le mode de démonstration est singulier, et témoigne d'une imperfection encore bien grande dans les habitudes mathématiques. Mais il n'y a pas de raison sérieuse de nier son authenticité pour l'époque d'Hippocrate.

Au lieu de conclure immédiatement $EK^2 > 2KZ^2$ de $KB^2 > 2BZ^2$ qu'il vient de poser, Hippocrate fait en somme le raisonnement suivant :

Si l'on avait $KB > 2BZ$, on aurait évidemment $EK > 2KZ$ (car $KB = EK$, $BZ = KZ$). Mais on a $KB^2 > 2BZ^2$, donc on aura $EK^2 > 2KZ^2$.

31). Il est incontestable qu'Hippocrate a carré seulement trois lunules, et non pas *toutes* les lunules qui sont en nombre infini.

Eudème a-t-il pu s'y tromper et commettre ainsi en fait le paralogisme tant reproché à Hippocrate? Je ne puis le croire.

A-t-il écrit ce qu'on lit dans le texte de Simplicius en entendant qu'Hippocrate avait carré une lunule dans chacun des trois groupes indéfinis entre lesquels peuvent se partager toutes les lunules imaginables? Est-ce Simplicius qui, de lui-même, a ajouté des mots malencontreux? Je laisse à d'autres à se prononcer.

33). Voir la figure 4. Je ne m'arrêterai pas à ce théorème qui n'offre aucune difficulté. Je ferai cependant remarquer que contre ma première impression, j'ai restitué à Eudème la parenthèse du n° 34, laquelle me semble définitivement bien porter la marque de son style.

VII

Je terminerai par quelques remarques sur le problème des quadratures des lunules.

Hankel dit à tort (*Zur Geschichte,* etc., p. 127) que celles d'Hippocrate seules peuvent être construites avec la règle et le compas.

Désignons en général par R et x le rayon et le demi-angle au centre pour l'arc intérieur, par r et y le rayon et le demi-angle au centre pour l'arc extérieur, la surface de la lunule sera :

$$S = r^2 y - R^2 x + \frac{1}{2}(R^2 \sin 2x - r^2 \sin 2y). \qquad (1)$$

Nous avons d'ailleurs la relation

$$R \sin x = r \sin y. \qquad (2)$$

Pour que la lunule soit quarrable, il faut en premier lieu que :

$$r^2 y - R^2 x = 0,$$

ou bien, si l'on pose $y = mx$,

$$R = r\sqrt{m}.$$

La surface devient alors

$$S = \frac{r^2}{2}(m \sin 2x - \sin 2mx), \qquad (1)'$$

et il reste à résoudre l'équation (2), devenue :

$$\text{Sin}\, mx = \sqrt{m} \sin x. \qquad (2)'$$

Les solutions d'Hippocrate correspondent évidemment aux valeurs suivantes de m :

$$m_1 = 2, \qquad m_2 = 3, \qquad m_3 = \frac{3}{2};$$

mais l'équation (2)' se ramène encore au second degré pour

$$m_4 = 5, \qquad m_5 = \frac{5}{3}.$$

La quadrature géométrique de deux autres lunules est donc possible, comme l'a constaté le premier Th. Clausen dans le *Journal de Crelle* (t. XXI, p. 375-376).

Clausen a présenté d'ailleurs comme nouvelles les quatre dernières solutions du problème, car à la date de son travail (1840), la première seule était connue comme appartenant à Hippocrate.

Clausen n'a pas au reste traité le problème géométriquement.

Il ne me semble donc pas inutile de donner quelques indications à cet égard, afin de montrer que la quadrature des deux nouvelles lunules correspondant à m_4 et m_5 n'eût pas dépassé les forces des mathématiciens grecs. Mais ils n'ont point poursuivi la route frayée par Hippocrate, ou s'ils ont tenté de le faire, ils se seront laissé arrêter, comme il l'a été sans doute, par l'impossibilité de construire le pentagone inscriptible dont quatre côtés sont égaux et le cinquième double de chacun des quatre autres, problème correspondant à la valeur : $m = 4$.

Proposons-nous, au contraire, de construire l'hexagone inscriptible (*fig.* 5) ABCDEF dont le côté AB soit dans un rapport donné avec un quelconque des cinq autres tous égaux.

Prolongeons, suivant DG, le côté ED parallèle à AB, et, suivant CH, le côté DC jusqu'à sa rencontre en H avec le prolongement de AB. Soient, enfin, O le centre du cercle circonscrit à l'hexagone et I, K, les pieds des perpendiculaires abaissées sur AB de C et de D.

Il est facile de voir que l'angle GDC sera égal à l'un quelconque des cinq angles formés par les rayons allant aux sommets et sous-tendus par les côtés égaux de l'hexagone. Il est, en effet, égal à $2dr - 2\mathrm{CDO} = 2(1dr - \mathrm{CDO}) = \mathrm{COD}$. Il en est nécessairement de même pour l'angle HCB.

Comme d'ailleurs les angles GDC, CHB sont égaux comme alternes internes, le triangle CBH sera isoscèle, et les triangles HIC, HKD, OLC seront semblables.

Mais on a évidemment

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DE} + 2\mathrm{IK} + 2\mathrm{IH} - 2\mathrm{BH}.$$

Or, d'après les similitudes que nous avons établies :

$$\frac{\mathrm{IK}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{CH}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{CH}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OC}}.$$

D'ailleurs $\mathrm{DE} = \mathrm{CD} = \mathrm{CB} = \mathrm{BH}$.

On aura donc :

$$\mathrm{AB} + \mathrm{HB} = 2\mathrm{HB}.\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OC}} + 4\mathrm{HB}.\frac{\mathrm{OL}^2}{\mathrm{OC}^2};$$

d'où

$$OC^2\left(1+\frac{AB}{HB}\right)=2OL(OC+2OL).$$

Si donc on se donne OC le rayon du cercle, et le rapport $\frac{AB}{HB}$, on peut construire 2OL par une parabole avec hyperbole d'un carré.

L'un quelconque des côtés égaux de l'hexagone étant d'ailleurs moyen proportionnel entre 2OC et OC — OL, la construction s'achèvera facilement.

Si l'on décrit maintenant sur le grand côté AB un segment semblable à ceux sur les petits côtés, en supposant $\frac{AB}{HB}=\sqrt{5}$, on aura une lunule équivalente à l'hexagone.

Mais, au lieu de supposer AB quintuple en puissance des autres côtés de l'hexagone, admettons qu'il soit la base du trapèze à trois côtés égaux ABMN, rentrant à l'intérieur de l'hexagone et tel que BM soit parallèle à CD et égal à $HB\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Comme précédemment :

$$AB=HB\left(2\frac{OL}{OC}+4\frac{OL^2}{OC^2}-1\right)$$

et l'on démontrera facilement que de même

$$AB=MN+2BM.\frac{OL}{OC}=HB\sqrt{\frac{5}{3}}\left(1+2\frac{OL}{OC}\right).$$

On arrivera donc à

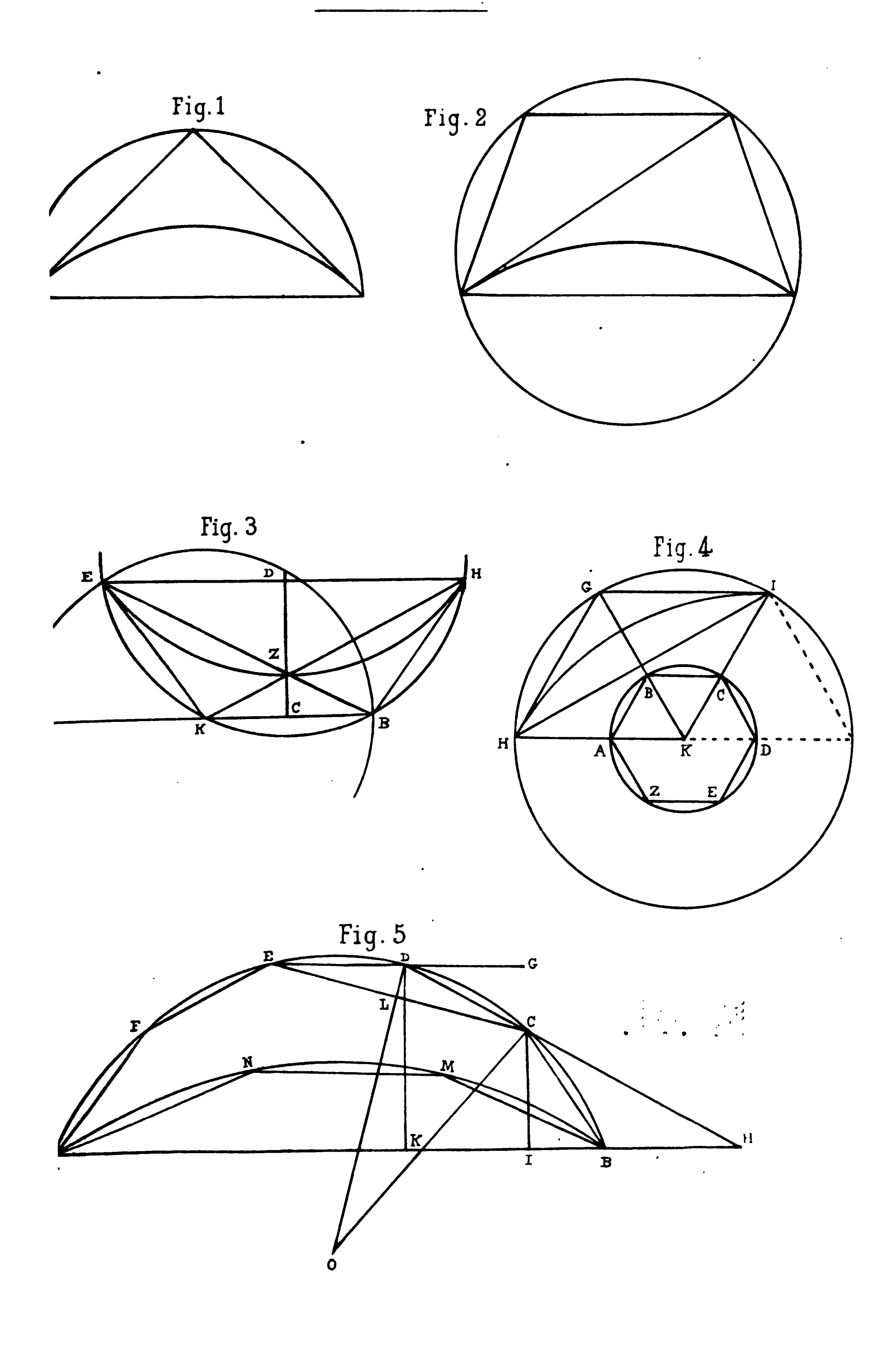
$$2OL\left[2OL-OC\left(\sqrt{\frac{5}{3}}-1\right)\right]=OC^2\left(\sqrt{\frac{5}{3}}+1\right)$$

et en se donnant OC, on construira encore 2OL par une parabole avec hyperbole d'un carré.

Dans ce second cas, on achèvera de même facilement la construction, on prouvera que les segments sur les divers côtés sont semblables et qu'enfin la lunule est équivalente à la différence de l'hexagone et du trapèze.

Fragment d'Eudème sur la quadrature des Lunules

P. TANNERY



ARISTARQUE DE SAMOS

PAR M. PAUL TANNERY

I

Anaxagore de Clazomène, qui le premier enseigna la véritable cause des éclipses et des phases de la Lune, se représentait encore cet astre comme plat, de même qu'aussi le Soleil et la Terre. Il croyait d'ailleurs cette dernière plus grande que le Soleil, en sorte que son ombre devait s'étendre jusqu'aux étoiles. Il supposait même que dans cette ombre, les lumières plus faibles de la voûte céleste pouvaient parvenir à nos yeux, tandis qu'en dehors du cône, elles se trouvaient, même pendant la nuit, effacées par la lumière solaire; et c'est ainsi qu'il expliquait le phénomène de la voie lactée.

L'énoncé de ces opinions suffit pour montrer qu'au v[e] siècle avant J.-C. l'astronomie n'offrait aucune théorie scientifique et n'était qu'un sujet de grossières observations, mêlées à des hypothèses plus ou moins ingénieuses. Il n'y a donc pas à s'étonner qu'Anaxagore n'ait pas été assez convaincu de la vérité de son explication des éclipses lunaires, pour écarter la possibilité de leur production par l'interposition, entre le Soleil et la Lune, d'astres obscurs invisibles de la Terre, hypothèse formulée avant lui par Anaximène de Milet.

Démocrite fut le dernier savant qui n'admit pas la sphéricité des astres; ce dogme de l'école pythagoricienne devait triompher, grâce surtout à l'adhésion de Platon. L'hypothèse d'Anaxagore lui

apporta d'ailleurs un argument sérieux qu'on retrouve dans Aristote : c'est que, dans les éclipses, la ligne de la séparation entre l'ombre et la lumière apparaît toujours comme circulaire.

Mais les disciples de Philolaos maintinrent encore qu'une partie des éclipses lunaires étaient produites par un astre toujours invisible à la Terre, l'Antichthone de leur maître. Stobée (*Eclog. phys.* I, 26) nous apprend qu'ils furent réfutés par Philippe d'Oponte ou de Medma, disciple de Platon. Ce n'est donc que vers le milieu du IV[e] siècle que la théorie des phases et des éclipses fut définitivement constituée.

Philippe paraît avoir singulièrement contribué à établir cette théorie, aussi bien qu'à en tirer les conséquences nécessaires. Philosophe et mathématicien, il fut également observateur et publia un *parapegme* (almanach). Dans la liste de ses ouvrages conservée par Suidas, on peut relever les titres suivants : *Sur la distance du Soleil et de la Lune. — Sur la grandeur du Soleil, de la Lune et de la Terre. — Sur l'éclipse de Lune. — Sur les planètes.*

Toutefois on ne peut douter que, dès avant lui, Eudoxe de Cnide ne fût en possession de la même théorie. Archimède, dans son *Arénaire*, qui paraît dater au moins de son âge mûr, c'est-à-dire de la seconde moitié du III[e] siècle, rappelant les déterminations scientifiques faites avant lui du rapport des diamètres du Soleil et de la Terre, dit en effet qu'Eudoxe fixait ce rapport à 9 fois, Phidias fils d'Acoupater à 12, Aristarque de Samos entre 18 et 20 fois. Le silence qu'il garde sur Philippe doit faire supposer que ce dernier avait admis l'un des deux premiers nombres, soit qu'il ait suivi Eudoxe, soit que Phidias, inconnu d'ailleurs, se soit approprié la détermination du Locrien.

Quant à Aristarque qui vivait au commencement du III[e] siècle, entre Euclide et Archimède, son petit traité : *Sur les grandeurs et distances du Soleil et de la Lune* (1), a eu la bonne fortune

(1) Ἀριστάρχου περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης. Je me servirai de l'édition gréco-latine de Fortia d'Urban. Paris, 1810.

d'être recueilli par les anciens dans leur collection appelée le *Petit Astronome* pa opposition au *Grand Astronome,* c'est-à-dire à l'Almageste de Ptolémée; de la sorte il nous est parvenu.

Le véritable titre de gloire d'Aristarque, astronome observateur et inventeur d'instruments d'après Vitruve ([1]), bon géomètre comme le prouve son écrit, est, on le sait, d'avoir le premier soutenu le système astronomique auquel est resté attaché le nom de Copernic. Mais il n'y a nullement lieu, comme on le fait ordinairement, de lui attribuer également l'invention d'une méthode pour déterminer le rapport des distances et des diamètres du Soleil et de la Lune. A cet égard, de même qu'Euclide en géométrie, il n'a fait que reprendre, en leur donnant plus de rigueur, les travaux de ses précurseurs, Eudoxe, Phidias, Philippe, et c'est évidemment au plus ancien, à Eudoxe, qu'il faut faire remonter l'invention de la méthode.

On ne peut avoir de doute à cet égard si l'on considère ce que dit Aristote (*Météorologiques,* I, 8, 6) en réfutant l'opinion d'Anaxagore sur la voie lactée :

« En outre, si ce qu'on démontre dans les théorèmes sur » l'astrologie est exact, le Soleil est plus grand que la Terre, la » distance des étoiles à la Terre est multiple de celle du Soleil, » de même que celle du Soleil à la Terre est multiple de celle de » la Lune, et le sommet du cône d'ombre de la Terre n'est pas » très éloigné de celle-ci. Cette ombre que nous appelons la nuit, » n'atteint donc pas les étoiles et elles sont nécessairement toutes » vues par le Soleil, sans que la Terre intercepte les rayons qu'il » envoie à chacune d'elles. »

Il est bien clair d'après ce passage, que dès le milieu du IVe siècle, on spéculait mathématiquement sur les distances et les dimensions du Soleil et de la Lune, et la moindre réflexion

---

([1]) Vitruve cite particulièrement deux cadrans solaires, l'un hémisphérique *(scaphè),* l'autre plan *(discus in planitia),* probablement le premier de ce type. Le perfectionnement des cadrans solaires avait d'autant plus d'intérêt pour les premiers astronomes, qu'ils observaient moins les angles, faute d'instruments. Ils mesuraient des temps avec la clepsydre, réglée sur un cadran solaire.

montre que ce ne pouvait être qu'en suivant la méthode que nous retrouvons dans Aristarque.

Tout d'abord Eudoxe fut le premier à développer scientifiquement l'hypothèse que le Soleil et la Lune restent l'un et l'autre à une distance constante de la Terre. C'est ce qu'admet Aristarque; on sait du reste que cette hypothèse subsista jusqu'à l'adoption par Hipparque du système des excentriques.

Une tradition, sans grande valeur du reste (1), nous représente Eudoxe comme niant la possibilité des éclipses totales du Soleil, comme attribuant par conséquent à la Lune un diamètre apparent inférieur à celui du Soleil. Aristarque au contraire regarda les diamètres apparents des deux astres comme rigoureusement égaux, d'où il suit que leurs diamètres réels sont proportionnels à leurs distances à la Terre. Mais quand son hypothèse n'aurait pas été généralement admise avant lui, il n'en est pas moins clair que la conclusion a toujours dû être considérée comme très approchée de la vérité.

Quant à la valeur qu'attribuaient les anciens au diamètre apparent du Soleil, Thalès paraît l'avoir déjà fixée à $\frac{1}{720}$ de la circonférence, soit un demi-degré, et Archimède nous affirme qu'Aristarque avait adopté cette même détermination. Nous sommes donc justifiés à l'attribuer également à ses précurseurs.

Il est toutefois très singulier que dans le traité d'Aristarque que nous possédons, cette valeur soit prise quatre fois plus forte, soit égale à *deux degrés*. Ceci mérite quelque explication.

Aristarque se propose de déterminer le rapport des distances du Soleil et de la Lune, et le rapport des diamètres de ces astres, soit entre eux, soit avec celui de la Terre. Pour cet objet, et eu égard aux procédés d'approximation très imparfaits qu'il possède, le choix de la valeur à attribuer aux diamètres apparents, quoiqu'elle entre dans les calculs, n'exerce, pour ainsi dire, pas d'influence appréciable sur les résultats, ainsi que nous le verrons plus loin.

---

(1) *Art d'Eudoxe*, dans les *Papyrus grecs du Musée du Louvre*. Paris, 1866.

Il en eût été évidemment tout autrement, si Aristarque se fût proposé d'évaluer la distance de la Lune en diamètres terrestres. Mais il se garde d'autant plus de le faire qu'il a admis comme hypothèse, — ce que ses précurseurs ont dû évidemment admettre aussi dans leurs spéculations, — que le diamètre de la Terre est négligeable par rapport à celui de l'orbite lunaire; que, par suite, les angles donnés par l'observation à cette distance peuvent être regardés comme géocentriques.

Si Aristarque a choisi pour le diamètre apparent du Soleil une valeur qu'il savait pertinemment fausse, il est clair que son traité nous apparaît avant tout comme destiné à donner un exemple des calculs à faire sur des déterminations expérimentales plus exactes, et à montrer en même temps que pour la solution du problème posé, une des données pouvait être prise à peu près arbitrairement. Il se garantissait ainsi contre certaines objections qui auraient pu lui être faites.

D'après le témoignage de Macrobe, il semble en effet que les Égyptiens avaient, par des observations absolument erronées, fixé le diamètre apparent du Soleil à $\frac{1}{216}$ de la circonférence, soit $1^\circ \frac{2}{3}$. Aristarque paraît avoir, de propos délibéré, voulu lui assigner une valeur plus grande encore; mais il est hors de doute qu'il se rendait parfaitement compte des conséquences de son hypothèse.

II

Arrivons maintenant à examiner les principes mêmes de la méthode suivie par Aristarque.

D'après le passage d'Aristote que nous avons cité, les astronomes du IVe siècle spéculaient sur le cône d'ombre de la Terre.

Désignons par :

S le rayon de l'orbite solaire,
L le rayon de l'orbite lunaire,
s le rayon du Soleil,

montre que ce ne pouvait être qu'en suivant la méthode que nous retrouvons dans Aristarque.

Tout d'abord Eudoxe fut le premier à développer scientifiquement l'hypothèse que le Soleil et la Lune restent l'un et l'autre à une distance constante de la Terre. C'est ce qu'admet Aristarque; on sait du reste que cette hypothèse subsista jusqu'à l'adoption par Hipparque du système des excentriques.

Une tradition, sans grande valeur du reste [1], nous représente Eudoxe comme niant la possibilité des éclipses totales du Soleil, comme attribuant par conséquent à la Lune un diamètre apparent inférieur à celui du Soleil. Aristarque au contraire regarda les diamètres apparents des deux astres comme rigoureusement égaux, d'où il suit que leurs diamètres réels sont proportionnels à leurs distances à la Terre. Mais quand son hypothèse n'aurait pas été généralement admise avant lui, il n'en est pas moins clair que la conclusion a toujours dû être considérée comme très approchée de la vérité.

Quant à la valeur qu'attribuaient les anciens au diamètre apparent du Soleil, Thalès paraît l'avoir déjà fixée à $\frac{1}{720}$ de la circonférence, soit un demi-degré, et Archimède nous affirme qu'Aristarque avait adopté cette même détermination. Nous sommes donc justifiés à l'attribuer également à ses précurseurs.

Il est toutefois très singulier que dans le traité d'Aristarque que nous possédons, cette valeur soit prise quatre fois plus forte, soit égale à *deux degrés*. Ceci mérite quelque explication.

Aristarque se propose de déterminer le rapport des distances du Soleil et de la Lune, et le rapport des diamètres de ces astres, soit entre eux, soit avec celui de la Terre. Pour cet objet, et eu égard aux procédés d'approximation très imparfaits qu'il possède, le choix de la valeur à attribuer aux diamètres apparents, quoiqu'elle entre dans les calculs, n'exerce, pour ainsi dire, pas d'influence appréciable sur les résultats, ainsi que nous le verrons plus loin.

---

[1] *Art d'Eudoxe*, dans les *Papyrus grecs du Musée du Louvre*. Paris, 1866.

. l'on suppose formé par les centres des trois astres un .e rectangle dont S soit l'hypoténuse et L un des côtés de .le droit, l'angle compris entre S et L et dont le sommet est posé sur la Terre sera la distance angulaire du Soleil à la Lune au moment de la dichotomie. Dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, si $n \gtrless 2$, cette distance angulaire serait au plus de 60°. Les anciens n'ignoraient pas qu'elle est voisine d'un droit; ils pouvaient donc conclure que le Soleil est plus grand que la Terre.

Si $s > l$, il s'ensuit dès lors que $\frac{t}{l} > n$, donc que la Lune est plus petite que la Terre. On déduit aussi facilement que $L < D < S$, c'est-à-dire que le sommet du cône d'ombre est situé entre l'orbite lunaire et l'orbite solaire, ce que l'on doit conclure démontré avant Aristote.

Soit δ le complément de la distance angulaire du Soleil et de la Lune au moment de la dichotomie, la connaissance de cet angle permettrait évidemment d'achever la détermination des rapports.

Soit

$$x = \frac{S}{L} = \frac{s}{l} = \frac{1}{\sin \delta},$$

on aura

$$\frac{s}{t} = \frac{x+1}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{t}{l} = \frac{n+1}{x+1} x.$$

Les valeurs de x connues d'Archimède permettent ainsi de former le tableau suivant.

	$\frac{s}{l}$	$\frac{s}{t}$	$\frac{t}{l}$	δ (valeurs calculées)
Eudoxe.........	9	3,33333	2,7	6° 22′ 46″
Phidias..........	12	4,33333	2,76923	4° 46′ 49″
Aristarque...... (valeur moyenne)	19	6,66666	2,85	3° 1′ 1′

Aristarque admet pour δ la valeur 3°; il est probable qu'Eudoxe et Phidias admettaient respectivement 6° et 5°, soit $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{6}$ de signe.

Je ne puis croire au reste que ces valeurs aient été déduites d'observations directes de la distance angulaire. Les instruments manquaient selon toute probabilité au IV[e] siècle. Mais Eudoxe pouvait, le jour de la dichotomie, repérer les positions de la Lune et du Soleil dans le zodiaque et chercher à apprécier à quelle heure se produisait la dichotomie. Les déterminations supposent une erreur d'environ douze heures pour Eudoxe, dix pour Phidias, six pour Aristarque. Il semble que tous cherchaient des limites supérieures de δ.

On remarquera que la valeur de δ influe spécialement sur les rapports $\frac{s}{l}, \frac{s}{t}$. Au contraire, le rapport $\frac{t}{l}$ ne dépend guère que de n.

III

Je crois avoir montré, par ce qui précède, que la prétendue méthode d'observation supposée par le traité d'Aristarque de Samos ne doit pas être regardée comme inventée par lui. Mais ce traité n'en mérite pas moins une sérieuse attention.

Les dix-neuf théorèmes qu'il renferme sont exposés avec une rigueur tout euclidienne et en déterminant des limites supérieures et inférieures pour les divers rapports qu'il s'agit de préciser. Or ces rapports sont en fait trigonométriques, et leur calcul revient, en fin de compte, à celui de sinus ou de cosinus. Cependant, à cette époque, la trigonométrie n'est pas même ébauchée; la détermination du rapport de la circonférence au diamètre n'est même pas faite avec une approximation suffisante. Il est donc intéressant de voir comment Aristarque se tire de ces difficultés, quels principes il possède et avec quelle fidélité il les applique.

La proposition la plus générale à laquelle il ait recours et qu'il suppose connue d'ailleurs, peut se formuler comme suit :

Tant que l'angle α est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, le rapport $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ décroît quand α augmente; le rapport $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ croît au contraire avec α.

En remarquant d'ailleurs que :

$$\sin\frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

et en substituant à $\sqrt{2}$ la valeur approchée par défaut $\frac{7}{5}$, on déduit immédiatement de cette proposition générale les inégalités suivantes :

(3) Si $m > 1$, $\sin\frac{\pi}{2m} > \frac{1}{m}$,

ou

(4) $\cos\frac{\pi}{2m} > \frac{m-1}{m}$,

(5) $m > 2$, $\sin\frac{\pi}{2m} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m} < \frac{2}{m}$,

(6) $m > 3$, $\sin\frac{\pi}{2m} > \frac{3}{2m}$,

(7) $m > 4$, $\sin\frac{\pi}{2m} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m} < \frac{5}{3m}$.

Les limites les plus étroites obtenues de la sorte pour le sinus des petits arcs sont donc :

$$\frac{5}{3m} > \sin\frac{\pi}{2m} > \frac{3}{2m}.$$

On reconnaît immédiatement le défaut de la détermination

$$\pi < \frac{22}{7},$$

qui donnerait une limite supérieure sensiblement plus rapprochée :

$$\sin\frac{\pi}{2m} < \frac{11}{7m}.$$

Pour l'angle $\delta = 3^\circ$, $m = 30$, Aristarque obtient donc

$$\frac{1}{18} > \sin\delta > \frac{1}{20}, \qquad \text{(prop. VIII)}$$

d'où les limites de $x = \frac{S}{L} = \frac{s}{l}$, indiquées par Archimède.

Mais le géomètre de Samos se contente parfois de limites moins étroites.

Ainsi son premier calcul (prop. V) a pour but de prouver que l'on peut négliger l'angle maximum ε sous lequel on voit du centre de la Terre l'arc α sur la surface de la Lune, α étant le rayon apparent de cet astre.

On a rigoureusement :

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}},$$

d'où si $\alpha = 1^\circ$, $\varepsilon = 1'\ 3''$.

L'inégalité que démontre Aristarque revient à

$$\varepsilon < \alpha\frac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}.$$

En employant la formule (7), soit $\alpha = \frac{\pi}{2m}$, $m = 90$, d'après ses hypothèses il eût pu conclure :

$$\frac{2\varepsilon}{\pi} < \frac{1}{m}\frac{5}{3m - 5} = \frac{1}{4770}, \qquad \text{soit } \varepsilon < 1'\ 8''.$$

Il se contente d'appliquer la formule (5), d'où

$$\frac{2\varepsilon}{\pi} < \frac{1}{m}\frac{2}{m - 2} = \frac{1}{3960}, \qquad \text{soit } \varepsilon < 1'\ 22''.$$

Il emploie encore (prop. XII) la formule (5) au lieu de (7) pour calculer avec (6) les limites de *sin* α :

$$\frac{1}{45} > \sin 1^\circ > \frac{1}{60}.$$

La formule (4) est employée (prop. XIII) pour calculer les limites de cos α.

$$1 > \cos 1^\circ > \frac{89}{90}.$$

Enfin de (4) on tire :

$$\cos^2 \frac{\pi}{2m} < \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2} < \frac{m-2}{m},$$

inégalité employée (prop. XIV) pour calculer les limites de $\cos^2 \alpha$.

$$1 > \cos^2 1^\circ > \frac{44}{45}.$$

Telles sont, en fait, les déterminations trigonométriques dont se sert Aristarque.

Il nous reste à exposer comment il arrive à calculer les limites de $\frac{s}{t}$, d'où celles de $\frac{s}{l} = x$ étant connues, on aura immédiatement celles de $\frac{t}{l}$.

Désignons en général par :

α, le rayon apparent géocentrique de la Lune,

β, le rayon apparent géocentrique du Soleil.

$\gamma = n\alpha$, le rayon apparent géocentrique du cercle d'ombre, intersection du cône d'ombre de la Terre par une sphère concentrique à celle-ci et passant par le cercle de vision de la Lune, c'est-à-dire ayant pour rayon L cos α.

Soit

$$x = \frac{S}{L} = \frac{1}{\sin \delta}. \quad \text{d'où} \quad \frac{s}{l} = x \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$y = \frac{s}{t}$ sera déterminé par une équation du second degré

$$\frac{1}{(y-1)^2}\left(x^2 - \frac{\cos^2\alpha \sin^2\gamma}{\sin^2\beta}\right) - \frac{2}{y-1}\left(x \cos\alpha \cos\gamma + \frac{\cos^2\alpha \sin^2\gamma}{\sin^2\beta}\right)$$
$$- \cos^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha \sin^2\gamma}{\sin^2\beta} = 0.$$

Aristarque évite naturellement d'arriver à une relation aussi compliquée. Il enferme y entre deux limites.

Soient : d le rayon du cercle d'ombre

c la distance du centre de la Lune au centre du cercle d'ombre au moment d'une éclipse, les centres des trois astres étant supposés en ligne droite.

Aristarque démontre en fait (prop. XVI) que :

$$\frac{l+s}{l+d} < y < \frac{(S+L-c)s}{(L-c)s+Sd\cos\beta}$$

ou

$$\frac{1+\frac{s}{l}}{1+\frac{d}{l}} < y < \frac{x+1-\frac{c}{L}}{1-\frac{c}{L}+x\frac{d}{s}\cos\beta}.$$

Or,

$$\frac{d}{l} = \frac{L\cos\alpha\sin\gamma}{L\sin\alpha} = \cot\alpha\sin\gamma,$$

et comme Aristarque suppose $\gamma = 2\alpha$, de même qu'il suppose $\alpha = \beta$,

$$\frac{s}{l} = x,$$

$$\frac{d}{l} = 2\cos^2\alpha, \qquad \text{(prop. XIV)}$$

$$\frac{xd}{s} = \frac{d}{l}.$$

Reste à déterminer $\frac{L}{c}$, ou plutôt une limite inférieure,

$$\frac{L}{c} = \frac{1}{1-\cos\alpha\cos\gamma} > \frac{1}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha(1-\cos\gamma)} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,\frac{1}{1+2\cos^2\alpha}$$

(prop. XV).

La limite inférieure d'après les déterminations précédentes, si $\alpha = \frac{\pi}{2m}$, sera égale à $\frac{m^2}{12}$.

Soient x_1, x_2, les limites supérieure et inférieure de x, on aura dès lors, en remplaçant les lignes trigonométriques pour leurs limites,

$$\frac{x_2+1}{3} < y < \frac{x_1+1-\frac{12}{m^2}}{1+2\frac{m-2}{m}\frac{m-1}{m}-\frac{12}{m^2}},$$

Soient enfin y_1, y_2, les limites supérieure et inférieure de y.

$$\frac{x_2}{y_1} < \frac{t}{l} < \frac{x_1}{y_2}.$$

Une remarque importante est à faire au sujet du calcul de y_1, Aristarque arrive à :

$$\frac{y_1}{y_1-1} = \frac{71\ 755\ 875}{61\ 735\ 500}$$

Il remplace sans plus par $\frac{43}{37}$ cette dernière valeur qui, réduite à sa plus simple expression, est $\frac{21261}{18292}$.

Il est difficile de ne pas voir dans $\frac{43}{37} = 1 + \frac{1}{6+\frac{1}{6}}$, la seconde réduite du développement de la valeur précédente en fraction continue. C'est une preuve importante de l'emploi, chez les anciens, d'un procédé de calcul dont la théorie appartient sans conteste aux modernes, mais dont les premières applications sont trop simples pour ne pas avoir une origine très reculée.

Il est incontestable que si l'on considère les calculs d'Aristarque, en faisant abstraction des erreurs dont les données se trouvent entachées, l'écart des limites est considérable, et que le degré d'approximation obtenu semble inférieur à celui que pourraient procurer des procédés graphiques. Il n'en est pas cependant tout à fait de même si l'on prend les moyennes entre les limites assignées. Au reste, pour permettre de juger la question, j'ai

réuni dans un tableau ci-après, les valeurs calculées pour les limites par Aristarque, les moyennes et les valeurs exactes correspondant à ses données. Dans ce tableau, j'ai négligé un certain nombre de déterminations auxiliaires faites par Aristarque et sans intérêt pour nous; mais j'ai refait les calculs suivant ses procédés les plus approchés en supposant $\alpha = 15'$, c'est-à-dire en attribuant au diamètre de la Lune la valeur qu'il lui reconnaissait en fait, d'après le témoignage d'Archimède.

On reconnaîtra immédiatement que pour $\frac{s}{t}$, et $\frac{t}{l}$ une des limites est identique dans les deux hypothèses; que pour l'autre limite la différence est peu sensible.

Enfin, pour une discussion qui terminera cette note, j'ai ajouté dans les deux hypothèses, $\alpha = 1°$ et $\alpha = 15'$, les résultats des calculs relatifs à l'évaluation de $\frac{L}{t}$, rapport du rayon de l'orbite lunaire au rayon de la terre. Ce rapport est égal à $\frac{1}{\sin \alpha . \frac{t}{l}}$ et découle en conséquence de deux rapports déterminés par Aristarque.

Hypothèse : $\alpha = 1°$, $m = 90°$.

	Limite supérieure.	Limite inférieure.	Valeur moyenne.	Valeur exacte.
$x = \frac{S}{L} = \frac{s}{l} = \frac{1}{\sin 3°}$	20	18	19	19,10682
$\frac{l}{L} = \sin \alpha$	$\frac{1}{45} = 0,02222$	$\frac{1}{60} = 0,01666$	0,01944	0,01745
$\cos \alpha$	1	$\frac{89}{90} = 0,98888$	0,99444	0,99985
$2 \cos^2 \alpha$	2	$\frac{88}{45} = 1.95555$	1,97777	1,99939
$\frac{L}{c} > \frac{m^2}{12}$	»	675	»	131350
$y = \frac{s}{t}$	$\frac{43}{6} = 7,16666$	$\frac{19}{3} = 6,33333$	6,75	6,70587
$\frac{t}{l}$	$\frac{60}{19} = 3,15789$	$\frac{108}{43} = 2,51163$	2,83474	2,84934
$\frac{L}{t}$	$\frac{215}{9} = 23,88888$	$\frac{57}{4} = 14,25$	19,06944	20,109

Hypothèse : $\alpha = 15'$, $m = 360$.

	Limite supérieure.	Limite inférieure.	Valeur moyenne.	Valeur exacte.
$\frac{l}{L} = \sin\alpha$	$\frac{1}{216} = 0{,}00463$	$\frac{1}{240} = 0{,}004166$	0,004398	0,004363
$\cos\alpha$	1	$\frac{359}{360} = 0{,}997222$	0,998611	0,999994
$2\cos^2\alpha$	2	$\frac{179}{90} = 1{,}988888$	1,994444	1,99996
$\frac{L}{c} > \frac{3m^2}{25}$	»	15552	»	2140024
$y = \frac{s}{t}$	$\frac{176}{25} = 7{,}04$	$\frac{19}{3} = 6{,}33333$	6,68666	6,70119
$\frac{t}{l}$	$\frac{60}{19} = 3{,}15789$	$\frac{225}{88} = 3{,}55682$	2,85736	2,85133
$\frac{L}{t}$	$\frac{1408}{15} = 93{,}86666$	$\frac{342}{5} = 68{,}4$	81,13333	80,3778

IV

La méthode exposée dans le traité d'Aristarque de Samos est la seule que les anciens aient jamais connue pour la détermination des distances et des dimensions du Soleil et de la Lune, et les seuls perfectionnements qu'elle ait reçus consistent dans ceux qu'amena la naissance de la trigonométrie et dans la détermination plus exacte du rapport n, c'est-à-dire de la valeur du rayon du cercle d'ombre.

Je n'ai pas à insister sur les conséquences d'un calcul des lignes trigonométriques plus exact que celui dont Aristarque était capable. Je remarquerai seulement qu'en supposant ces lignes déterminées rigoureusement, les limites entre lesquelles il enferme $y = \frac{s}{t}$ sont aussi voisines qu'on peut le désirer.

Quant à n, Hipparque le fixa à 2,5 au lieu de 2, et Ptolémée à 2,6, valeur réellement assez satisfaisante. Mais pour la détermination des autres données du problème, aucun progrès ne fut effectué.

Si la variation des diamètres apparents du Soleil et de la Lune fut reconnue ou admise comme conséquence de la théorie des

excentriques, leur égalité moyenne continua à être supposée au moins dans la pratique des calculs.

En outre de la détermination adoptée par Aristarque pour ce diamètre moyen, on en connaît deux autres de l'antiquité, l'une $\frac{1}{750}$ de la circonférence, soit 28′ 48″ admise pour le Soleil par Posidonius dans Cléomède, l'autre $\frac{1}{650}$, soit 33′ 14″ donnée par Hipparque pour la Lune. La valeur correspondant à la distance moyenne d'après les chiffres admis par Ptolémée pour l'apogée et le périgée de la Lune, 31′ 20″ et 35′ 20″ est de 33′ 12″8 à peine inférieure à celle d'Hipparque. L'antique détermination de $\frac{1}{720}$ de la circonférence était encore plus exacte, soit pour la Lune, soit pour la moyenne des deux astres.

Quant à la valeur de δ, complément de la distance angulaire du Soleil et de la Lune au moment de la dichotomie, il suffira de dire que Ptolémée prend comme rapport de la distance du Soleil à la distance moyenne de la Lune le nombre 20, limite supérieure d'Aristarque (1). C'est assez montrer que les anciens n'ont jamais possédé de moyen pratique pour mesurer cette distance angulaire, et que la méthode dont il s'agit n'a donc jamais eu de valeur réelle pour déterminer la distance et les dimensions du Soleil. Si elle a permis néanmoins de trouver pour la Lune les mêmes éléments avec une approximation remarquable, cela résulte de compensations dues au hasard, comme aussi de l'énormité de la distance solaire.

Il ne faut pas croire cependant qu'entre Aristarque et Ptolémée le rapport admis par le premier pour $\frac{S}{L} = \frac{1}{\sin \delta}$, ait été adopté sans

(1) Ptolémée admet que la distance de la Lune à son apogée est de $64\frac{1}{6}$ rayons terrestres, d'où pour la distance au périgée $56\frac{9}{10}$ et pour la distance moyenne $60\frac{1}{2}$. Il prend 1210 rayons terrestres pour la distance du Soleil. On sait que dans la théorie des excentriques, l'excentricité des orbites est double de celle de la théorie elliptique. C'est dire que les diamètres apparents donnés par Ptolémée sont certainement calculés et non observés.

conteste. Loin de là, chaque auteur paraît avoir son nombre à lui; mais toutes ces déterminations sont tellement divergentes qu'elles accusent bien plutôt le défaut d'observations sérieuses, qu'elles ne prouvent des tentatives restées en tout cas illusoires.

Nous allons, en remontant l'ordre des temps, passer en revue les déterminations qui nous sont parvenues; notre but sera surtout, au reste, de critiquer les renseignements souvent erronés ou contradictoires que l'on rencontre chez les auteurs anciens.

Au premier siècle avant l'ère chrétienne, Posidonius, au dire de Cléomède (1), admettait que la distance du Soleil était de 10,000 rayons terrestres. C'est probablement l'effort le plus audacieux qui ait été tenté chez les anciens vers la vérité; mais l'ignorance de l'opinion de Posidonius sur la distance de la Lune ne nous permet pas de tirer des conclusions plus précises, pas plus que du rapport 18 des diamètres du Soleil et de la Terre donné par un certain Sérapion (2), qui semble avoir été de la même époque.

Pour Hipparque, les données sont contradictoires; il aurait fixé ce dernier rapport, $\frac{s}{t}$, d'après Cléomède (3), à $\sqrt[3]{1050}$, soit $10\frac{1}{6}$, d'après Théon de Smyrne (4), à $\sqrt[3]{1880}$, soit $12\frac{1}{3}$. Comme nous connaissons la valeur qu'il attribuait à n (2,5 d'après Ptolémée), nous pouvons conclure, d'après la relation (1), suffisamment exacte pour tous ces calculs, qu'il donnait en tout cas à $\frac{t}{l}$ la valeur $3\frac{2}{5}$, comme plus tard l'auteur de l'Almageste. D'après celle qu'il admettait pour α, il devait donc conclure que la distance lunaire était d'environ 69 rayons terrestres. Quant à la distance

(1) Κλεομήδους κυκλικῆς θεωρίας μετεώρων βιβλία δύο. ed. Schmidt. Leipzig, 1832, p. 62.

(2) Cramer. Anecd. Par. I. 373.

(3) P. 65.

(4) *Liber de astronomiâ*, 39. D'après la même source, il aurait fixé $\frac{t}{l}$ à $\sqrt[3]{27} = 3$, ce qui ne concorde pas avec sa détermination de n.

du Soleil, il devait, suivant l'une ou l'autre des deux hypothèses relatives à $\frac{s}{t}$, la porter à 34 ou 42 rayons de l'orbite lunaire, en moyenne 38, c'est-à-dire au double d'Aristarque, ce qui fait supposer qu'il adoptait pour δ une valeur moitié moindre que celle fixée par le Samien.

D'après S. Hippolyte ([1]), Apollonius fixait à 500 myriades de stades la distance de la Terre à la Lune. Ce témoignage est précieux, en ce que par Apollonius on ne peut entendre ici que le géomètre de Perge, et qu'on rencontre ainsi une confirmation du récit de Ptolémée Héphestion (dans Photius, cod. CXC) qui le représente comme s'étant particulièrement occupé de la théorie de la Lune.

Mais le nombre donné est absurde. Apollonius devait certainement partir de la mesure de la Terre par Eratosthène, en myriades de stades 25,2 pour la circonférence, 4,009 pour le rayon. Le nombre donné par S. Hippolyte conduirait à :

$$\frac{L}{t} = 125;$$

après le travail d'Aristarque, Apollonius ne pouvait certainement pas commettre une erreur aussi grossière.

Si l'on admettait que l'apologiste chrétien du IIIe siècle après J.-C. s'est trompé en copiant les sources, et qu'il a pris le diamètre de l'orbite lunaire pour son rayon, Apollonius se serait au contraire approché davantage de la vérité que ne l'a fait Hipparque, et cela grâce évidemment à une détermination satisfaisante du rapport n.

Quant à Eratosthène, les données sont également erronées. D'après le Pseudo-Plutarque *De placitis philosophorum*, II, 31, il aurait admis en myriades de stades :

$$L = 78$$
$$S = 80400 \quad \text{ou} \quad S = 408,$$

([1]) *S. Hippolyti refutationis omnium hæresium librorum decem quæ supersunt*, ed. Duncker. Gœttingue, 1859, IV, 8, p. 66.

suivant deux leçons également erronées; car aucun de ces trois nombres ne peut être admis.

Le premier, de même que le troisième, est évidemment beaucoup trop faible. On peut essayer de le corriger en admettant que le compilateur qui donne le nombre en toutes lettres l'a copié sur un manuscrit où il se trouvait en chiffres grecs et qu'il a omis le premier chiffre, un σ, en le confondant avec la finale du mot précédent μυριάδας (¹)

Il faudrait donc lire :

$$L = 278.$$

Quant à la valeur de S, il faut désespérer de la corriger ainsi. Le plus grand nombre est remarquable en ce qu'il correspond à 20100 rayons terrestres. Mais il doit être rejeté parce que nous savons par Macrobe que Posidonius considérait le Soleil comme beaucoup plus éloigné que ne l'avait fait Eratosthène. D'ailleurs il est très probable que le chiffre correspondant à 8 doit en réalité être placé après celui correspondant à 4, et celui-ci, υ en grec, a pu provenir d'une confusion avec l'indice de myriade écrit en abrégé.

Il est donc préférable d'admettre la donnée de Macrobe d'après laquelle Eratosthène aurait attribué la valeur 27 au rapport $\frac{s}{t}$ des diamètres du Soleil et de la Terre.

Il s'ensuivrait, en admettant qu'il eût conservé la valeur du diamètre apparent adoptée par Aristarque, et qu'il se servît de l'approximation $\pi = \frac{22}{7}$ d'Archimède, que pour S il devait arriver environ à

$$S = 6185\,t = 24800 \text{ myriades de stades.}$$

D'autre part, dans notre hypothèse, il avait :

$$\frac{L}{t} = 69\,\frac{1}{2},$$

(¹) Une erreur semblable se trouve, par exemple, dans le scholie d'Aristarque, p. 102, qui rapporte les déterminations de Ptolémée. La distance du centre de la terre au sommet du cône d'ombre est fixée à 68 rayons terrestres. Il faut lire 268.

d'où

$$\frac{S}{L} = 89.$$

On peut en conclure qu'il admettait pour n une valeur de 2,3 environ et pour δ, $\frac{5}{8}$ de degré, tandis qu'Hipparque, pour ce dernier angle, se serait rapproché à tort d'Aristarque.

S. Hippolyte, dans le passage que nous avons déjà cité, attribue à Archimède une série de nombres complexes qui sont supposés représenter la distance à la Terre des sept planètes et du ciel des fixes ainsi que les différences successives de ces distances. On considère sans plus comme erronée la tradition qui donne ces nombres au géomètre de Syracuse, quoique Macrobe confirme l'existence de cette tradition. Il est certain qu'à première vue, on ne peut voir dans ces nombres qu'une fantaisie arithmétique. Malheureusement, ils sont trop corrompus pour qu'on puisse deviner le but de cette fantaisie, et le désaccord presque absolu qu'offrent les relations qui devraient les contrôler, ne permet pas de les restituer avec assurance. Autant qu'on peut le voir cependant, ils paraissent à peu près tous devoir rentrer dans une forme telle que :

$$ma + nb$$

où m et n seraient des nombres entiers relativement simples avec

$$a = 5000000 \text{ stades}$$
$$b = 272065$$

J'incline à penser que l'un de ces nombres, par exemple la distance de la Terre à la Lune, ayant été déterminé d'après des hypothèses qui nous sont inconnues (1) par un calculateur postérieur à Archimède, les autres auront été déduits des indications données par le Syracusain dans son ouvrage περὶ τῆς σφαιροποιΐας

(1) Cette distance est fixée à 5544130 stades. Je remarque seulement que si l'on admet ici la même erreur de S. Hippolyte que pour Apollonius, la moitié de ce nombre est très voisine de celui que j'ai attribué à Eratosthène.

où il décrivait un instrument construit par lui pour représenter les mouvements des astres. En tout cas, il est évident qu'aucun de ces nombres n'a de valeur astronomique.

Enfin S. Hippolyte donne aussi la distance de la Terre à la Lune suivant Aristarque de Samos. Le nombre paraît devoir se lire en myriades de stades 105,8 ou peut-être 118 (¹).

Ce qu'il y a de certain c'est qu'il ne peut appartenir à Aristarque lui-même. Ce dernier admettait certainement une valeur du rayon terrestre supérieure à celle d'Eratosthène. Mais en prenant seulement cette dernière valeur, soit 4 myriades de stades, dans son hypothèse $\alpha = 15'$, Aristarque avait fixé les limites de L à environ :

$$376 > L > 273.$$

Il est donc très probable que le nombre donné par S. Hippolyte a été déduit du traité d'Aristarque, c'est-à-dire de la fausse hypothèse $\alpha = 1°$, par quelque calculateur postérieur au Samien. Ce nombre n'aurait donc d'intérêt que s'il permettait de conclure à une mesure de la Terre antérieure à Eratosthène; mais il est à supposer plutôt que le calculateur anonyme aura au contraire adopté cette dernière mesure. Dans ce cas, les limites que nous avons déduites du traité d'Aristarque l'auraient conduit en myriades de stades, soit à $95 = \overline{ϙ\varepsilon}$, soit à 57 dont le double (en supposant commise encore la même erreur que pour Apollonius), est $114 = \overline{\rho\iota\delta}$. Dans les deux cas, le nombre de S. Hippolyte devrait subir une correction. Mais il serait certainement trop audacieux d'en proposer une.

(¹) Le texte imprimé porte $\overset{\rho\varepsilon\bar{\eta}}{\overset{\eta}{\mu}}$. L'$\eta$ immédiatement au-dessus du μ doit représenter l'indice υ dans l'abréviation de myriades. Il semble que l'autre $\bar{\eta}$ doit appartenir au nombre des myriades; il représente les unités 8. Alors $\varepsilon = 5$ ne peut subsister. On peut le remplacer par exemple par $\iota = 10$. Ou bien il faut laisser ε, et écrire $\bar{\eta} = 8000$ (stades) sur la même ligne que le μ.

Les deux nombres précédents dans S. Hippolyte qui représentent le diamètre et la circonférence de la Terre d'après Eratosthène sont également erronés. Il faut lire 80180 stades et 252000. Les corrections se justifient d'elles-mêmes.

Je résumerai comme suit les principales conclusions de cette étude :

1° Les anciens n'ont connu pour la détermination des distances du Soleil et de la Lune qu'une seule méthode, dont l'invention doit être attribuée à Eudoxe, qui fut le véritable fondateur de l'astronomie théorique.

2° Cette méthode supposait la détermination de deux éléments dont l'un, le diamètre du cercle d'ombre de la Terre, peut être fixé avec assez de précision par l'observation des éclipses lunaires, mais dont l'autre, la distance angulaire du Soleil et de la Lune au moment de la dichotomie, ne put jamais être mesuré en réalité avec quelque semblant d'approximation.

3° Comme calcul, cette méthode était de fait très simple, si l'on se contentait d'une approximation en rapport avec l'incertitude des données. Le rôle d'Aristarque fut de lui donner une rigueur géométrique, mais le défaut de la trigonométrie l'obligea à exagérer les limites des erreurs provenant du calcul.

4° Pour déterminer les dimensions des deux astres par rapport à la Terre, il fallait de plus connaître leur diamètre apparent et le rapport de la circonférence au diamètre. Avant Archimède, les Grecs savaient seulement que ce rapport était compris entre 3 et $3\frac{1}{3}$.

5° Du vice irrémédiable de la méthode, il s'ensuivit que la distance et les dimensions du Soleil furent toujours calculées d'une façon absolument erronée, tandis que pour la Lune ces éléments purent être déterminés avec une approximation de plus en plus satisfaisante.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LE DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES

DEPUIS LES TEMPS LES PLUS RECULÉS JUSQU'AU XV[e] SIÈCLE

DISCOURS LU A LA SÉANCE PUBLIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE KIEF
LE 9 JANVIER 1882 (1)

Par M. le Prof. VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO

MESDAMES ET MESSIEURS,

Dans l'esquisse que j'ai l'honneur de vous présenter aujourd'hui, je me suis proposé d'attirer votre attention bienveillante sur le caractère du développement, chez tous les peuples de l'Ancien Monde et du Nouveau, de la science qui sert de fondement à toutes celles qui ont pour objet l'étude de la nature dans toutes ses manifestations. Toutes les branches réunies de cette science s'appellent « les mathématiques ». Bien des sciences y puisent des données pour leur développement, d'autres encore tendent à la possibilité de faire leur profit de ces mêmes données. — Celles-là, telles que la mécanique, l'astronomie et la physique, ont reçu un grand développement; les autres, telles que la chimie, quoique parvenues à un perfectionnement considérable, ne se fondent que sur l'empirisme et ne peuvent déduire par une logique sévère les vérités les plus compliquées des vérités les plus simples. Une science où tout est fondé sur l'observation et l'expérimentation, une science qui ne s'appuie point sur des faits ou du moins sur des hypothèses qui puissent être soumises à l'analyse mathématique, ne sera toujours qu'un ensemble de faits présentés souvent sans aucune conséquence logique qui, si elle existe quelquefois, n'en est pas moins souvent transformée arbitrairement au gré des

---

(1) Ce discours pourrait servir d'introduction à « *Histoire de la Géométrie chez tous les peuples* », ouvrage qui doit paraître prochainement.

savants. De nos jours, la philosophie même tâche à s'appuyer sur les vérités mathématiques; mais là où les expériences ne peuvent se répéter à volonté et à l'infini, là où une observation régulière et uniforme ne peut être instituée, là où l'imagination du savant joue le rôle le plus important, — la science est privée d'un point d'appui solide pour l'application de l'analyse mathématique.

Quelle est donc cette science des mathématiques? quelle en est l'essence? pourquoi elle seule mérite-t-elle le nom de science dans toute la signification de ce mot? chez quel peuple a-t-elle pris naissance? à quel autre a-t-elle été transmise, et enfin quelle est sa propriété particulière et le développement qu'elle a reçu? — Voilà des questions auxquelles nous tâcherons de répondre autant que nous le permettent nos connaissances ainsi que nos recherches.

L'homme aspire à connaître l'essence des choses et les lois qui gouvernent l'univers. Comme premiers éléments de cette connaissance se présentent à notre esprit l'espace, le temps, le mouvement. Quelle signification ont ces termes en eux-mêmes? selon toute probabilité, nous ne le saurons jamais, mais quant aux lois qui régissent ces trois conceptions, elles ont été étudiées jusque dans leurs moindres détails : l'espace, l'étendue — voilà l'objet des mathématiques; le mouvement dans l'espace, ainsi que le temps — voilà l'objet de la mécanique. Ces deux sciences jouissent de la même propriété : d'un petit nombre de simples vérités connues et à la portée de chacun, obtenues par voie d'expérience et d'observations, se déduisent par un procès de logique sévère, les propriétés les plus compliquées des nombres, de l'étendue et du mouvement. Ces vérités simples s'appellent « Notions générales ou axiomes ».

Les mathématiques se divisent en deux branches, savoir : la science des nombres et celle de l'étendue; la première est connue sous le nom d'Arithmétique universelle, la seconde sous celui de Géométrie.

Si dans un sens tout scientifique il n'y a que les mathématiques et la mécanique qui méritent le nom de science, c'est que

l'opinion personnelle n'y est pour rien, et que chaque vérité découle nécessairement de celles qui la précèdent.

Les vérités mathématiques, ainsi que celles de la mécanique, appliquées à l'étude des phénomènes de la nature qui nous entoure et de ceux que nous présentent les corps célestes inaccessibles pour nous, ont amené à des découvertes devant lesquelles s'inclinent involontairement même ceux qui traitent les mathématiques de science sèche et ennuyeuse. La fausseté de cette idée est évidente pour quiconque réfléchit que cette science sèche et ennuyeuse a fixé les lois du mouvement des corps célestes, les lois de la lumière, de la chaleur, de l'électricité; ensemble avec la mécanique, l'astronomie et la physique, cette science a rendu possible l'application de ces lois aux besoins de la vie sociale sous la forme de machines à vapeur, de télégraphes, de photographie, de téléphones, de phonographes, d'éclairage électrique et d'autres merveilles de notre temps. Les mathématiques habituent notre esprit à se proposer toujours les questions « pourquoi et comment? » et à chercher les réponses à ces questions. Elles nous habituent à donner toute notre attention aux phénomènes les plus insignifiants, les plus ordinaires en apparence et à en chercher l'explication. Archimède, prenant un bain, remarque la diminution du poids de son corps et découvre la loi connue sous son nom. Watt observe le soulèvement d'un couvercle par la vapeur, et nous avons les machines à vapeur. Newton observe la chute d'une pomme d'un arbre, et il en déduit les lois de l'attraction universelle. L'esprit ordinaire a continuellement remarqué ces mêmes phénomènes, mais pour lui ce n'était que des faits, des phénomènes de la nature, pendant que l'esprit mathématique, habitué à tout analyser, à chercher la raison de toute chose, le premier y tourna son attention et s'efforça de s'en rendre raison.

Aujourd'hui je désire attirer votre attention bienveillante sur une courte esquisse historique du développement des sciences mathématiques depuis leurs premiers germes jusqu'à l'époque de la renaissance des sciences, c'est-à-dire jusqu'au xve siècle de notre ère.

Les premiers pas de l'humanité dans l'empire des sciences exactes, ainsi que dans celui de toutes les sciences en général, selon toute probabilité, resteront pour nous toujours une énigme inexplicable, à défaut de toute source qui puisse nous montrer comment l'esprit humain a passé des vérités les plus élémentaires aux vérités moins évidentes.

L'examen du petit nombre de monuments écrits parvenus jusqu'à nous des peuples de l'Ancien Monde nous fait voir que beaucoup de découvertes et d'inventions qui font la gloire, l'orgueil de notre siècle, étaient connues des anciens, mais se sont perdues sans laisser de traces à la suite de différents accidents ou de circonstances défavorables. Ainsi nos connaissances du développement des sciences mathématiques sont bien bornées faute de matériaux suffisants. Il n'a pas existé d'ouvrages spéciaux, ou s'il en a existé, ils ne sont pas parvenus jusqu'à nous, et ce ne sont que les ouvrages didactiques qui nous fournissent de rares indications. Un phénomène pareil s'est reproduit en des temps comparativement modernes, par exemple, à l'époque des croisades : les traces des connaissances mathématiques à cette époque ne se trouvent que dans les chansons des troubadours du midi de la France. Il faut donc que nos études embrassent tout ce qui nous a été conservé des monuments de l'antiquité pour nous donner une idée du développement historique des sciences mathématiques. Nous pouvons fournir des preuves irrécusables de cette assertion. Ce n'est pas dans les ouvrages spéciaux de physique que nous rencontrons les premiers essais de l'application de la force élastique de la vapeur, mais bien dans les idoles des anciens Germains, découvertes de nos jours. Ce ne sont pas les traités spéciaux d'histoire naturelle, mais bien les médailles du temps des empereurs romains, qui nous informent de l'existence d'alors du rhinocéros bicorne. Ce ne sont ni les traités de Géographie, ni les rapports des navigateurs, mais bien des légendes et des inscriptions sur des rochers, non déchiffrées durant des siècles, qui nous apprennent que les Normands visitaient l'Amérique bien longtemps avant Christophe Colomb. Bien des perfec-

tionnements, comparativement modernes, qui eurent une influence incalculable sur la vie sociale et domestique des peuples, étaient connus dans l'antiquité la plus reculée. Nous savons, par exemple, que les machines à couper le blé, introduites de nos jours seulement dans l'économie rurale de l'Occident, étaient déjà connues des Gaulois au temps de la domination romaine. A quel degré les anciens ont été nos maîtres sous beaucoup de rapports, nous le voyons par la manière de dessécher les marais employée par les Romains, manière préférable de beaucoup à toutes celles dont on se sert de nos jours. Beaucoup de ce qui excite encore maintenant notre admiration, comme par exemple les ponts suspendus, était connu il y a bien longtemps. Déjà au ve siècle de notre ère de pareils ponts existaient au Thibet. Pour juger à quel point la vie pratique et sociale était développée chez quelques peuples, remarquons qu'en Chine, par exemple, il existait aux premiers siècles de notre ère des postes bien organisées, des passeports, des registres domiciliaires, des assignats; qu'on y recueillait régulièrement des données statistiques et qu'on y donnait les plus grands soins à l'entretien des voies de communication. L'érection d'immenses monuments et de constructions colossales fait nécessairement présupposer une connaissance profonde des éléments fondamentaux des sciences mathématiques. Est-ce que l'absence de monuments écrits qui auraient pu nous renseigner sur les connaissances mathématiques des Étrusques, des anciens habitants du Pérou et du Mexique, nous donne le droit de prétendre que les sciences exactes aient été tout à fait inconnues à ces peuples? On peut hardiment assurer le contraire et dire que l'empreinte du temps ne s'efface jamais sans laisser de traces. Comment nous étonnerons-nous de l'absence de monuments écrits de tel ou tel peuple, sachant que presque tous les ouvrages du célèbre Léonard de Vinci sont perdus pour nous sans retour; que plusieurs traités du grand Galilée ont été retrouvés au dernier siècle, grâce seulement à un heureux hasard, dans la boutique d'un charcutier; que plusieurs ouvrages de Tartaglia, de Fermat et de tant d'autres, quoique imprimés, ne nous sont connus que

par leurs titres? Les auteurs de ces ouvrages étaient du nombre des mathématiciens les plus célèbres et eurent quantité de disciples. Il est à regretter qu'on ne s'adonne pas encore assez à l'étude des monuments écrits de l'antiquité qui sont parvenus jusqu'à nous. C'est en les étudiant qu'on a trouvé que les Chinois, bien longtemps avant Galilée, connaissaient l'existence des satellites de Jupiter; au VIe siècle, 600 ans avant Tycho Brahe, l'astronome arabe Aboul-Wéfa observait déjà l'irrégularité dans les mouvements de la Lune, connue sous le nom de « variation »; beaucoup des investigations les plus délicates d'Euler sur la théorie des nombres étaient connues des Hindous plusieurs siècles auparavant. Dans l'étude des ouvrages des anciens, il est indispensable de prêter une attention particulière à la méthode et aux artifices employés par eux. Il importe de se familiariser avec ces méthodes qui nous montrent souvent la voie que l'auteur a suivie; il ne suffit pas de connaître les démonstrations de certains théorèmes donnés par Gauss ou par Lagrange, il est nécessaire d'étudier, si possibilité il y a, les différents essais faits avant eux. Nier la nécessité d'étudier le développement historique de beaucoup de questions mathématiques, c'est vouloir étudier des insectes seulement sous la forme de brillants papillons, n'accordant aucune attention à leurs métamorphoses sous la forme de chrysalides, de vers et de larves.

Dans l'histoire du développement intellectuel de tout peuple, on peut observer à différentes époques une direction déterminée dans les arts, dans la religion, dans l'organisation politique, etc. C'est tout le contraire que nous voyons dans l'histoire de la science; on y aperçoit toujours un lien constant, quelque chose de complet où tout ce qui suit dépend souvent entièrement de ce qui a précédé. La somme des connaissances acquises et des diverses vérités mathématiques a toujours été un héritage qui, allant toujours en augmentant passe d'un peuple à un autre. Il n'y a pas de doute que les mathématiques reçurent leur développement primitif là où apparurent les premières sociétés, les premiers États jouissant d'une organisation régulière. D'après

l'opinion actuellement reçue, ces États étaient l'Assyrie et Babylone. De là probablement les sciences mathématiques pénétrèrent en Égypte, et puis dans l'Inde et dans la Grèce. Ce fut des Indous et des Grecs qu'elles passèrent chez les Arabes, qui les portèrent à un haut degré de perfection. Avec la chute de l'immense empire arabe commence la décadence des sciences, qui dès lors commencent à renaître dans l'Occident où elles atteignent un développement considérable grâce à l'héritage que lui avaient légué les Arabes. A commencer du XIII[e] siècle se forme en Italie une école célèbre de mathématiciens dont les représentants Fibonacci, Pacioli, Léonard de Vinci, Ferro, Tartaglia, Cardan, Galilée, Torricelli et beaucoup d'autres encore se sont immortalisés par leurs découvertes, et par des perfectionnements dans l'empire des sciences exactes. Puis, avec le temps, les sciences mathématiques se répandent de l'Italie dans toute l'Europe, grâce aux jeunes gens avides de s'instruire, accourus de presque tous les pays de l'Europe pour étudier dans les universités italiennes.

Suivons maintenant la marche progressive des mathématiques chez les différents peuples de l'antiquité et commençons par le peuple le plus ancien — les Chaldéens.

Pendant longtemps l'Égypte fut regardée comme l'état le plus ancien et comme le berceau des sciences; mais la découverte des ruines de Ninive en 1843 et les fouilles entreprises en ces lieux ont prouvé que les premiers États parvenus à un haut degré de culture et de puissance prirent naissance dans les pays arrosés par le Tigre et l'Euphrate et connus sous le nom de Mésopotamie. Cette découverte est confirmée par le récit biblique de l'apparition des premiers hommes dans ces contrées. Les fouilles entreprises par Layard de 1849 à 1851 sur l'emplacement de l'ancienne Ninive eurent pour résultats la découverte du palais de Sardanapale régnant au VII[e] siècle avant Jésus-Christ. Une des salles contenait toute une bibliothèque consistant en petites plaques en argile cuite, couvertes de caractères cunéiformes fins et serrés. Ces tablettes furent transportées au Musée britannique et déchiffrées par les assyriologues renommés Smith et Cox. Elles

contenaient des fragments d'ouvrages de grammaire, de mythologie, d'histoire naturelle, d'astrologie, d'astronomie et d'arithmétique. Les recherches ultérieures des savants démontrent que ces fragments sont des traductions de la langue accadienne, langue morte déjà au XVIIe siècle avant Jésus-Christ. Nous y rencontrons des noms de personnes et de villes qui nous sont connues par le récit biblique, confirmant ainsi son authenticité. Selon Bérose, prêtre chaldéen, vivant au IIIe siècle avant Jésus-Christ à Pantibiblos, c'est-à-dire la ville des livres, connue aussi sous les noms d'Agané et de Sipara, le Noé chaldéen, Xissouthre, enfouit ces livres au temps du déluge. Et, en effet, nous apprenons que dans l'ancienne Chaldée il existait des bibliothèques régulièrement organisées, dont la plus ancienne se trouvait à Senkeré, le Lars d'aujourd'hui. Outre celles-ci, il en existait encore d'autres à Oura, capitale de la première monarchie chaldéenne, à Erek, à Kouta, à Agané. Cette dernière était la plus considérable; on prétend qu'elle fut fondée par Sargon Ier au XVIIe siècle avant Jésus-Christ. On composa pour cette bibliothèque un ouvrage volumineux en 72 livres, contenant des traités d'astronomie et d'astrologie, ouvrage traduit dans la suite en grec par Bérose. Parmi tous ces ouvrages il ne se trouve pas un seul traité systématique d'arithmétique ou de géométrie; néanmoins, à tout prendre, il est permis de conclure d'après toutes ces trouvailles que les sciences mathématiques ont eu un grand développement dans l'Assyrie et à Babylone déjà plusieurs dizaines de siècles avant Jésus-Christ. Cette conclusion est fondée sur le système de numération des Chaldéens, sur celui de leurs mesures, ainsi que sur leurs observations astronomiques. La base de la numération chaldéenne était le nombre 60, comme chez nous le nombre 10. Ce nombre 60 avait le nom de Sos, 600 celui de Ner, et 3600 celui de Sara; ces termes correspondent à nos dizaines, douzaines, etc. — Les Chaldéens sont censés avoir pris le nombre 60 pour base de leur numération puisque chez eux le jour était divisé en 60 parties égales. Le système des mesures était fondé sur des principes tout scientifiques, pareils à ceux qui, au siècle

dernier, furent pris pour base du système métrique. Le rayon apparent du soleil à son lever et à son coucher fut pris pour unité de mesure de longueur et portait le nom de Lokot-amat. De cette unité de mesure se déduisaient toutes les mesures de superficie, de capacité, ainsi que de poids : 300 lokots faisaient un stade; le lokot était divisé en 60 lignes, ou ourbanes; 36 lignes faisaient un pied. Le poids d'un pied cube d'eau était égal à un talent. Le temps que prenait un talent d'eau à découler fut pris pour une heure double, pendant laquelle un homme parcourait 30 stades. L'heure des Chaldéens se divisait en minutes, secondes et tierces. Dans la suite, les mesures de poids et de superficie furent empruntées aux Chaldéens par les Hébreux, les Phéniciens, les Grecs et d'autres peuples encore. Nous voyons par ce qui précède que les Chaldéens déduisaient de l'unité de mesure de longueur prise dans la nature toutes les mesures de superficie, de capacité, du poids et du temps. Pour concevoir l'idée de l'unité et de la stabilité des mesures, il faut avoir atteint un haut degré de développement scientifique; ne nous glorifions donc pas tant de notre haute civilisation, creusons plutôt dans les ruines que l'antiquité nous a léguées, et nous trouverons que beaucoup de ce qui fait notre orgueil aujourd'hui a déjà existé, a déjà été connu bien longtemps avant nous. Nous voyons par les fragments de littérature mathématique arrivés jusqu'à nous, que les Chaldéens savaient résoudre certaines équations du premier degré à deux inconnues, et que les progressions arithmétiques et géométriques ne leur étaient pas étrangères. Pour les calculs astronomiques ils composèrent des tables connues sous le nom de « tables des carrés et des cubes des nombres » ; ces tables ont été retrouvées à Senkeré. Rawlinson, Lepsius et Lenormand se donnèrent beaucoup de peine à les expliquer. D'après l'opinion de ce dernier ces tables furent composées plus de 4500 ans avant Jésus-Christ, et datent du règne d'un des premiers rois de la Chaldée, nommé Uchrane, selon l'opinion d'Oppert.

Nous avons vu plus haut qu'on avait composé pour la bibliothèque de Senkera un immense ouvrage astronomique dont la

Je résumerai comme suit les principales conclusions de cette étude :

1° Les anciens n'ont connu pour la détermination des distances du Soleil et de la Lune qu'une seule méthode, dont l'invention doit être attribuée à Eudoxe, qui fut le véritable fondateur de l'astronomie théorique.

2° Cette méthode supposait la détermination de deux éléments dont l'un, le diamètre du cercle d'ombre de la Terre, peut être fixé avec assez de précision par l'observation des éclipses lunaires, mais dont l'autre, la distance angulaire du Soleil et de la Lune au moment de la dichotomie, ne put jamais être mesuré en réalité avec quelque semblant d'approximation.

3° Comme calcul, cette méthode était de fait très simple, si l'on se contentait d'une approximation en rapport avec l'incertitude des données. Le rôle d'Aristarque fut de lui donner une rigueur géométrique, mais le défaut de la trigonométrie l'obligea à exagérer les limites des erreurs provenant du calcul.

4° Pour déterminer les dimensions des deux astres par rapport à la Terre, il fallait de plus connaître leur diamètre apparent et le rapport de la circonférence au diamètre. Avant Archimède, les Grecs savaient seulement que ce rapport était compris entre 3 et $3\frac{1}{3}$.

5° Du vice irrémédiable de la méthode, il s'ensuivit que la distance et les dimensions du Soleil furent toujours calculées d'une façon absolument erronée, tandis que pour la Lune ces éléments purent être déterminés avec une approximation de plus en plus satisfaisante.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LE DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES

DEPUIS LES TEMPS LES PLUS RECULÉS JUSQU'AU XVe SIÈCLE

DISCOURS LU A LA SÉANCE PUBLIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE KIEF LE 9 JANVIER 1882 [1]

Par M. le Prof. VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO

Mesdames et Messieurs,

Dans l'esquisse que j'ai l'honneur de vous présenter aujourd'hui, je me suis proposé d'attirer votre attention bienveillante sur le caractère du développement, chez tous les peuples de l'Ancien Monde et du Nouveau, de la science qui sert de fondement à toutes celles qui ont pour objet l'étude de la nature dans toutes ses manifestations. Toutes les branches réunies de cette science s'appellent « les mathématiques ». Bien des sciences y puisent des données pour leur développement, d'autres encore tendent à la possibilité de faire leur profit de ces mêmes données. — Celles-là, telles que la mécanique, l'astronomie et la physique, ont reçu un grand développement; les autres, telles que la chimie, quoique parvenues à un perfectionnement considérable, ne se fondent que sur l'empirisme et ne peuvent déduire par une logique sévère les vérités les plus compliquées des vérités les plus simples. Une science où tout est fondé sur l'observation et l'expérimentation, une science qui ne s'appuie point sur des faits ou du moins sur des hypothèses qui puissent être soumises à l'analyse mathématique, ne sera toujours qu'un ensemble de faits présentés souvent sans aucune conséquence logique qui, si elle existe quelquefois, n'en est pas moins souvent transformée arbitrairement au gré des

---

[1] Ce discours pourrait servir d'introduction à « *Histoire de la Géométrie chez tous les peuples* », ouvrage qui doit paraître prochainement.

savants. De nos jours, la philosophie même tâche à s'appuyer sur les vérités mathématiques; mais là où les expériences ne peuvent se répéter à volonté et à l'infini, là où une observation régulière et uniforme ne peut être instituée, là où l'imagination du savant joue le rôle le plus important, — la science est privée d'un point d'appui solide pour l'application de l'analyse mathématique.

Quelle est donc cette science des mathématiques? quelle en est l'essence? pourquoi elle seule mérite-t-elle le nom de science dans toute la signification de ce mot? chez quel peuple a-t-elle pris naissance? à quel autre a-t-elle été transmise, et enfin quelle est sa propriété particulière et le développement qu'elle a reçu? — Voilà des questions auxquelles nous tâcherons de répondre autant que nous le permettent nos connaissances ainsi que nos recherches.

L'homme aspire à connaître l'essence des choses et les lois qui gouvernent l'univers. Comme premiers éléments de cette connaissance se présentent à notre esprit l'espace, le temps, le mouvement. Quelle signification ont ces termes en eux-mêmes? selon toute probabilité, nous ne le saurons jamais, mais quant aux lois qui régissent ces trois conceptions, elles ont été étudiées jusque dans leurs moindres détails : l'espace, l'étendue — voilà l'objet des mathématiques; le mouvement dans l'espace, ainsi que le temps — voilà l'objet de la mécanique. Ces deux sciences jouissent de la même propriété : d'un petit nombre de simples vérités connues et à la portée de chacun, obtenues par voie d'expérience et d'observations, se déduisent par un procès de logique sévère, les propriétés les plus compliquées des nombres, de l'étendue et du mouvement. Ces vérités simples s'appellent « Notions générales ou axiomes ».

Les mathématiques se divisent en deux branches, savoir : la science des nombres et celle de l'étendue; la première est connue sous le nom d'Arithmétique universelle, la seconde sous celui de Géométrie.

Si dans un sens tout scientifique il n'y a que les mathématiques et la mécanique qui méritent le nom de science, c'est que

l'opinion personnelle n'y est pour rien, et que chaque vérité découle nécessairement de celles qui la précèdent.

Les vérités mathématiques, ainsi que celles de la mécanique, appliquées à l'étude des phénomènes de la nature qui nous entoure et de ceux que nous présentent les corps célestes inaccessibles pour nous, ont amené à des découvertes devant lesquelles s'inclinent involontairement même ceux qui traitent les mathématiques de science sèche et ennuyeuse. La fausseté de cette idée est évidente pour quiconque réfléchit que cette science sèche et ennuyeuse a fixé les lois du mouvement des corps célestes, les lois de la lumière, de la chaleur, de l'électricité; ensemble avec la mécanique, l'astronomie et la physique, cette science a rendu possible l'application de ces lois aux besoins de la vie sociale sous la forme de machines à vapeur, de télégraphes, de photographie, de téléphones, de phonographes, d'éclairage électrique et d'autres merveilles de notre temps. Les mathématiques habituent notre esprit à se proposer toujours les questions « pourquoi et comment? » et à chercher les réponses à ces questions. Elles nous habituent à donner toute notre attention aux phénomènes les plus insignifiants, les plus ordinaires en apparence et à en chercher l'explication. Archimède, prenant un bain, remarque la diminution du poids de son corps et découvre la loi connue sous son nom. Watt observe le soulèvement d'un couvercle par la vapeur, et nous avons les machines à vapeur. Newton observe la chute d'une pomme d'un arbre, et il en déduit les lois de l'attraction universelle. L'esprit ordinaire a continuellement remarqué ces mêmes phénomènes, mais pour lui ce n'était que des faits, des phénomènes de la nature, pendant que l'esprit mathématique, habitué à tout analyser, à chercher la raison de toute chose, le premier y tourna son attention et s'efforça de s'en rendre raison.

Aujourd'hui je désire attirer votre attention bienveillante sur une courte esquisse historique du développement des sciences mathématiques depuis leurs premiers germes jusqu'à l'époque de la renaissance des sciences, c'est-à-dire jusqu'au XV[e] siècle de notre ère.

savoir : le papyrus mathématique de Rhind et les inscriptions hiéroglyphiques sur les murs du temple de Horus à Edfou. Le papyrus de Rhind reçut son nom d'après le voyageur anglais Rhind qui l'acheta pendant son séjour en Égypte; il se trouve aujourd'hui au Musée Britannique. Il est écrit en caractères hiératiques, et appartient par conséquent à une période où les hiéroglyphes avaient déjà perdu de leur forme primitive. Son contenu nous montre clairement que ce n'est qu'une copie d'un écrit plus ancien. Il est dit au commencement qu'il a été écrit dans la 33e année du règne du roi Ra-a-us qui vécut entre le XXIIIe et le XXIIe siècle avant Jésus-Christ. Ce papyrus n'a été déchiffré que dans ces derniers temps par le professeur de l'université de Heidelberg, Auguste Eisenlohr, qui, après trois ans d'un travail assidu, a vu enfin ses efforts couronnés de succès.

Le papyrus de Rhind n'est point un ouvrage spécial destiné à l'étude des mathématiques; c'est plutôt un recueil de règles pratiques pour la solution de différentes questions qui se présentent dans la vie de tous les jours; il y a même lieu de penser qu'il a été destiné à l'usage des habitants de la campagne. Voici son titre : *Manières à l'aide desquelles on peut parvenir à connaître toutes les choses obscures, toutes les propriétés secrètes des objets.* Quant à la matière contenue dans ce papyrus, elle est traitée en cinq chapitres : l'arithmétique, la mesure des aires des triangles et du cercle, la mesure des volumes, la mesure des pyramides et un recueil de règles à l'usage de la vie pratique. Dans la partie qui traite de l'Arithmétique, l'auteur fait connaître les différentes règles de l'emploi des nombres fractionnaires. La plus grande attention est donnée à la division du nombre 2 et à la réduction de toute fraction à une somme de fractions dont chacune a l'unité pour numérateur. La même partie contient la solution de plusieurs problèmes sur la distribution de blé entre plusieurs personnes. On y trouve aussi la solution des équations du premier degré à une seule inconnue; la grandeur cherchée s'appelle *Koutcha* ou *Hau*. Le papyrus nous donne aussi une formule pour la sommation des progressions arithmétiques et géomé-

triques; les premières portent le nom d'*Echelle*, et les cinq premières puissances du nombre 7 ont le nom de *image*, *chat*, *souris*, *orge* et *mesure*.

Quant aux problèmes de géométrie résolus dans ce papyrus, nous ne ferons mention que de la solution des aires des triangles et des quadrilatères, ainsi que des essais pour le calcul de l'aire du cercle. La méthode employée par les mathématiciens égyptiens diffère essentiellement de la méthode d'Archimède, quoique le rapport de la circonférence au diamètre trouvé par eux ne diffère que de bien peu de celui du géomètre grec. Les essais de l'auteur du papyrus nous montrent les premiers pas des mathématiciens de l'antiquité vers la solution du fameux problème *la quadrature du cercle*, problème dont beaucoup de personnes s'occupent encore de nos jours, quoiqu'il existe des preuves de l'impossibilité de cette solution en nombres entiers. Les problèmes de stéréométrie se réduisent au calcul du volume des pyramides et de la capacité de différents réservoirs destinés à la conservation des fruits et du froment. Les rapports entre les parties d'une pyramide dont se sert l'auteur pour calculer le volume, prouvent qu'il n'ignorait pas les fonctions trigonométriques cosinus et tangente. Nous voyons encore qu'on connaissait déjà de son temps la proportionnalité des lignes et des figures ainsi que les figures semblables.

Un autre monument de la littérature mathématique des anciens Égyptiens nous a été conservé dans les inscriptions hiéroglyphiques du temple de Horus à Edfou. Ces inscriptions datent du XIe siècle avant Jésus-Christ, et contiennent la liste des dimensions de 52 terres dont le pharaon Ptolémée XI avait fait cadeau au temple. Lepsius a rétabli le plan de ces terres; le calcul indiqué pour en trouver la surface n'est qu'approximatif. On calculait la surface de tout quadrilatère en prenant le produit des demi-sommes des deux côtés opposés. Pour l'aire du triangle on suivait la même méthode inexacte, supposant l'un des côtés égal à zéro.

La matière de ces deux monuments de la littérature mathématique des anciens Égyptiens prouve que leurs connaissances des sciences mathématiques n'étaient pas fondées sur un système

rigoureusement scientifique, mais ne consistaient qu'en un recueil de règles pratiques; leur géométrie ne connaît ni axiomes, ni démonstrations des diverses propositions.

Nous ignorons si les Égyptiens possédaient des ouvrages spéciaux de mathématiques, cependant il est permis de le supposer, car il est clair que l'auteur du papyrus de Rhind avait en vue des lecteurs possédant à fond les premiers éléments de la science. Nous ne savons pas si le théorème de Pythagore était connu aux Égyptiens, mais ils savaient construire un angle droit à l'aide d'un triangle rectangle dont les côtés répondaient aux nombres 3, 4 et 5. Ils connaissaient de même l'équerre, dont l'image se retrouve sur plusieurs monuments. Sur des monuments et des tombeaux nous trouvons une quantité de figures géométriques tracées avec une grande exactitude et en parfaite connaissance de cause. Beaucoup de ces figures et les images d'autres objets prouvent une entente parfaite des lignes proportionnelles et des figures semblables. Ce qui nous surprend particulièrement c'est l'ignorance totale de la perspective; plusieurs savants en trouvent la raison dans les croyances religieuses des anciens Égyptiens. A l'exemple des Chaldéens, ils attribuaient un sens mystique à différents nombres ainsi qu'aux figures géométriques. Il est probable qu'ils durent aux pays orientaux ces opinions, qui de l'Égypte se répandirent ensuite en Grèce. Quant aux connaissances des Égyptiens en astronomie, il semble qu'ils les aient empruntées aux Chaldéens.

Nous étant rendu compte du caractère et de la direction des sciences mathématiques chez les Chaldéens et les Égyptiens, disons quelques mots de l'état de ces sciences chez les habitants de l'extrême Orient — chez les Chinois. Depuis bien longtemps on a pensé que les sciences mathématiques avaient été très peu développées chez les habitants du Céleste-Empire; mais une étude plus approfondie de la littérature chinoise a réfuté complètement cette opinion. Beaucoup de savants prétendent que tout ce dont se vantent les Chinois, que toutes les découvertes faites, selon eux, par leurs ancêtres à une époque éloignée de plusieurs

centaines de siècles ont été empruntées aux étrangers; mais cette assertion est trop hasardée et n'est fondée absolument sur rien. Les faits historiques prouvent bien le contraire, car il est démontré que déjà dans l'antiquité la plus reculée l'industrie et les arts étaient parvenus en Chine à un haut degré de développement et de perfection. Beaucoup d'inventions, faites par les Européens à une époque peu éloignée, étaient connues en Chine il y a déjà bien des siècles. L'imprimerie, la poudre à canon, le papier, l'aiguille aimantée, les ponts suspendus, les puits artésiens, les semoirs mécaniques, la porcelaine, un éclairage présentant beaucoup de ressemblance avec notre éclairage au gaz, et bien d'autres perfectionnements existaient en Chine dans un temps où en Europe on n'en eut pas encore la moindre idée. Les Chinois de leur côté prétendent que leurs connaissances ne leur sont nullement venues des étrangers, et que c'est bien le contraire qui a eu lieu; si vraiment il y avait quelque chose qui leur fût inconnu, on doit l'attribuer à la combustion des livres en 213 avant Jésus-Christ. Les Chinois ne jugeaient pas nécessaire l'acquisition de nouvelles connaissances, ni le développement ultérieur de celles qu'ils possédaient. On en peut juger d'après les paroles de leur philosophe célèbre, Confucius, qui vécut au v[e] siècle avant J.-C. : « La véritable science », disait-il à ses disciples, « consiste dans la connaissance de ce qui est connu et dans l'ignorance de ce qui ne l'est pas. » Regardant sous ce point de vue les recherches scientifiques, il n'est pas étonnant que les Chinois aient été incapables de faire fleurir les sciences mathématiques, et ils s'en approprièrent seulement autant qu'il leur fallait pour leur usage habituel.

Les Chinois ne possédaient pas d'ouvrages spéciaux d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre; leurs auteurs réunissaient dans un seul traité tout ce qui leur était connu de ces sciences. Il n'existait point de système rigoureusement scientifique pour la solution des questions mathématiques; on indiquait simplement la règle dont il fallait se servir pour résoudre un problème; point d'axiomes, nulle démonstration. — L'ouvrage mathématique le plus ancien des Chinois date de 2600 ans avant J.-C. et fut

composé par ordre de l'empereur Hoang-Ti; il est divisé en 9 chapitres et porte le nom de « *Neuf sections d'Arithmétique* »; dans la suite, ce même nom fut donné aux traités écrits plus tard. L'ouvrage contient les quatre règles pour les nombres, le calcul de l'aire des triangles, des polygones et du cercle; le nombre 3 est pris comme rapport de la circonférence au diamètre. Puis vient l'exposé détaillé des proportions et leur application à la règle de société, l'extraction des racines carrées et des racines cubiques, le calcul des volumes, la solution de quelques équations et les premiers éléments de la trigonométrie. Ce qui est le plus digne de remarque, c'est le curieux système des mesures de longueur et des poids. Voici en quoi consistait ce système : pour base, il avait une espèce de tube nommé hwang-tsung, divisé dans sa longueur en 90 parties de foun; 10 foun faisaient un tsoun, 10 tsoun un tchi. Ce tube pouvait contenir 1200 grains de riz; le poids de 10 tubes pleins de riz faisait un ho, qui servait de base au système des poids. Les mesures de longueur et de capacité étaient fondées sur le système décimal; celles des poids, sur le système duodécimal.

Cet ouvrage nous enseigne en quoi consistaient les connaissances mathématiques des Chinois, 2600 ans avant J.-C.; il ne porte aucun caractère scientifique; c'est tout simplement un recueil de règles pratiques, indispensables à la solution des questions qui se présentent journellement.

De plusieurs endroits d'un autre ouvrage écrit en l'an 1100 avant J.-C., nous apprenons qu'alors les Chinois connaissaient le théorème de Pythagore; mais nullement sous la forme sous laquelle nous le rencontrons dans les ouvrages des anciens Grecs. Ils déduisent ce théorème d'un triangle rectangle dont les côtés correspondent aux nombres 3, 4 et 5, et à l'aide de ce théorème ils donnent la solution du problème connu sous le nom de *canne de bambou*.

Nous ne dirons rien des autres ouvrages mathématiques des Chinois; faisons seulement remarquer que presque tous les autres traités de ce genre ne font que développer et refaire la matière

›ntaines de siècles ont été empruntées aux étrangers; mais cette ›ssertion est trop hasardée et n'est fondée absolument sur rien. ›s faits historiques prouvent bien le contraire, car il est démon-›é que déjà dans l'antiquité la plus reculée l'industrie et les arts ›aient parvenus en Chine à un haut degré de développement et › perfection. Beaucoup d'inventions, faites par les Européens à ›ne époque peu éloignée, étaient connues en Chine il y a déjà ›ien des siècles. L'imprimerie, la poudre à canon, le papier, ›aiguille aimantée, les ponts suspendus, les puits artésiens, les ›emoirs mécaniques, la porcelaine, un éclairage présentant beau-›oup de ressemblance avec notre éclairage au gaz, et bien d'autres ›erfectionnements existaient en Chine dans un temps où en ›urope on n'en eut pas encore la moindre idée. Les Chinois de ›ur côté prétendent que leurs connaissances ne leur sont nulle-›ent venues des étrangers, et que c'est bien le contraire qui a ›a lieu; si vraiment il y avait quelque chose qui leur fût inconnu, ›n doit l'attribuer à la combustion des livres en 213 avant Jésus-›hrist. Les Chinois ne jugeaient pas nécessaire l'acquisition de ›ouvelles connaissances, ni le développement ultérieur de celles ›'ils possédaient. On en peut juger d'après les paroles de leur ›ilosophe célèbre, Confucius, qui vécut au ve siècle avant J.-C. : ›a véritable science », disait-il à ses disciples, « consiste dans la ›naissance de ce qui est connu et dans l'ignorance de ce qui ne › pas. » Regardant sous ce point de vue les recherches scien-›ies, il n'est pas étonnant que les Chinois aient été incapables ›ire fleurir les sciences mathématiques, et ils s'en appropriè-›eulement autant qu'il leur fallait pour leur usage habituel.

› Chinois ne possédaient pas d'ouvrages spéciaux d'arithmé-› de géométrie et d'algèbre; leurs auteurs réunissaient dans ›l traité tout ce qui leur était connu de ces sciences. Il ›it point de système rigoureusement scientifique pour la › des questions mathématiques; on indiquait simplement ›dont il fallait se servir pour résoudre un problème; point ›s, nulle démonstration. — L'ouvrage mathématique le ›ien des Chinois date de 2600 ans avant J.-C. et fut

les nations, comme parmi les hommes, il se trouve des génies.

Qu'est-ce que les Hellènes ont pu emprunter aux Chaldéens et aux Égyptiens? D'après tout ce que nous savons de l'état des sciences mathématiques chez ces peuples, nous pouvons affirmer hardiment que les Grecs ne leur ont emprunté que fort peu. 600 ans avant Jésus-Christ, nous ne trouvons chez les Grecs que les notions les plus élémentaires en Géométrie. Thalès connaissait les conditions d'égalité des triangles; il savait que l'angle inscrit dans la demi-circonférence est un angle droit; il avait des notions de la proportionnalité et des figures semblables. Anaximandre, son disciple, compose déjà un traité de géométrie. Anaxagore, maître de Périclès et d'Euripide, s'occupe de la recherche de la quadrature du cercle. Pythagore donne le théorème connu sous son nom; il donne de même des règles sur la transformation des figures, et fait des recherches sur la théorie des nombres et sur leurs propriétés, au point de vue mathématique et mystique. Cette idée du sens mystique des nombres qui jouit d'une si grande importance dans l'enseignement des Pythagoriciens leur est venue apparemment de la Chaldée ou peut-être de l'Égypte. Dans l'intervalle du temps écoulé entre Thalès et Pythagore, la Géométrie prit une forme purement théorique et scientifique et devint une science toute spéculative; la planimétrie et surtout les propriétés typiques des triangles et des polygones reçurent leur développement définitif. Par l'introduction de la proportionnalité et par conséquent des figures semblables, le calcul métrique fut porté au plus haut degré de perfection. De Pythagore à Platon, les géomètres Hippias d'Élée, Archytas, Hippocrate de Chio, Antiphon et Brison s'occupent des trois problèmes célèbres de l'antiquité : la duplication du cube, la trisection de l'angle, la quadrature du cercle. Leurs recherches dans cette direction eurent une bien grande influence sur le développement ultérieur de la géométrie. Dans un laps de temps d'un siècle et demi au plus, la géométrie fut revêtue d'une forme scientifique dont on ne trouve aucune trace chez nul autre peuple de l'antiquité.

En 429 avant Jésus-Christ, naquit à Athènes le contemporain d'Alcibiade et de Périclès, le disciple de Socrate, Platon, fondateur de la célèbre académie. Doué par la nature de brillantes qualités, il étudia la philosophie sous Socrate, et sous l'influence de la tendance tout éthique de l'enseignement socratique, tout son être aspirait à l'idéal, à la perfection. A mesure que la Géométrie se transformait en science et que l'étude profonde de cette science devenait indispensable, elle fut en même temps exposée aux attaques de ceux qui se croyaient chargés de dire leur opinion sur tout, même sur des objets dont ils n'avaient pas la moindre idée. Le point de vue étroit et partial sous lequel on regardait l'étude des sciences exactes, point de vue partagé malheureusement encore à notre époque par beaucoup de nos humanistes, se fit déjà jour du temps de Platon; ce ne furent non seulement les sophistes et les démagogues qui se prononcèrent contre l'étude des sciences exactes : le grand Socrate lui-même pensait que cette étude devait se borner à ce qui était indispensable à l'usage de la vie pratique, et qu'une étude profonde non seulement ne représentait aucune utilité, mais qu'elle était même nuisible. Platon ne partageait point l'opinion de son maître; il était persuadé au contraire, et avec raison, que tout homme bien élevé devait étudier les Mathématiques et que cette étude était indispensable particulièrement aux philosophes. Ce n'est que de notre temps que cette opinion de Platon a été adoptée généralement, et son autorité a eu une grande influence sur l'étude de la Géométrie en tant que science. Platon lui-même n'a rien écrit sur les mathématiques, mais nous pouvons juger de ses connaissances en Géométrie, ainsi que de ses vues sur les sciences mathématiques en général et sur l'Astronomie, d'après ses ouvrages *Timée, l'État* et *Épinomis*. Quoique la doctrine des Pythagoriciens eût eu une grande influence sur le développement intellectuel de Platon, il possédait trop de logique et de bon sens pour croire aux interprétations mystiques et symboliques des figures et des nombres, et c'est pour cela qu'il débarrassa les mathématiques de tout ce qui ne s'y rapportait pas directement

en n'acceptant que ce qui avait une valeur véritable. C'est avec Platon et avec l'école formée par lui que commence une ère nouvelle pour le développement des sciences mathématiques. On porta la plus grande attention aux définitions et aux notions communes, on compléta la planimétrie et en partie la stéréométrie, et nous voyons paraître la Géométrie transcendante ou les sections coniques. L'Académie de Platon eut pour membres les vieux géomètres Archytas, Léodamus, Théétète, et les jeunes contemporains de Platon, Néoclide, Léon, Eudoxe, Dinostrate, Ménechme et beaucoup d'autres. A ce dernier, c'est-à-dire à Ménechme, on attribue la découverte des sections coniques, que les anciens appelaient pour cette raison *la Triade de Ménechme*.

Comme témoins des grands progrès de la Géométrie en ce temps-là, on peut citer les *Traités de Géométrie* publiés par Hippocrate de Chio, par Léon, par Xénocrate et par Theudius de Magnésie, puis deux ouvrages sur l'histoire du développement de cette science, de l'astronomie et de l'arithmétique par Eudème et Théophraste. Par malheur, aucun de ces ouvrages n'est parvenu jusqu'à nous.

Le temps de Platon fut un des plus brillants dans l'histoire de l'humanité. Cette période compte des hommes comme Socrate et Aristote, représentants de la philosophie; des poètes comme Pindare, Sophocle, Euripide, Eschyle et Aristophane; des orateurs comme Démosthène et Eschine; des historiens comme Thucydide et Xénophon; des médecins comme Hippocrate; des peintres et des sculpteurs comme Apelle, Phidias, Praxitèle; des grands hommes d'une éducation brillante comme Périclès et Alcibiade; des génies militaires comme Épaminondas. Quel autre siècle peut se comparer à celui de Périclès? Le siècle d'Auguste? ce n'est qu'une imitation servile des Grecs; le siècle des Médicis? celui de Louis XIV? c'est la Renaissance, héritage que les Grecs nous ont légué. Si la période de Platon fut la plus brillante dans toutes les branches des arts et des sciences, la période suivante, celle de la première école d'Alexandrie, fut la plus brillante pour les sciences exactes.

Les conquêtes d'Alexandre le Grand avaient transporté le

centre de l'activité scientifique d'Athènes à Alexandrie, où, grâce aux vues éclairées des Ptolémée, tous les moyens furent donnés aux savants pour le développement ultérieur des sciences exactes : les bibliothèques immenses de Brutium et de Rakotis, un observatoire modèle, un musée et un institut scientifique fondé par les deux premiers Ptolémée. De cet institut sont sortis Aristille et Timocharis, qui les premiers déterminèrent la position des étoiles fixes; Aristarque de Samos, prédécesseur de Copernic, qui expliqua la structure de l'univers et montra l'énorme distance de notre planète aux étoiles; ce fut lui qui, le premier, devina la double rotation de la Terre autour de son axe et autour du Soleil; Hipparque et Eratosthène, dont le premier composa des tables astronomiques et reconnut la précession des équinoxes, et dont le second entreprit le premier mesurage des degrés pour déterminer les dimensions du globe terrestre. Au nombre des savants de l'école d'Alexandrie appartient Euclide, auteur des *Éléments de Géométrie*, qui servent de modèle encore de nos jours; puis Apollonius de Perge qui épuisa jusqu'aux moindres détails les propriétés des sections coniques; Archimède de Syracuse, le plus grand de tous les génies mathématiques, auquel, d'après l'opinion d'Arago, il n'y a que Newton qui puisse être comparé.

La longue route menant de l'analyse et de la synthèse géométriques, comme les comprenaient Platon et les triades de Ménechme, au temps des Kepler, des Tycho Brahe, des Galilée, des Newton, des Euler, des Lagrange, des Gauss et des Laplace, présente une suite des plus brillantes découvertes dans l'empire des sciences mathématiques, sans lesquelles les lois qui régissent l'univers ainsi que leurs rapports mutuels eussent été ignorés à jamais.

Les conquêtes des Romains et leur domination sur la plupart des États de l'Ancien Monde ne profitèrent point aux progrès ultérieurs des sciences. On sait que les Romains ne se distinguaient point par l'amour des sciences; les traits qui les caractérisent sont les exploits guerriers, la construction de monuments magnifiques et l'aspiration à l'empire universel.

Après la prise d'Alexandrie par Jules César, en 47 avant J.-C., l'esprit créateur des Grecs va perdant de plus en plus de sa force et de sa profondeur; il n'existe presque plus d'écrivains originaux d'un caractère indépendant, et nous voyons paraître des commentateurs et des interprètes, ce qui indique toujours une décadence. Ce qui contribua beaucoup à cette décadence, ce fut la chute de la dynastie des Ptolémée et la réduction de l'Égypte en province romaine; et pendant que se passaient ces événements, le christianisme prit la place du paganisme qui avait fait son temps. Tous ces événements d'une importance universelle influèrent de même sur le développement scientifique des mathématiques à l'école d'Alexandrie. Des restes de cette première école se forma une nouvelle — la seconde école d'Alexandrie — qui prit une nouvelle direction. Les représentants de cette école furent le géomètre Ménélas, Nicomaque, l'astronome Ptolémée, vivant au IIe siècle avant J.-C., auteur du *Traité astronomique* connu plus tard sous le nom d'*Almageste*, Théon d'Alexandrie, Pappus et d'autres encore. De ce nombre était Diophante, inventeur présumé de l'Algèbre; ce fut le dernier grand mathématicien de l'antiquité. Puis succèdent les commentateurs dont les plus connus sont Pappus et Proclus Diadochus.

La décomposition de l'empire romain d'Occident, l'invasion des Barbares, la fermentation chaotique dans laquelle se trouvait toute l'Europe, les guerres perpétuelles, le fanatisme religieux des premiers chrétiens, voilà les principales causes de la décadence graduelle, non seulement des sciences mathématiques, mais de toutes les sciences en général. La haine des chrétiens pour les païens se manifestait par leur mépris pour les sciences des anciens Grecs; leur fanatisme religieux et une ignorance grossière ne leur permettaient pas d'emprunter quoi que ce fût des ouvrages des païens, d'Euclide, d'Aristote, d'Archimède et d'autres. Afin d'affermir le règne de la nouvelle religion, ils détruisaient tous les ouvrages des païens et livraient aux flammes les Œuvres d'Aristote et des autres grands penseurs de l'antiquité; en détruisant tous ces ouvrages, ils n'eurent qu'un seul but — la propagation d'un

seul livre — l'*Évangile*. La persécution des païens, commencée au IVe siècle, sous le règne de Théodose le Grand, la publication de l'édit ordonnant la destruction de tous les temples païens et entre autres celle du fameux temple de Sérapis, où se trouvait l'immense bibliothèque d'Alexandrie, tout cela porta le dernier coup au développement déjà chancelant des sciences. Dans la suite on attribua, mais à tort, aux Arabes l'incendie de la bibliothèque d'Alexandrie. Ce fut en vain que les païens cherchèrent un refuge à Athènes, ce vieux centre de la civilisation hellénique, où ils fondèrent l'école d'Athènes, ils ne purent déjà plus se remettre des coups qu'on leur avait portés, et le VIe siècle vit la mort de cette école. A sa place une nouvelle école surgit à Byzance, mais elle ne produisit pas un seul géomètre de quelque importance, et en général pas un seul mathématicien de renom. Byzance était en proie aux discordes civiles, à la fureur des iconoclastes, aux luttes des partis, ce qui ne pouvait avoir une influence salutaire sur le progrès des sciences. Les savants de l'école byzantine étaient plongés dans des disputes dogmatiques, les grammairiens soulevaient des disputes sur la signification de tel ou de tel mot, pendant que les Turcs étaient déjà aux portes de Constantinople. Enfin, la prise de cette ville par les Turcs en 1453 mit une fin à la vie politique des Grecs et à la misérable existence de l'école byzantine.

Dans le temps de ces troubles et de ces désordres religieux, périrent une quantité de monuments remarquables des sciences et des arts. Beaucoup de précieux manuscrits furent transformés en livres de prières et de légendes; on effaçait ce qui était écrit sur les vieux parchemins et l'on y écrivait la vie des saints. Des hymnes sacrées, des légendes fabuleuses, des commentaires de la Bible et quelques essais pour fixer la date des fêtes de Pâques, ce sont là les seuls monuments des sciences de cette époque.

Durant plusieurs siècles, l'ignorance des chrétiens était telle qu'ils ne furent pas en état de comprendre les belles productions poétiques de Virgile et d'Horace; ils se contentaient de vers ascétiques écrits en mauvais latin. Arrive enfin un temps de la

plus crasse ignorance. Tous les savants de ce temps, si l'on a seulement le droit de leur donner ce nom, ne s'occupent qu'à composer des traités de scolastique religieuse; les disputes religieuses, les dissensions des églises, — voilà les traits caractéristiques de l'époque.

Impossible de prévoir à quel point serait parvenue cette ignorance de toute culture intellectuelle, si au VIIIe siècle n'était apparu sur la scène de la vie politique des nations un peuple de race sémitique — les Arabes. Le glaive d'une main, le Coran de l'autre, ils s'emparent, après la mort de Mahomet, d'une grande partie de l'Asie, de l'Afrique et de l'Espagne. Une nouvelle époque commence en 750 après la chute des Ommiades; à l'esprit belliqueux, aux conquêtes, succède une période paisible pendant laquelle fleurissent les arts et les sciences. La ville de Bagdad, nouvellement fondée, devient le centre de la civilisation, éclairant l'Orient et même l'Occident. Cordoue et Tolède, le Caire, Fez, le Maroc, Ispahan, Racca, Delhi, Samarkande, Séville rivalisent avec la capitale des Abbassides. Dans les écoles on étudie les auteurs grecs traduits et commentés, et de tous côtés se développe la science humaine, arrêtée pour un temps. L'intervalle de temps entre le IXe et le XIIIe siècle voit naître une des littératures les plus riches qui aient jamais existé. La propagation de différentes productions, des découvertes remarquables nous font connaître l'activité extraordinaire des esprits, et font sentir leur importance à l'Europe chrétienne; elles semblent même confirmer l'opinion répandue qu'en tout les Arabes ont été nos maîtres. D'un côté des matériaux inappréciables pour l'histoire du moyen âge, les descriptions de voyages, l'heureuse idée de dictionnaires biographiques; de l'autre une industrie, un commerce sans égal, des monuments grandioses autant par leur conception que par leur exécution, des découvertes importantes dans l'empire des sciences et des arts, — voilà ce qui nous oblige de tourner notre attention vers ce peuple si longtemps oublié. Voyant chez les Arabes une si heureuse application de la méthode expérimentale à la médecine, aux sciences naturelles, à la chimie et à l'agri-

culture, enrichissant ces sciences d'une multitude de faits nouveaux, on peut s'attendre à un succès semblable dans le développement des sciences mathématiques, à l'étude desquelles les Arabes se livraient avec tant de zèle. Ayant pris connaissance des ouvrages mathématiques des anciens philosophes grecs, par l'entremise des Nestoriens de Syrie, qui avaient leurs écoles à Antioche et à Edesse, ils ne pouvaient ne pas les remanier et ajouter beaucoup de nouveau aux théories de leurs devanciers. En comparant les ouvrages qui sont parvenus jusqu'à nous et qui traitent des mathématiques, de l'Astronomie et de la Géographie, nous voyons que l'école de Bagdad surpassa les écoles d'Alexandrie et d'Athènes.

Parmi les mathématiciens arabes, ce furent Honain-ben-Ishak et son fils Ishac-ben-Honain, ainsi que Tabit-ben-Korra, qui jouirent de la plus grande réputation. Ils entreprirent la traduction en arabe des *Éléments* d'Euclide, des ouvrages d'Archimède, d'Apollonius, de Ptolémée et d'autres géomètres célèbres de l'antiquité; ces écrivains vivaient au VIIIe et au IXe siècle. Quant aux mathématiciens arabes originaux, les plus célèbres sont Mohammed-ben-Mousa, auteur d'une arithmétique élémentaire, composée par ordre du calife Al-Mamoun; Aboul Wéfa au Xe siècle, Aboul-Djoud, Alkarkhi, auteurs de traités d'Algèbre au XIe siècle et Omar Alkhayâmy qui s'occupait de la construction des équations du 3e degré et de l'application de l'Algèbre à la Géométrie. En ce même temps vivait au Caire le célèbre Hassan-ben-Haïtim, mieux connu sous le nom de « Alhazen », auteur d'ouvrages nombreux dont les plus connus sont *Des connues géométriques* et *l'Optique*. Des mathématiciens d'un temps plus avancé nous connaissons Ibn Albana, auteur d'un traité d'Arithmétique, Alkalzadi, Beha Eddin et beaucoup d'autres.

Les mathématiciens arabes furent les premiers à comprendre et à apprécier à leur juste valeur les ouvrages des anciens géomètres grecs. A dater d'Haroun-al-Raschid et d'Al-Mamoun, tous ces ouvrages furent traduits et commentés par les savants arabes; leurs ouvrages nombreux et variés nous en donnent la

preuve. Beaucoup de questions compliquées et délicates furent examinées et éclairées; on peut le voir par la solution du problème suivant : au moyen de la position donnée d'un objet quelconque et de l'œil de l'observateur trouver l'image de l'objet dans un miroir sphérique. La solution de ce problème nous mène analytiquement à la solution d'une équation du 4e degré. — Les mathématiciens arabes ne se bornèrent point à la traduction des philosophes grecs; dans certaines branches des mathématiques, ils introduisirent des perfectionnements et des innovations. Ils prêtaient la plus grande attention aux éléments fondamentaux des sciences et tâchaient d'éclairer beaucoup de questions épineuses, par exemple celle des lignes parallèles.

Du nombre des travaux originaux des Arabes, nous ne mentionnerons que de trois ou quatre propositions fondamentales sur lesquelles repose toute notre trigonométrie : l'introduction du sinus à la place des cordes des arcs doubles et celle de la tangente dans les formules trigonométriques, ce qui simplifie singulièrement ces dernières, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, les recherches sur les propriétés des équations du 3e et du 4e degré, et enfin cette direction philosophique qu'ils donnèrent aux recherches et aux interprétations des questions géométriques. Tout cela nous montre clairement que les savants de l'école de Bagdad étaient profondément versés dans toutes les branches des sciences mathématiques et s'occupaient avec succès de l'interprétation et de l'explication des questions les plus abstraites; voilà pourquoi leurs travaux méritent toute notre attention et notre estime.

Quoique les Arabes, comme nous avons vu par ce qui précède, ne se soient pas distingués par un esprit créateur, comme les Grecs et, ainsi que nous le verrons plus loin, comme les Hindous, néanmoins grâce à leur soif de s'instruire et de tout expliquer, ce qui les portait à s'occuper avec la même ardeur d'algèbre et de poésie, de philosophie et de grammaire, nous leur devons une éternelle reconnaissance de nous avoir conservé les sciences des Grecs et en partie celles des Hindous, pendant que ces peuples ne produisaient plus rien et que l'Europe était encore plongée dans

une trop grande ignorance pour pouvoir transmettre cet héritage inappréciable. Réunissant les connaissances des Grecs en géométrie aux connaissances des Hindous en algèbre, les Arabes donnèrent aux sciences mathématiques une direction qui leur manquait jusque-là et qui contribuait dans la suite, à commencer du XVIe siècle, au rapide développement de la Géométrie.

Simultanément avec les Arabes, pendant que ceux-ci s'occupent avec un si grand succès du remaniement et de l'interprétation des ouvrages des anciens Grecs, un autre peuple, les Hindous, cultivent les sciences mathématiques d'une manière tout à fait indépendante dans un autre esprit et poursuivent une tout autre voie que les Hellènes.

L'histoire du développement primitif des sciences mathématiques chez les Hindous nous est totalement inconnue. L'histoire de l'Inde, ainsi que celle de la Chaldée, repose sur des légendes fabuleuses ayant toutes un caractère astronomique. Les plus anciens ouvrages écrits en sanscrit et connus jusqu'ici, qui nous permettent d'apercevoir des traces des connaissances qu'eurent les Hindous en mathématiques — sont les *Kalpassoudri*, c'est-à-dire *les recueils;* ils enseignent les règles d'après lesquelles doivent se faire les sacrifices. A ce recueil est joint un autre petit traité de théologie géométrique, qui donne les règles d'après lesquelles devaient se construire les autels; ce dernier ouvrage est connu sous le nom de *Soulvasoutra,* ou règles de la corde. Le temps où ces ouvrages furent composés nous est inconnu; trois de ces recueils écrits par Bodhayana, Apastamba et Kadyayama sont parvenus jusqu'à nous. Il est probable que ces recueils parurent bientôt après la composition des livres sacrés des Hindous — les *Védas*. Les règles sur la construction des autels contiennent toutes les connaissances des bramines en mathématique ou de la géométrie dite védique. La *Sidhinta* ou le livre des temps des temps est du nombre des plus anciens écrits astronomiques des Hindous; d'après les bramines, ce livre date du temps de Brahma. De nos jours, on a soumis à un examen rigoureux les ouvrages des auteurs hindous les plus anciens; de ce nombre sont : Arya-

bhatta au VIe siècle de notre ère, Brahmagoupta et Bhaskara au VIIe et au XIe siècle. Les ouvrages d'Aryabhatta ont été publiés dernièrement par Kern, professeur à l'université de Leyde, et par le savant français Rodet. Le contenu de ces ouvrages montre une profonde connaissance des mathématiques et de beaucoup de propositions remarquables de la théorie des nombres. Aryabhatta s'occupe particulièrement de l'analyse indéterminée, arrivée, entre les mains de ses disciples, à un si haut degré de perfection. La méthode qu'il enseigne pour la solution des équations indéterminées du premier degré mérite une attention particulière. Les questions d'analyse indéterminée et la théorie des nombres ont été de tout temps l'occupation favorite des mathématiciens hindous, et dans ces branches des mathématiques ils obtinrent des résultats remarquables. Il est bien à regretter qu'on n'ait pas plus tôt prêté attention aux ouvrages mathématiques des Hindous. Les écrits de Brahmagoupta et de Bhaskara ne furent connus en Europe qu'au commencement de notre siècle, grâce aux travaux des Anglais, parmi lesquels la première place appartient au célèbre Colebrooke et à Strachey. L'illustre Chasles, décédé depuis peu, s'est beaucoup occupé de l'étude et de l'explication des parties des ouvrages de Brahmagoupta et de Bhaskara, qui traitent de la géométrie. On peut affirmer avec certitude que si les travaux des Hindous avaient été connus de Fermat, s'ils avaient été traduits soixante ans plus tôt, l'analyse algébrique et les recherches sur les propriétés des nombres auraient amené à des résultats encore plus brillants entre les mains des Euler, des Lagrange, des Legendre et des Gauss.

La géométrie des Hindous porte aussi un caractère original : point de démonstrations de la justesse des différentes propositions, mais la vérité ressort immédiatement du dessin. La figure qui répond aux propositions et le mot « vois ! » qui l'accompagne, remplacent toute démonstration logique, toute construction auxiliaire et le « ce qu'il faut démontrer » des géomètres grecs. Comme preuve que l'analyse géométrique des Hindous se tient par des liens invisibles dans l'ensemble de son

application, peut servir l'exemple du philosophe allemand Schoppenhauer qui, inclinant de sa nature vers la métaphysique des anciens Hindous, fut un des premiers à s'élever contre la méthode d'Euclide, et qui, tout en ignorant la méthode des Hindous, proposa une méthode identique avec la leur, fondée sur le développement de la compréhension par l'évidence.

Les ouvrages mathématiques des Hindous sont encore remarquables par la forme sous laquelle ils se présentent. Leur laconisme et leurs étranges tournures en rendent la lecture très embarrassante, et empêchent parfois d'en saisir le sens. Les Hindous aiment à présenter la plupart des questions sous une forme poétique, en quoi ils sont favorisés par la richesse de la langue sanscrite.

Il est bien singulier que les recherches mathématiques des Hindous aient été connues si tard dans l'Occident. Bien des solutions que les Européens n'ont trouvées que vers la fin du siècle passé, étaient connues des Hindous il y a déjà dix siècles. Nous avons tout lieu de penser que tout notre système de numération, même nos chiffres, connus sous le nom de chiffres arabes, tirent leur origine de l'Inde, que de là ils passèrent chez les Arabes, qui les transmirent aux Européens par l'entremise des Byzantins d'un côté et des Maures d'Espagne de l'autre.

L'idée que se faisaient les Hindous de notre monde extérieur était bien plus large et plus grandiose que celle des anciens Grecs. Dans leur philosophie, ils parvinrent à passer de l'observation des objets de la nature à la conception de l'infini sans limites, sans forme, à la conception de l'éternité. L'univers ne leur était qu'un objet inconstant et passager, leur idée sur la forme et l'aspect des objets cédait la place à celle de la matière et de l'origine divine, et ces conceptions se refléchissaient dans la marche des sciences mathématiques. La même chose eut lieu chez les anciens Grecs qui, partant de leurs conceptions particulières, furent toujours à la recherche de ce qui existait matériellement, cherchant toujours à reconnaître la nécessité, la raison d'être de tout ce qui les entourait. Quoique l'une et l'autre de

ces conceptions soient par trop exclusives, elles sont cependant indispensables l'une et l'autre. C'est à la réunion de ces directions adoptée par les Européens, que les sciences mathématiques modernes doivent leur rapide développement. Pendant que les Grecs font tout dépendre de la forme, de sorte que chez eux des propositions purement arithmétiques et algébriques prennent un caractère géométrique, les Hindous, de leur côté, ne prennent en considération que les combinaisons des nombres, et leur géométrie rentre dans l'arithmétique.

L'influence de la nature environnante se fait toujours sentir dans les conceptions et les sciences des peuples. La nature de l'Hindoustan a un caractère grandiose et menaçant, celle de la Grèce un caractère délicat et charmant. L'Hindou se sent esclave, le Grec se sent souverain. L'Hindou se représente ses dieux sous les aspects les plus étranges, les plus terribles, sous la forme de géants, de nains, d'éléphants, de tortues et de monstres différents; les actions de ces dieux sont inscrutables. Chez les Grecs, au contraire, les dieux sont des hommes, non seulement par l'extérieur, mais encore par le caractère; tout ce qu'il y a de plus beau, de plus parfait dans l'homme est aussi l'attribut des dieux : la force, la beauté, la valeur et toutes les vertus, sans faire exception des vices.

Dans les mathématiques les lois de l'infini, de ce qui n'a pas de forme — c'est l'Algèbre; les lois de la forme — c'est la Géométrie. Les lois de ce qui a une forme sont contenues dans les lois de ce qui n'en a pas, c'est-à-dire la géométrie est renfermée dans l'algèbre. Les Grecs s'occupaient de la forme des objets, les Hindous des objets, abstraction faite de leur forme. L'Europe a adopté l'un et l'autre de ces points de vue et a élevé l'édifice grandiose des sciences mathématiques qui sert d'un levier puissant pour pousser l'humanité dans la voie du progrès.

APERÇU D'UNE NOUVELLE MANIÈRE

DE REPRÉSENTER

LES INVERSIONS DES INTÉGRALES HYPERELLIPTIQUES

PAR M. GÖRAN DILLNER

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ D'UPSAL.

Il est bien connu que l'idée de l'inversion d'une intégrale algébrique est due à Abel, et par lui-même parfaitement réalisée pour les intégrales elliptiques. Une extension de la même idée aux intégrales hyperelliptiques, qu'a essayée Abel dans un petit Mémoire inséré au tome II, page 51, de la 1re édition, et au tome 2, page 40, de la 2e édition des *Œuvres d'Abel,* n'a pas été considérée comme satisfaisante par le manque d'une explication des périodes; on peut aussi remarquer que la convergence de la série employée par Abel pour exprimer l'inversion hyperelliptique n'a pas été rigoureusement examinée. Pour dégager la question des difficultés qu'apporte le grand nombre de périodes, difficultés qu'Abel avait laissées inexpliquées, Jacobi, dans un Mémoire qui se trouve dans le tome XIII du *Journal de Crelle,* établit, « *in hac quasi desperatione,* » un théorème « *(Theorema fundamentale),* » d'après lequel l'inversion hyperelliptique doit être considérée comme dépendante de plusieurs variables. A cause des grandes complications qu'amène la considération de Jacobi, et qui semblent répugner à la simplicité de la science, il y a des géomètres qui ont voulu rétablir l'idée simple et naturelle d'Abel, de considérer l'inversion hyperelliptique comme dépendante d'une seule variable, idée que Jacobi semble avoir abandonnée sans l'examiner d'une

manière complète. Ainsi, dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris pour le 13 décembre 1863, M. Casorati a énoncé l'opinion que l'inversion hyperelliptique, considérée comme fonction d'une seule variable, doit être placée *en première ligne*, tandis que la même inversion, considérée comme fonction de plusieurs variables, par sa grande complication, doit être mise *en seconde ligne;* de plus, le même auteur indique une manière d'expliquer le grand nombre des périodes par une certaine multiplicité de valeurs que peut représenter l'inversion. En effet, l'inversion d'une intégrale généralement algébrique, comme je le prouverai dans ce qui va suivre, *doit représenter une quelconque parmi plusieurs fonctions d'une seule variable, fonctions qui possèdent des propriétés fondamentales communes, mais dont chacune dépend de ses propres constantes*. L'idée originaire d'Abel se montrera donc comme réalisable dans les cas les plus généraux.

Inversion d'une intégrale algébrique et sa dérivée. — Propriété fondamentale de l'inversion. — Dépendance analytique primaire.

1. Soit $P(x)$ un produit de m facteurs linéaires,

$$(1)\qquad P(x) = (x - e_1)\dots(x - e_m),$$

et posons l'équation différentielle suivante, n étant un entier positif non moindre que 2,

$$(2)\qquad du = \frac{dx}{P(x)^{\frac{1}{n}}};$$

alors, en prenant pour limite inférieure d'intégration une constante x_0, on aura l'intégrale

$$(3)\qquad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)^{\frac{1}{n}}}.$$

L'inversion de cette intégrale, en tant qu'elle est possible, sera désignée par

$$(4)\qquad x = I(u),$$

où la valeur $x = x_0$ correspond à la valeur $u = 0$, ce qui s'exprime par l'égalité

(5) $$x_0 = \mathrm{I}(0).$$

D'après la formule (2) la *dérivée* de l'inversion $\mathrm{I}(u)$ s'exprime de la manière suivante :

(6) $$\mathrm{I}'(u) = \frac{dx}{du} = \left\{ [\mathrm{I}(u) - e_1] \ldots [\mathrm{I}(u) - e_m] \right\}^{\frac{1}{n}}.$$

2. Si l'on met les n racines de 1 sous la forme

(7) $$\varepsilon_r = e^{\frac{2r\pi\sqrt{-1}}{n}}, \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

et que l'on identifie, dans la formule (3), x_0 à un zéro quelconque e_s du produit $\mathrm{P}(x)$, on obtiendra, en faisant décrire à x, r fois le cercle infiniment petit (e_s) et ensuite le chemin entre les limites d'intégration e_s et x, le résultat suivant :

(8) $$\varepsilon_r u = \int_{e_s}^{x} \frac{dx}{\mathrm{P}(x)^{\frac{1}{n}}};$$

donc, l'inversion $\mathrm{I}(u)$ jouit de la *propriété fondamentale* que

(9) $$x = \mathrm{I}(u) = \mathrm{I}(\varepsilon_r u),$$

propriété que nous exprimons en disant que *l'inversion* $\mathrm{I}(u)$ *est une fonction paire d'ordre* n. La racine ε_r peut être remplacée par la valeur réciproque ε_r^{-1} dans les formules (8) et (9).

3. Si l'on prend l'origine $x = 0$ pour centre d'une circonférence C qui ne comprend dans son intérieur aucun des points $e_1, \ldots, e_m$, la fonction $\mathrm{P}(x)^{-\frac{1}{n}}$ se développera en une série convergente pour toute valeur de x au dedans de cette circonférence; en appelant l'intégrale de cette série $\mathrm{S}(x)$, l'intégrale (3) s'écrira de la manière suivante, le point x_0 n'étant pas en dehors de la circonférence C,

$$u = \mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(x_0),$$

formule qui contient dans un sens restreint une *dépendance analytique primaire* entre l'intégrale u et sa limite supérieure. Cette dépendance permet aussi, dans un cercle convenablement petit entourant l'origine $x = 0$ comme centre, de considérer x comme fonction de u, ce qui est un motif préliminaire pour étudier généralement x comme fonction de u.

Zéros et infinis de l'inversion I (u). — Leurs ordres.

4. La théorie des intégrales définies qui constituent les périodes ayant été traitée par plusieurs géomètres, je me borne ici à faire quelques remarques sur les intégrales définies qui forment des *zéros* et des *infinis* de l'inversion $\mathrm{I}(u)$.

A cet effet, désignons par c une constante qui sera convenablement déterminée, et posons l'équation

$$(10) \qquad x = \mathrm{I}(u) = e_s + c\xi^{-\mathrm{M}},$$

où, pour $m > n$ et $\frac{p}{q}$ = une fraction *irréductible*, la valeur de M est donnée par la formule

$$(11) \qquad \mathrm{M} = \frac{n}{m-n} = \frac{p}{q};$$

ensuite, posons le produit

$$(12) \qquad \mathrm{Q}(\xi) = (1 + \mathrm{E}_1\xi^{\mathrm{M}}) \ldots (1 + \mathrm{E}_m\xi^{\mathrm{M}}),$$

où les m valeurs $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_m$ sont données par la formule

$$\mathrm{E}_r = \frac{e_s - e_r}{c} \quad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

la valeur E_s étant par suite nulle; alors on obtiendra d'après (3) le résultat suivant

$$(13) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\mathrm{P}(x)^{\frac{1}{n}}} = -\mathrm{M}c^{-\frac{1}{\mathrm{M}}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\mathrm{Q}(\xi)^{\frac{1}{n}}},$$

où les limites inférieures x_0 et ξ_0 doivent satisfaire à l'équation (10).

Je remarquerai que, pour $n = 2$ et $m = 3$, on aura la transformation bien connue

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)^{\frac{1}{2}}} = -2c^{-\frac{1}{2}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + E_1 \xi^2} \sqrt{1 + E_2 \xi^2}},$$

où, pour $s = 3$ et $-c = e_2 - e_1$, le second membre aura la forme ordinaire de l'intégrale elliptique.

Maintenant, si l'on désigne par a un zéro de l'inversion $I(u)$, on aura

$$(14) \qquad a = \int_{e_s}^{0} \frac{dx}{P(x)^{\frac{1}{n}}};$$

donc on obtiendra, en vertu de (9),

$$(15) \qquad I(\varepsilon_r a) = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire *qu'il y a au moins n zéros de l'inversion* $I(u)$.

Ensuite, si l'on désigne par b un infini de l'inversion $I(u)$, on aura, d'après (13),

$$(16) \qquad b = \int_{e_s}^{\frac{1}{0}} \frac{dx}{P(x)^{\frac{1}{n}}} = -Mc^{-\frac{1}{M}} \int_{\xi_0}^{0} \frac{d\xi}{Q(\xi)^{\frac{1}{n}}} = Mc^{-\frac{1}{M}} \int_{0}^{\xi_0} \frac{d\xi}{Q(\xi)^{\frac{1}{n}}},$$

où ξ_0 a la valeur $\frac{1}{0}$; donc on obtiendra en vertu de (9),

$$(17) \qquad I(\varepsilon_r b) = \tfrac{1}{0}, \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire *qu'il y a au moins n infinis de l'inversion* $I(u)$.

Je remarquerai qu'en posant la fraction irréductible $\frac{p}{q} = M$, l'infini b sera capable de q valeurs différentes, suivant que l'on attribue à la puissance ξ^M, dans la formule (16), ses q valeurs différentes, que l'on obtiendra si l'on fait décrire à ξ le cercle infiniment petit autour de l'origine $\xi = 0$ comme centre $1, 2, \ldots, q$ fois, en intégrant entre les limites 0 et ξ_0. Ensuite, si l'on désigne par $R_1, \ldots, R_p$ les p valeurs de la puissance $\left(-\frac{c}{e_s}\right)^{\frac{1}{p}}$, l'équation (10) se mettra sous la forme

$$x = \frac{e_s}{\xi^M} (\xi^{\frac{1}{q}} - R_1) \ldots (\xi^{\frac{1}{q}} - R_p).$$

et par suite x aura les mêmes zéros que chacun des p facteurs binômes du second membre. Mais, en considérant ξ comme fonction de $v = -\frac{u}{M} c^{\frac{1}{M}}$ d'après la formule (13), on prouvera que chacun de ces p facteurs possède n zéros, mais tels qu'une multiplication par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ n'augmente pas leur nombre. Donc, *il y a au moins nq infinis et np zéros de l'inversion* $x = \mathrm{I}(u)$.

5. Si l'on porte les deux dérivées tirées de l'équation (13),

$$\frac{dx}{du} = \mathrm{P}(x)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{du} = -\mathrm{M}^{-1} c^{\frac{1}{M}} \mathrm{Q}(\xi)^{\frac{1}{n}},$$

dans la dérivée logarithmique de l'équation (10), on obtiendra les résultats

$$(18) \qquad \frac{1}{x}\frac{dx}{du} = \frac{\mathrm{P}(x)^{\frac{1}{n}}}{x} = \frac{-\mathrm{M}}{\xi\left(1 + \frac{e_s}{c}\xi^{\mathrm{M}}\right)} \cdot \frac{d\xi}{du} = \frac{c^{\frac{1}{M}}\mathrm{Q}(\xi)^{\frac{1}{n}}}{\xi\left(1 + \frac{e_s}{c}\xi^{\mathrm{M}}\right)}.$$

Ensuite, si l'on désigne, suivant les formules (15) et (17), les zéros et les infinis de l'inversion $x = \mathrm{I}(u)$ respectivement par $a_1, a_2, \ldots$, et $b_1, b_2, \ldots$, les ordres des zéros étant respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, et ceux des infinis respectivement $\beta_1, \beta_2, \ldots$, on déterminera ces ordres, d'après (18), de la manière suivante :

1° Ordres des zéros,

$$(19) \qquad \alpha_r = \int^{u=a_r} \frac{(u - a_r)}{x}\frac{dx}{du} = 1 \quad (r = 1, 2, \ldots);$$

2° Ordres des infinis,

$$(20) \quad \begin{cases} -\beta_r = \displaystyle\int^{u=b_r} \frac{(u-b_r)}{x}\frac{dx}{du} = \int^{u=b_r} \frac{(u-b_r)\, c^{\frac{1}{M}}\mathrm{Q}(\xi)^{\frac{1}{n}}}{\xi\left(1 + \frac{e_s}{c}\xi^{\mathrm{M}}\right)} \\ \qquad = \displaystyle\int^{u=b_r} \frac{c^{\frac{1}{M}}\mathrm{Q}(\xi)^{\frac{1}{n}}}{\frac{d\xi}{du}} = -\mathrm{M} \quad (r = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Donc, *tous les zéros de l'inversion* $x = \mathrm{I}(u)$ *sont d'ordre* 1, *et tous les infinis sont d'ordre* M.

La détermination des ordres des infinis de l'inversion $x = \mathrm{I}(u)$ se fait d'une manière plus commode si l'on prend la dérivée logarithmique de la fonction $x - e_1$ par rapport à u dans (10); alors on aura

$$\frac{1}{x - e_1} \frac{dx}{du} = -\frac{\mathrm{M}}{\xi} \frac{d\xi}{du} = \frac{c^{\frac{1}{\mathrm{M}}} \mathrm{Q}(\xi)^{\frac{1}{n}}}{\xi};$$

donc, si β_r désigne les ordres des infinis de la fonction $x - e_1$, on obtiendra, au lieu de la formule (20), la formule suivante :

$$-\beta_r = \int^{u=b_r} \frac{(u - b_r)}{x - e_1} \frac{dx}{du} = \int^{u=b_r} \frac{(u - b_r)\, c^{\frac{1}{\mathrm{M}}} \mathrm{Q}(\xi)^{\frac{1}{n}}}{\xi}$$
$$= \int^{u=b_r} \frac{c^{\frac{1}{\mathrm{M}}} \mathrm{Q}(\xi)^{\frac{1}{n}}}{\frac{d\xi}{du}} = -\mathrm{M} \quad (r = 1, 2, \ldots);$$

mais les fonctions $x - e_1$ et x ont des infinis identiques, et par suite l'ordre des infinis de l'inversion $x = \mathrm{I}(u)$ est M.

Appliquons les formules (19) et (20) à quelques exemples :

1° Pour $m = 2n$ et par suite $\mathrm{M} = 1$, l'inversion $\mathrm{I}(u)$ possède au moins n zéros et n infinis, qui sont tous simples. Donc il y a une classe très étendue d'inversions *uniformes* qui comprend comme cas particulier, pour $m = 4$, les fonctions elliptiques;

2° Pour $m = 3$ et $n = 2$ et par suite $\mathrm{M} = 2$, l'inversion $\mathrm{I}(u)$ a au moins 4 zéros simples et 2 infinis doubles;

3° Pour $m = 5$ et $n = 2$ et par suite $\mathrm{M} = \frac{2}{3}$, l'inversion $\mathrm{I}(u)$ qui est la plus simple des fonctions hyperelliptiques a au moins 4 zéros simples et 6 infinis d'ordre $\frac{2}{3}$.

Les exemples de cette nature pourront se multiplier indéfiniment.

Périodes. — Système de fonctions représentées par l'inversion I (*u*). Parallélogramme élémentaire.

6. Soient $2\,\Omega_1,\ldots, 2\,\Omega_\nu$, ν *périodes indépendantes*, et de plus *distinctes*, c'est-à-dire que le rapport de deux quelconques d'entre elles soit une quantité complexe; ensuite, désignons par $L_1,\ldots, L_\nu$ ν *nombres entiers positifs, négatifs* ou *nuls;* alors l'inversion I (*u*), tant qu'elle soit possible, doit satisfaire à l'identité

(21) $$I(u) = I(u + 2\sum_{r=1}^{r=\nu} L_r\Omega_r).$$

7. Puisque les entiers $L_1,\ldots, L_\nu$ sont tout à fait *arbitraires*, on peut combiner les ν multiples de périodes $2\,L_1\,\Omega_1,\ldots, 2\,L_\nu\,\Omega_\nu$ de plusieurs manières différentes :

1° Deux à deux, en annulant tous les autres, ce qui fait

(22) $$\tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) = N$$

combinaisons, correspondantes à N réseaux de périodes;

2° Trois à trois, en annulant tous les autres, ce qui fait un nombre de combinaisons dont chacune correspond à un réseau de périodes à parallélogramme élémentaire infiniment petit, d'après une démonstration de Jacobi bien connue. Enfin, toute combinaison d'un ordre supérieur correspond aussi à un réseau de périodes à parallélogramme élémentaire infiniment petit. Donc nous avons obtenu les fonctions doublement périodiques essentiellement différentes que peut représenter l'inversion I (*u*) pour le cas qu'il y a plus que deux périodes, à savoir :

1° Un système de N fonctions doublement périodiques à parallélogrammes élémentaires ordinaires, fonctions que nous désignons par

(23) $$I_r(u) \quad (r = 1, 2, \ldots, N);$$

2° Diverses fonctions caractérisées par des réseaux à parallélogrammes élémentaires infiniment petits.

Une considération géométrique très simple conduira à éclaircir

la représentation des N fonctions (23) par la fonction I (u). A cet effet, plaçons les N réseaux, formés par les ν périodes, dans N plans différents qui soient parallèles et infiniment voisins et qui n'aient aucun point commun que l'origine $u = 0$, par où on fait passer la variable indépendante u d'un plan à un autre. A chacun de ces plans correspondra donc une des N fonctions $I_r(u)$, et la fonction générale I (u) représentera l'une ou l'autre de ces N fonctions, suivant que l'on fait passer, par l'origine, la variable u d'un plan à un autre.

8. L'inversion $I(u)$ comme représentant une des N fonctions (23) est *doublement périodique*, mais généralement multiforme, comme nous l'avons démontré dans le n° 5, et plus compliquée que les fonctions elliptiques. Désignons par $2\,\Sigma_r\,L\,\Omega$ une combinaison de multiples de deux périodes quelconques, qui correspondra à la fonction $I_r(u)$, et posons

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a = a_s + 2\Sigma_r L\Omega \\ b = b_s + 2\Sigma_r L\Omega \end{array} \right\} \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

où a_s représente un système de zéros et b_s un système d'infinis de l'inversion I (u), comme ceux que nous avons trouvés dans les formules (15) et (17); alors, si l'on suppose que le réseau correspondant à la somme $2\,\Sigma_r\,L\,\Omega$ soit construit, et que l'on fasse coïncider l'un sur l'autre tous les parallélogrammes du réseau qui contiennent quelqu'un des zéros a_s ou quelqu'un des infinis b_s de la fonction I (u), le parallélogramme, obtenu par cette superposition et qui contiendra un certain nombre de zéros a et un certain nombre d'infinis b, est donc le *parallélogramme élémentaire* de la fonction $I_r(u)$. De cette manière on obtiendra une configuration des zéros et des infinis très différente pour chacune des N fonctions $I_r(u)$. Si l'on applique le même raisonnement aux fonctions caractérisées par des réseaux à parallélogrammes élémentaires infiniment petits, on voit que *les zéros et les infinis de ces fonctions sont infiniment voisins.*

ces conceptions soient par trop exclusives, elles sont cependant indispensables l'une et l'autre. C'est à la réunion de ces directions adoptée par les Européens, que les sciences mathématiques modernes doivent leur rapide développement. Pendant que les Grecs font tout dépendre de la forme, de sorte que chez eux des propositions purement arithmétiques et algébriques prennent un caractère géométrique, les Hindous, de leur côté, ne prennent en considération que les combinaisons des nombres, et leur géométrie rentre dans l'arithmétique.

L'influence de la nature environnante se fait toujours sentir dans les conceptions et les sciences des peuples. La nature de l'Hindoustan a un caractère grandiose et menaçant, celle de la Grèce un caractère délicat et charmant. L'Hindou se sent esclave, le Grec se sent souverain. L'Hindou se représente ses dieux sous les aspects les plus étranges, les plus terribles, sous la forme de géants, de nains, d'éléphants, de tortues et de monstres différents; les actions de ces dieux sont inscrutables. Chez les Grecs, au contraire, les dieux sont des hommes, non seulement par l'extérieur, mais encore par le caractère; tout ce qu'il y a de plus beau, de plus parfait dans l'homme est aussi l'attribut des dieux : la force, la beauté, la valeur et toutes les vertus, sans faire exception des vices.

Dans les mathématiques les lois de l'infini, de ce qui n'a pas de forme — c'est l'Algèbre; les lois de la forme — c'est la Géométrie. Les lois de ce qui a une forme sont contenues dans les lois de ce qui n'en a pas, c'est-à-dire la géométrie est renfermée dans l'algèbre. Les Grecs s'occupaient de la forme des objets, les Hindous des objets, abstraction faite de leur forme. L'Europe a adopté l'un et l'autre de ces points de vue et a élevé l'édifice grandiose des sciences mathématiques qui sert d'un levier puissant pour pousser l'humanité dans la voie du progrès.

APERÇU D'UNE NOUVELLE MANIÈRE

DE REPRÉSENTER

LES INVERSIONS DES INTÉGRALES HYPERELLIPTIQUES

PAR M. GÖRAN DILLNER

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ D'UPSAL.

Il est bien connu que l'idée de l'inversion d'une intégrale algébrique est due à Abel, et par lui-même parfaitement réalisée pour les intégrales elliptiques. Une extension de la même idée aux intégrales hyperelliptiques, qu'a essayée Abel dans un petit Mémoire inséré au tome II, page 51, de la 1re édition, et au tome 2, page 40, de la 2e édition des *Œuvres d'Abel,* n'a pas été considérée comme satisfaisante par le manque d'une explication des périodes; on peut aussi remarquer que la convergence de la série employée par Abel pour exprimer l'inversion hyperelliptique n'a pas été rigoureusement examinée. Pour dégager la question des difficultés qu'apporte le grand nombre de périodes, difficultés qu'Abel avait laissées inexpliquées, Jacobi, dans un Mémoire qui se trouve dans le tome XIII du *Journal de Crelle,* établit, « *in hac quasi desperatione,* » un théorème « *(Theorema fundamentale),* » d'après lequel l'inversion hyperelliptique doit être considérée comme dépendante de plusieurs variables. A cause des grandes complications qu'amène la considération de Jacobi, et qui semblent répugner à la simplicité de la science, il y a des géomètres qui ont voulu rétablir l'idée simple et naturelle d'Abel, de considérer l'inversion hyperelliptique comme dépendante d'une seule variable, idée que Jacobi semble avoir abandonnée sans l'examiner d'une

mais l'intégrale du premier membre autour du parallélogramme □ est nulle à cause de la double périodicité de la dérivée logarithmique de la fonction $I_r(u)$, et les intégrales du second membre, prises autour des cercles infiniment petits (a_s) et (b_s), sont respectivement $2\pi i$ et $-2\pi i M$; donc, on aura pour résultat

$$\iota = \varkappa M, \tag{30}$$

c'est-à-dire que *le nombre des zéros est égal au nombre des infinis, multiplié par* M.

Cet énoncé comprend comme cas particulier, pour $M = 1$, un théorème bien connu de la théorie des fonctions elliptiques.

Remarque I. — En considérant M sous forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, j'ai remarqué dans le n° 4 que le nombre d'infinis de l'inversion $I(u)$ est au moins nq, et celui des zéros au moins np, ce qui s'accorde parfaitement à la formule (30).

Remarque II. — La classe des fonctions hyperelliptiques proprement dites étant caractérisée par $n=2$ et $m > 4$, je remarquerai, pour le cas le plus simple $m = 5$ et par suite $M = \frac{2}{3}$, que le nombre N des fonctions $I_r(u)$ est 6 parce qu'il y a, comme on sait, pour ce cas particulier, quatre périodes indépendantes et distinctes.

12. J'appliquerai la formule (9) de mon Mémoire déjà cité, pour le cas particulier $X = 1$, à l'intégrale prise autour du parallélogramme élémentaire □, de la fonction $\log I_r(u)$

$$\int^{\square} \log I_r(u)\, du;$$

puisque cette intégrale s'annule à cause de la double périodicité de la fonction $\log I_r(u)$, on obtiendra presque immédiatement ce résultat

$$\sum_{s=1}^{s=\iota} a_s = M \sum_{s=1}^{s=\varkappa} b_s; \tag{31}$$

c'est-à-dire que, *pour chaque parallélogramme élémentaire, la somme des zéros est égale à la somme des infinis, multipliée par* M.

Cet énoncé comprend comme cas particulier, pour $M = 1$, un théorème bien connu de la théorie des fonctions elliptiques.

Remarque I. — Si l'on suppose, dans la formule (29), que le parallélogramme élémentaire soit infiniment petit, c'est-à-dire que les zéros et les infinis qu'il comprend sont infiniment voisins, le quotient des deux produits infinis se réduira à 1; et, la constante H étant déterminée, comme pour les fonctions elliptiques, en la supposant nulle, il s'ensuit *que l'inversion* $I(u)$, *pour un parallélogramme élémentaire infiniment petit, représente une constante ou est indépendante de la variable u,* énoncé déjà remarqué par d'autres géomètres. *Donc l'inversion* $I(u)$ *représente une quelconque d'un système de* N *fonctions doublement périodiques* $I_r(u)$, *qui possèdent des propriétés fondamentales communes exprimées par la forme analytique* (29), *mais dont chacune dépend de ses propres constantes, déterminées par le réseau de périodes correspondant; ou elle représente une quantité indépendante de la variable u.*

Remarque II. — Jacobi, dans son Mémoire déjà cité, tire la conclusion bien connue que l'inversion d'une intégrale hyperelliptique, considérée comme fonction d'une seule variable, est *impossible,* parce qu'elle a un réseau de périodes à parallélogramme élémentaire infiniment petit. Cette conclusion, comme il est aisé de voir, vient de ce que Jacobi a considéré seulement le cas qui correspond à la combinaison des périodes trois à trois, tandis qu'il n'a pas eu égard à la combinaison des périodes deux à deux, laquelle, comme nous l'avons prouvé, est également possible, et qui donne le système des N fonctions doublement périodiques $I_r(u)$, dont chacune peut être représentée par l'inversion $I(u)$. Dans cet aperçu bien succinct d'un travail que j'ai préparé il y a presque deux années, j'ai eu principalement

pour but d'envisager l'existence des inversions des intégrales algébriques en général au point de vue même qu'Abel les a considérées, c'est-à-dire comme fonctions d'une seule variable, et d'établir leur forme analytique générale, qui comprend comme cas particulier celle des fonctions elliptiques. La méthode exposée s'étendra sans difficulté au cas où il y a une puissance de x, à exposant entier et positif, comme coefficient de la différentielle dx dans l'équation différentielle (2).

LA

STÉRÉOMÉTRIE DE HÉRON D'ALEXANDRIE

PAR M. PAUL TANNERY

I

Dans l'introduction qui commence l'écrit le plus fidèle de la collection héronienne (¹), la *Geometria*, les *théorèmes* de stéréométrie sont énumérés comme étant au nombre de dix : 1. Sphère, 2. Cône, 3. *Obélisque*, 4. Cylindre, 5. Cube, 6. *Sphénisque* (σφηνίσκος, coin), 7. *Miure* (μείουρος, queue effilée), 8. *Colonne* (κίων), 9. *Plinthide* (carreau, πλινθίς), 10. Pyramide.

Cet ordre singulier est précisément celui des *stereometrica* I, sauf que la *colonne* y est placée immédiatement après le cylindre. Il est d'ailleurs conforme à celui adopté dans les *Definitiones* du pseudo-Héron (sphère, cône, cylindre, tore, pyramide, polyèdres réguliers, prisme, parallélépipèdes), qui met de même en géométrie plane le cercle avant les figures rectilignes. C'est un ordre où domine la question de simplicité comme génération pour l'esprit, ce n'est nullement l'ordre logique pour la déduction des théorèmes sur les volumes.

Faut-il croire que Héron, en composant ses *Métriques*, n'avait pas suivi ce dernier ordre, et faut-il voir, dans les coïncidences signalées, une probabilité pour l'authenticité des *Definitiones?* En

---

(¹) *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiæ.* Ed. F. Hultsch; Berlin, 1864, p. 46, 13. — Voir sur cette collection notre *Essai sur l'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie*, tom. IV des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.* (2ᵉ Série.)

aucune façon. Pour la géométrie plane, Héron a certainement placé le cercle après les figures rectilignes, et toute son école l'a suivi. Si une tradition contraire a été adoptée en stéréométrie, et si cette adoption a sans doute eu lieu sous l'influence du traité des *Definitiones*, en même temps que l'élimination de la partie théorique du travail de Héron, les divergences essentielles de la nomenclature du maître et de celle du pseudonyme prouvent suffisamment la différence de leurs points de vue.

Le pseudo-Héron ne connaît point les cinq solides étrangers à Euclide; s'il définit la *plinthide* comme un parallélépipède rectangle dont une dimension est inférieure aux deux autres égales entre elles, et le *sphénisque* comme un parallélépipède rectangle dont les trois dimensions sont inégales, ces solides ne sont nullement ceux de l'Héron authentique qui d'ailleurs appelle *cube* (*Stereom.* I, 23, 24, 25) tout parallélépipède et distingue seulement le *cube tétragone équilatère* (notre cube) et le cube parallélogramme.

Le pseudo-Héron est revenu à Euclide, et cela explique suffisamment le succès de son œuvre. Il rétablit d'ailleurs le prisme que Héron n'énumère pas et qu'il devait évidemment traiter sous un autre nom.

On peut donc conclure que la *Geometria* a été rédigée à une époque où l'ordre logique avait déjà été abandonné par les éditeurs des *Métriques* de Héron pour les parties concernant les solides. Reconstituer cet ordre et déterminer rigoureusement tous les corps traités par le géomètre alexandrin serait d'ailleurs aujourd'hui une tâche impossible. Je me proposerai donc seulement d'analyser les problèmes des 40 premiers paragraphes des *Stereometrica* (I). J'écarterai les 14 derniers qui, comme ceux des *Stereometrica* (II) se rapportent à des mesures pratiques et non à des cubatures de volumes définis géométriquement. En revanche, pour éclaircir autant que possible les points obscurs, je ferai appel aux problèmes des autres recueils de la collection héronienne, lorsque ces problèmes se trouveront semblables à ceux que j'examinerai, c'est-à-dire porteront sur des solides rentrant dans la nomenclature de la *Geometria*.

Dans l'analyse que j'entreprends, je suivrai d'ailleurs l'ordre indiqué par ce dernier recueil, et j'insisterai plus particulièrement sur les cubatures des solides qui ne sont point traités dans la géométrie élémentaire.

II

Sphère. — Le volume V en fonction du diamètre D est calculé (1, 2, 4, 8) ([1]) d'après la formule :

$$V = \frac{D^3 11}{21},$$

présentée (1) comme déduite de la proposition d'Archimède sur le rapport entre la sphère et le cylindre circonscrit.

Le calcul :

$$V = \frac{D^2 11}{14} D \frac{2}{3},$$

qui suit au plus près cette proposition même, est au reste donné (1, 9) également.

Si c'est la circonférence C d'un grand cercle *(le périmètre de la sphère)* qui est donnée (2), on calculera d'abord D par la relation connue en géométrie plane

$$D = \frac{C7}{22} = \frac{C}{22} 7 = C\left(1 - \frac{1}{22}\right)\frac{1}{3}. \quad (\textit{Geometria}, 87\,[6,7], 88\,[2].)$$

La surface S de la sphère, suivant une autre proposition bien connue d'Archimède, était pour les anciens $\frac{22}{7} D^2$. On nous donne les calculs (3 ([2]), 5, 6, 7) sous trois formes différentes :

$$S = \frac{(2D)^2 11}{14} = \frac{D^2 11}{14} 4 = \frac{D^2 44}{14}.$$

([1]) Les chiffres ainsi mis entre parenthèses indiquent les paragraphes de l'édition de Hultsch.

([2]) Dans le problème 3, on a oublié d'élever 2D au carré; ce problème doit donc être considéré comme apocryphe.

Les paragraphes 10, 11, 12 qui se rapportent encore à la sphère, ne sont pas des problèmes, mais des définitions astronomiques empruntées à un traité élémentaire.

Il n'y a point à s'étonner du renvoi fait aux découvertes du géomètre de Syracuse. Pour la géométrie plane, d'après l'introduction de la *Geometria* (p. 46, 16), nous savons que Héron avait de même rangé parmi les principes de la mesure les deux propositions qui découlent de la *Mesure du Cercle* d'Archimède, à savoir que la circonférence C, l'aire A et le diamètre D d'un cercle sont liés par les relations (¹)

$$C = D \times 3\frac{1}{7}.$$

$$CD = 4A.$$

Mais si, pour la géométrie plane, Héron avait probablement démontré ces propositions en faisant de l'ouvrage composé par Archimède *Sur la circonférence du Cercle* (Pappus, éd. Hultsch, V, 312), un extrait analogue à l'édition de la *Mesure du Cercle*, telle que nous la possédons d'après le travail de son imitateur, le mécanicien Isidore de Milet, pour la stéréométrie le géomètre alexandrin a parfaitement pu se contenter de renvoyer sans autres démonstrations à l'ouvrage *Sur la sphère et le cylindre.*

Mais comme pour la mesure de la sphère, celle du cylindre est dès lors supposée connue, il est évident que, dans l'ouvrage original, cette dernière mesure devait précéder l'autre, conformément à l'ordre didactique.

Les formules :

$$V = \frac{D^3 14}{21}, \qquad S = \frac{D^2 11}{14} 4,$$

se retrouvent appliquées *Mensuræ* 36, et le même recueil 37 donne la relation

$$S = DC.$$

(¹) *Héron*, p. 47, ligne 1, on doit lire ὑπὸ au lieu de ἀπὸ.

Cône. — Le cône (circulaire droit) est défini par le diamètre de sa base D et par sa hauteur h. Son volume V est donné sous trois formes différentes (13, 14, 15),

$$V = \frac{D^2 11}{14} \times \frac{h}{3} = \frac{\frac{D^2 11}{14} h}{3} = \frac{D^2 11}{14} \times \frac{1}{3} \times h.$$

Pour la seconde forme, on fait remarquer qu'avant la division par 3, on a le volume du cylindre (D, h), ce qui montre encore que la mesure du cône devait, dans l'ouvrage original, suivre celle du cylindre.

Si le cône est défini par le diamètre D de la base et par la longueur l de la génératrice (κλίμα), on calcule d'abord (15) :

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}.$$

Suivent trois mesures du cône tronqué (κόλουρος).

Dans la première (16) où ce cône est aussi appelé *imparfait* (ὁ καὶ ἀτέλεστος), le solide est défini par les diamètres des deux bases parallèles, D et d, et par la longueur (μῆκος) l, c'est-à-dire probablement la hauteur.

Le volume est calculé par la formule trop faible [1] :

$$V = \frac{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 11}{14} l,$$

qui ne doit nullement être considérée comme héronienne.

Pour la seconde mesure (17) on donne, avec les diamètres, la hauteur (καθέτος) h :

$$V = \frac{(D^2 + d^2 + Dd)\, h . 11}{14}.$$

---

[1] Si l représente non la hauteur, mais la longueur de la génératrice, cette formule serait exacte pour

$$l = \frac{2(D^2 + Dd + d^2)}{\sqrt{7(D+d)^2 - 4Dd}},$$

trop faible ou trop forte, suivant que l serait inférieure ou supérieure à cette valeur.

Pour la troisième (18) on donne au contraire le κλίμα l, la hauteur est calculée

$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{D-d}{2}\right)^2},$$

puis le volume

$$V=\left[\frac{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 11}{14}+\frac{\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 11}{14}\times\frac{1}{3}\right]h.$$

Cette formule qui revient à

$$V=\pi\left[\left(\frac{R+r}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2\right]h,$$

est exacte et plus élégante que la formule ordinaire, en ce qu'elle exige une multiplication de moins.

Quant aux surfaces latérales, nous ne les trouvons calculées que dans les *Mensuræ* :

(43) pour le cône (D, l), appelé isoscèle,

$$S=\frac{\frac{D\,22}{7}\,l}{2};$$

(44) pour le tronc de cône (D, d, h),

$$l=\sqrt{h^2+\left(\frac{D-d}{2}\right)^2},$$

$$S=\frac{(D+d)\,l\,11}{7}.$$

Les calculs de ce dernier problème sont au reste corrompus, et malgré quelques corrections qui s'offrent d'elles-mêmes, l'incertitude qui pèse sur une des données ne permet pas de restituer entièrement le texte.

Obélisque. — Ce terme se rencontre seulement au problème 19 des *Stereometrica* (1) dont voici l'énoncé :

« Un obélisque a pour base un cercle dont le diamètre (D) est de 42 pieds; ses côtés (l) ἐγκεκλασμέναι sont de 75 pieds. »

On calcule la hauteur

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

et le volume

$$V = \frac{D^2\, 11}{14} \times \frac{h}{3}.$$

Évidemment il s'agit là d'un simple cône et la leçon ἐγκεκλασμέναι (brisés) est vicieuse, de même que celle d'un autre manuscrit ἐγκεκλεισμέναι. Il faut sans doute lire ἐγκεκλιμέναι (inclinés).

On reste livré à des conjectures sans appui pour la question de savoir quel solide Héron avait traité sous le nom d'obélisque et qui différait nécessairement du cône circulaire droit. L'hypothèse la plus simple à faire est sans doute qu'il aurait adopté ce terme pour désigner le cône circulaire oblique.

Cylindre. — Défini (20) par sa longueur l, et la circonférence C du cercle de base, le volume du cylindre est calculé

$$V = \frac{C^2\, 7}{88}\, l.$$

Défini (21) par la longueur ou axe l, et par le diamètre D du cercle de base, le volume est calculé

$$V = \frac{D^2\, 11}{14}\, l$$

et la surface (latérale)

$$S = D \times 3\frac{1}{7} \times l.$$

III

Cube. — Déterminé par ses trois dimensions a, b, c, le volume du cube de Héron ou parallélépipède est calculé par leur produit (24, 25). Le problème 25, où l'on calcule le volume du cube *tétragone équilatère* de côté a par $\frac{60\, a^3}{60}$ est à bon droit suspect.

L'expression *cube tétragone* se rencontre encore dans le pro-

blème 2 des *Stereometrica* (II) où il est proposé d'inscrire un cube dans une sphère de diamètre D. La solution de ce problème est erronée, on y calcule en fait le côté du carré inscrit dans un cercle de diamètre D.

Sphénisque. — Après le cube, on rencontre trois problèmes dont voici les énoncés :

(26) « Un sphénisque a une longueur (c) de 25 pieds; la plus » grande largeur (a) est de 7 pieds, la moindre (a') de 5; la plus » grande épaisseur (b) est de 6 pieds, la moindre (b') de 4. »

Ce volume est calculé par

$$V = \frac{a+a'}{2} \times \frac{b+b'}{2} \times c.$$

(27) « Autrement. Un sphénisque, qui est appelé par quelques» uns onglet (ὄνυξ), a à la tête (une largeur a' de) 6 doigts; l'autre (a) » est de 10 doigts; l'épaisseur (b) est de 8; [la longueur (c) » de 8] [1]. »

Le volume calculé est

$$V = \frac{(a+a')bc}{4}.$$

(28) « Autrement. Un onglet a une longueur (c) de 10 doigts, une largeur (a) de 6 doigts, une épaisseur (b) de 5 doigts.

Le volume calculé est

$$V = \frac{abc}{2}.$$

La seconde de ces formules se déduit de la première en y faisant $b = 0$, la troisième se déduit de la seconde en y faisant $a = a'$. Mais en fait, il y a là évidemment trois solides différents.

Occupons-nous, sous le nom de *sphénisque,* du premier de ces solides. Évidemment ce n'est pas le *sphénisque* ou *bômisque* des *Definitiones* (114), simple parallélépipède rectangle à trois côtés

[1] Les mots entre parenthèses sont omis dans le texte, mais la longueur est donnée plus loin.

inégaux. Certainement aussi ce solide n'est pas terminé par des faces planes, et l'on peut se demander dès lors si l'on ne se trouve pas en présence d'une mesure seulement approximative. Mais s'il est facile de déterminer un solide géométrique dont la cubature s'obtienne rigoureusement par la formule donnée, on peut admettre que Héron, marchant sur les traces d'Archimède, a su cuber des volumes terminés par des surfaces du second degré.

En tout cas, j'appellerai *sphénisque* un solide à six faces, dont deux soient des trapèzes dont les plans soient parallèles, ainsi que les bases de ces trapèzes, d'ailleurs égales de l'un à l'autre. Soient a, a' ces bases, b, b' les hauteurs de ces deux trapèzes, c la distance de leurs plans.

Deux autres faces du sphénisque seront dès lors nécessairement des parallélogrammes dont les plans prolongés se couperont suivant une droite D parallèle aux bases des trapèzes. Soit x la distance de cette droite au plan du trapèze $(aa'b')$ le plus voisin, on aura :

$$\frac{x}{c+x} = \frac{b'}{b}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{cb'}{b-b'}.$$

Enfin les deux dernières faces du sphénisque seront formées chacune par une surface réglée du second degré ayant pour directrices la droite D et deux côtés non parallèles, un dans chacun des deux trapèzes.

Ces trois directrices étant parallèles à un même plan (parallèle aux faces trapèzes), cette surface sera un paraboloïde hyperbolique ou plan gauche qu'on pourra évidemment considérer aussi comme engendré par une droite parallèle aux faces trapèzes et ayant pour directrices deux côtés des faces parallélogrammes.

Pour déterminer le volume du sphénisque, coupons-le par deux plans infiniment voisins et passant tous deux par la droite D. Chaque section sera un parallélogramme. Soit pour l'une d'elles, u le côté parallèle à la droite D.

L'élément intercepté par ces deux sections peut, en négligeant les infiniment petits de second ordre, être considéré comme la différence de deux prismes triangulaires ayant pour volumes, le plus grand $\frac{u(c+x)}{2}\,db$, l'autre $\frac{ux}{2}\,db'$.

Mais on a immédiatement

$$\Sigma u db = \frac{a+a'}{2} b,$$

$$\Sigma u db' = \frac{a+a'}{2} b'.$$

D'où le volume cherché est

$$V = \frac{a+a'}{4} [bc + x(b-b')].$$

En substituant la valeur de x donnée plus haut, on retrouve la formule héronienne

$$V = \frac{(a+a')(b+b')c}{4}.$$

On peut passer de cette formule à celle du problème 26 *(sphénisque-onglet)* en faisant soit $b' = 0$, soit $a' = 0$.

Dans le premier cas, on a un solide à cinq faces terminé d'un côté par un trapèze dont la hauteur est b, et les côtés parallèles a et a'. De l'autre côté ce solide présentera une arête parallèle à ces côtés a, a'. Deux faces seront des parallélogrammes partant des côtés parallèles du trapèze et aboutissant à cette arête. Chacune des deux dernières faces sera un plan gauche ayant pour directrices l'arête et un côté non parallèle du trapèze, et pour plan directeur un plan parallèle aux deux côtés des parallélogrammes qui limitent le plan gauche. J'appellerai *miure* ce solide dont le volume sera

$$V = \frac{(a+a')bc}{4}.$$

Dans le second cas, on aura également un solide à cinq faces, limité : 1° par deux triangles dont les plans seront parallèles, ainsi que les bases égales entre elles et à a, et dont nous désignons les hauteurs par b, b', appelant d'ailleurs c la distance de ces deux faces; 2° par un parallélogramme joignant les deux bases des triangles; 3° par deux plans gauches ayant pour directrices la droite joignant les sommets des triangles et un côté de parallélo-

gramme et pour plan directeur l'une des deux faces triangulaires. J'appellerai *sphénisque-onglet* ce solide dont le volume sera

$$V = \frac{a(b + b')c}{4}.$$

En supposant égales les deux hauteurs des triangles, on aura l'*onglet*, de volume

$$V = \frac{abc}{2},$$

qui peut se réduire, comme cas particulier, à un prisme triangulaire.

Miure. — J'ai déjà donné ce nom héronien à un solide dérivé du *sphénisque*. Mais cette dérivation n'est point un motif de croire que Héron n'ait pas traité ces deux solides dans deux théorèmes différents.

En tout cas, en supposant $a = a'$, c'est-à-dire le trapèze de base devenu parallélogramme, le volume est donné par une formule

$$V = \frac{ab}{2}c$$

qui s'applique aux calculs du problème (29) :

« Un *miure* προεσκαριφευμένον (creusé? en avant) a une lon-
» gueur (c) de 30 pieds, une largeur (a) de 6 pieds, une
» épaisseur (b) de 4 pieds. »

Le sens des expressions grecques me paraît se rapporter suffisamment à la forme du solide que j'ai défini, pour justifier ce rapprochement.

Cependant, cette fois, nous avons à examiner quelques problèmes des autres collections héroniennes où revient ce terme de *miure* dont la signification semble de fait avoir été assez flottante.

Stereometrica (II). 21. « La longueur (l) d'une pierre *miure* est
» de 8 pieds, la plus grande largeur (a) de 3 pieds, la moindre (a')
» de 2 pieds. »

Le volume est calculé par

$$V = \frac{a^2 + a'^2}{2} l.$$

Il semble qu'il s'agit là d'un tronc de pyramides à base carrée, calculé par une formule d'approximation égyptienne, analogue à la formule fausse que nous avons vue pour le tronc de cône.

Mensuræ 8. — Problème corrompu dont voici la traduction : « Nous mesurerons comme suit un bois *myure;* soit la longueur » de 12 pieds, la largeur de 11 doigts, la moyenne (largeur) de » 9 doigts, l'épaisseur de 8 doigts. Fais comme suit : carré (¹). La » moitié de 8 est 4; multiplié par 9, 36; multiplié par la lon- » gueur, 432 doigts, c'est-à-dire 30 pieds (²). »

Les manuscrits portent non pas μείουρον mais μύουρον *(queue de souris)* qui peut, soit être une corruption, soit avoir un sens différent. D'un autre côté, la largeur de 11 doigts n'intervient pas dans le calcul, comme si le copiste avait omis une largeur moindre de 7 doigts pour y substituer immédiatement la largeur moyenne, seule employée de fait plus loin. Dans ces conditions la mesure peut être assimilée à celle du *sphénisque-onglet* ou à celle du *miure*.

Didyme 5 : « Un bois *myure* de 13 *coudées* de long, 15 doigts de large, 8 doigts d'épaisseur ou de hauteur » (leçons des manuscrits), est calculé suivant la formule

$$V = abc\left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

Les mesures de Didyme sont purement pratiques et n'ont, par suite, guère d'importance pour la théorie. Je remarque seulement que cette mesure (5) précède celles des bois dits carrés calculés par $V = abc$, et suit celle d'un bois rond (4), défini par la longueur l et la circonférence C, et calculé par $V = \frac{C^2}{12}l$, formule qui correspond à l'approximation $\pi = 3$.

(¹) τετράγωνον, mot incompréhensible; peut-être τὸ τρίγωνον; pour indiquer qu'on mesure comme pour un triangle $\frac{8 \times 9}{2}$.

(²) D'après les données, le doigt linéaire valant $\frac{1}{16}$ du pied, le produit 432 ne représente pas des doigts cubes, mais des unités valant $\frac{1}{256}$ de pied. Il vaut donc en pieds cubes $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$. Mais les mesures des bois paraissent s'être faites d'ordinaire en coudées et doigts pour les unités linéaires, et en unités toutes spéciales pour le volume. Voir notre note *Les mesures des marbres et des divers bois de Didyme d'Alexandrie* dans la *Revue archéologique*, mars 1881.

Or *Mensuræ* 7 : Nous trouvons la mesure d'un bois rond (στρογγύλον) appelé *myure* dans un manuscrit. Soit D son diamètre, l sa longueur, il est mesuré suivant la même approximation par $V = D^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)l$. En rapprochant cette mesure de celle de *Didyme* 5, on est porté à croire que cette dernière se rapporte à un bois à section ovale.

Colonne. — D'après la position qu'occupe ce terme dans l'ordre indiqué par la *Geometrica*, je suis porté à croire qu'il était employé par Héron pour distinguer le prisme, solide qui, autrement, n'aurait pas été traité par lui. Mais cette signification a disparu dans les problèmes sur les colonnes de la collection héronienne, où les mesures paraissent purement pratiques.

Stereometrica (I) 22. On donne la longueur l, les deux diamètres D et d des bases inférieure et supérieure sont déterminés par les proportions du nouvel ordre dorique

$$D = \frac{l}{7}, \qquad d = \frac{l}{8}.$$

Le volume calculé est

$$V = \left(\frac{D + d}{2}\right)^2 \frac{11}{4}\, l;$$

la surface latérale

$$S = \left(\frac{D + d}{2}\right) 3\frac{1}{7} \times l.$$

On nous dit, au reste, que ce procédé (pour le volume) n'est pas celui des anciens, mais qu'il est dû à un nommé Patricius. Les calculs sont d'ailleurs erronés et le volume exagéré, tandis que, d'après la formule, il devrait être trop faible, même sans tenir compte du galbe de la colonne, et en la calculant comme un tronc de cône.

Stereometrica (II) 15. On donne l, D, d, et le volume est calculé d'après la formule de Patricius.

Stereometrica (II) 16. On donne l, D, d, $\left(\frac{d}{D} = \frac{3}{4}\right)$ et le volume

est calculé par la formule

$$V = D^2 l\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{8} D^2 l.$$

Cette formule, qui suppose évidemment un rapport déterminé entre D et d, donne un résultat un peu fort, si on ne calcule la colonne que comme un tronc de cône avec la valeur $\pi = \frac{22}{7}$. Elle serait exacte pour

$$\frac{d}{D} = \frac{6}{\sqrt{22}} - \frac{1}{2} = 0{,}779.$$

Stereometrica (II) 24. La colonne est carrée (tronc de pyramide à base carrée); les calculs ne sont pas effectués.

Mensuræ 11. Les calculs sont tout à fait corrompus et n'aboutissent pas.

Plinthide. — Comme nous l'avons dit plus haut, la *plinthide* (carreau) des *Definitiones* (113) est un parallélépipède rectangle à base carrée, $a^2 b$ ou $a < b$, tandis que si $a > b$, le solide s'appelle *dokos* (solive).

Le *dokos* se retrouve *Stereometrica* (I) 48, mais il y désigne un corps naturel, une solive, et non un solide géométrique. Il y est naturellement mesuré par le produit de ses trois dimensions, comme le cube de Héron.

Le terme *plinthide* reparaît bien aussi dans les *Stereometrica* (I) 30, mais dans ce paragraphe très corrompu et dû sans doute à une interpolation byzantine, il n'y a pas de problème; on n'y parle que de la proportion bien connue

$$6 : 8 :: 9 : 12.$$

Sa présence dans un traité de stéréométrie peut provenir d'une remarque sur le nombre des faces, des sommets et des arêtes de l'hexaèdre.

Je crois qu'on peut retrouver le solide géométrique traité par Héron sous le nom de *plinthide* dans le *bômisque* (autel) des *Stereometrica* (II) 40. C'est un solide compris sous deux faces

rectangulaires ab, $a'b'$, parallèles et distantes de h, et sous quatre faces trapèzes inclinées. Il diffère d'un tronc de pyramide en ce que les faces rectangulaires ne sont pas semblables [1].

Le volume de ce solide est calculé par

$$V = \left(\frac{a+a'}{2}\frac{b+b'}{2} + \frac{1}{3}\frac{a-a'}{2}\frac{b-b'}{2}\right)h.$$

La même formule est appliquée, *Stereometrica* (I) 35, à un solide désigné comme une pyramide *hétéromèque* et *colure* ou *inachevée*. Comme l'a remarqué M. Cantor (*Vorlesungen*, p. 339), cette désignation n'est point exacte, cependant la formule est facile à vérifier [2].

Le volume peut en effet se calculer en sommant :

1° Un parallélépipède rectangle $a'b'h$,

2° Quatre pyramides de hauteur h et dont la somme des bases est évidemment $(a-a')(b-b')$,

3° Quatre prismes triangulaires qui peuvent être considérés comme moitiés de parallélépipèdes rectangles ayant pour hauteur h et pour somme des bases $a'(b-b') + b'(a-a')$.

On a donc

$$V = h\left[a'b' + \frac{1}{3}(a-a')(b-b') + \frac{1}{2}(a'b + ab' - 2a'b')\right].$$

Comme d'ailleurs

$$a'b + ab' = \frac{1}{2}[(a+a')(b+b') - (a-a')(b-b')],$$

on retrouve immédiatement la formule ci-dessus, dont on remar-

---

(1) Ce terme de βωμίσκος se trouve employé par Pappus VII (éd. Hultsch, p. 878, 6), pour désigner une figure plane où l'on peut voir la projection d'un solide limité par deux faces quadrilatères quelconques dont les plans sont parallèles et huit faces triangulaires passant par un sommet de l'un des quadrilatères et par un côté de l'autre.

(2) Dans ce dernier problème, au reste, on donne au lieu de h la longueur l des arêtes inclinées; on calcule

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{(a-a')^2}{2} + \frac{(b-b')^2}{2}\right]}.$$

quera l'élégance et l'analogie avec une formule déjà vue pour le tronc de cône.

Pyramide. — Les mesures qu'on rencontre dans les *Stereometrica* (I) sont toutes relatives à des pyramides isoscèles, dont la base est un carré ou un triangle.

1° Base carrée (31, 32, 40). On donne le côté a de la base et le χλίμα (arête) l.

On calcule la hauteur

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}} \quad (31)\ (40)$$

ou

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{2a^2}{4}}, \quad (32)$$

puis le volume

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (31)\ (40)$$

ou

$$V = \frac{a^2}{3} h. \quad (32)$$

Les problèmes (31) (32) se retrouvent plus ou moins fidèlement copiés *Mensuræ* 39, 41, et (31) (40) *Geepon.* 74, 73. Cette dernière collection 71 donne le calcul de la surface latérale (le problème est au reste corrompu),

$$S = \frac{\left(\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right) a}{2} 4.$$

2° Base triangle équilatérale (36, 37). On donne le côté a de la base et le χλίμα l.

On calcule la hauteur

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{3}},$$

puis la base par la formule de la géométrie plane (1)

$$B = a^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right),$$

(1) Voir notre Essai : *L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie*, dans le tome IV (2e Série) des *Mémoires de la Société*.

enfin,

$$V = \frac{B}{3} h = \frac{Bh}{3}.$$

Le problème (36) se retrouve *Stereometrica* (II) 35 et *Mensuræ* 40.

3° Base triangle rectangle (38). Le même problème *Stereometrica* (II) 34. On donne les côtés $a^2 = b^2 + c^2$ de la base et l'arête (πλευρά) l.

On calcule

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$V = \frac{bc}{2} \times \frac{h}{3}.$$

Les *Stereometrica* (I) contiennent enfin trois problèmes sur des troncs de pyramides (isoscèles).

1° Bases carrées (33, 34). On donne les côtés a, a' des bases et l'arête inclinée l (κλίμα).

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{(a-a')^2}{2}},$$

$$V = \left[\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-a'}{2}\right)^2\right] h,$$

formule analogue à celles de la *plinthide* et du tronc de cône.

Dans le problème (34), comme l'a remarqué M. Cantor (*Vorlesungen*, p. 339), $\frac{(a-a')^2}{2} > l^2$, les données correspondent donc à une hauteur imaginaire, qui est prise pour réelle. Les calculs offrent une autre trace de corruption.

Au lieu de calculer directement h, on calcule d'abord la hauteur d'un des trapèzes latéraux :

$$h_1 = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a-a'}{2}\right)^2},$$

puis

$$h = \sqrt{\left(\frac{a - a'}{2}\right)^2 - h_1^2},$$

au lieu de

$$h = \sqrt{h_1^2 - \left(\frac{a - a'}{2}\right)^2}.$$

Le même problème encore plus corrompu se retrouve *Mensuræ* 42.

2° Bases triangles équilatères (39). Côtés des bases *a* et *a'*, κλίμα *l*.

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a - a'}{3}\right)^2},$$

$$V = \left[\left(\frac{a + a'}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a - a'}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)\right] h,$$

formule exacte comme les précédentes analogues, si l'on suppose avec Héron

$$\sqrt{3} = \frac{26}{15}.$$

On rencontre enfin dans les *Stereometrica* (II) des calculs de volumes de pyramides (isoscèles) à base pentagone (36), hexagone (36,7) octogone (37) et enfin d'une pyramide dite ξυστρωτή (évidée) c'est-à-dire ayant pour base un triangle équilatère dont on a retranché des segments de cercle décrits sur les côtés.

Ces calculs n'offrent évidemment quelque intérêt qu'en ce qui concerne la détermination de la base, qui est affaire de géométrie plane. Cependant, pour être complet dans ces recherches, j'en dirai quelques mots, destinés surtout, au reste, à montrer que ces problèmes ne peuvent remonter à Héron, à l'exception peut-être d'un seul.

Sauf (37), en effet, ils sont tous entachés d'une erreur singulière; la pyramide y est calculée comme le *sixième* et non le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

Dans ces quatre problèmes, comme l'arête inclinée est donnée

et non la hauteur, il y a pour calculer celle-ci à déterminer le rayon du cercle circonscrit au polygone de base.

Le rédacteur de (38) ne sait même pas calculer ce rayon pour le triangle équilatéral. Il prend, a étant le côté du triangle,

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2},$$

au lieu de

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}.$$

Pour le pentagone, le rédacteur se donne en même temps que le côté a, la circonférence circonscrite C. D'après ses données, $\frac{C}{a} = \frac{21}{4}$; ce qui le conduit pour le diamètre D du cercle circonscrit au rapport $\frac{D}{a} = \frac{5}{3}$, mauvaise approximation, connue d'ailleurs.

Il ajoute qu'on peut procéder autrement et invoque ce théorème euclidien, que le côté du pentagone, le côté de l'hexagone ou rayon, et le côté du décagone inscrit dans le même cercle, forment les trois côtés d'un triangle rectangle (*Éléments*, XIII, 10). Il se sert de ce théorème en supposant que le côté du décagone est *moitié* de celui du pentagone. Il arrive ainsi à calculer (¹)

$$R = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}!$$

Pour l'octogone, la formule

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left[\frac{a}{2} + \sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right]^2$$

est exacte.

(¹) L'approximation qui résulterait de cette hypothèse pour le calcul de la surface du pentagone serait $\frac{5}{2\sqrt{2}} a^2 = 1.76777$, à peu près aussi inexacte par excès que l'approximation $\frac{5}{3} a^2$ par défaut à laquelle reviennent les calculs précédents. La valeur exacte $1.720477\, a^2$ est beaucoup plus voisine de l'autre approximation héronienne $\frac{12}{7} a^2$.

Quant au calcul des surfaces des polygones réguliers, le rédacteur de (38) ne connaît pas la formule authentiquement héronienne pour le triangle équilatéral

$$S = a^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right),$$

qu'on retrouve (36) pour la détermination de celle de l'hexagone, considéré comme formé de six triangles équilatéraux. Dans (38) la surface est déterminée au moyen du calcul de la hauteur, obtenu par l'extraction d'une racine carrée, $\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Mais cette extraction est faite avec si peu de rigueur que l'approximation est moins grande que ne le serait celle de la formule héronienne.

Pour le pentagone (36), le calcul est fait de même au moyen de l'apothème déterminé par l'extraction d'une racine carrée; mais, d'après les données, il revient à la mauvaise approximation $S = \frac{5}{3}a^2$, dont cependant le rédacteur ne semble pas avoir connaissance.

Pour l'octogone, au contraire, si les calculs de la surface ne sont pas indiqués, le résultat indique qu'on a employé la formule approximative héronienne $S = \frac{29}{6}a^2$, au lieu de se servir de l'apothème $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2}}$, déterminée plus haut.

Enfin (38), pour la détermination du segment de cercle en fonction de la corde S et de la flèche h, le rédacteur paraît avoir employé la formule

$$A = (S + h)\frac{h}{2},$$

qui ne se trouve pas ailleurs. Toutefois, comme d'après les données $\frac{h}{2} = 1$, il n'a pas indiqué la multiplication par ce facteur, je reviendrai à une autre occasion sur les formules approxima-

tives des collections héroniennes relatives au calcul des segments de corde. Mais avant de terminer, je crois pouvoir me permettre ici une remarque personnelle qui touche mon essai publié par la Société sur l'*Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie.*

Notre éminent correspondant, le docteur S. Günther, a donné récemment dans les *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* une étude savante et approfondie *Sur les irrationnelles quadratiques chez les anciens et sur les méthodes de leur développement.* Après avoir exposé les procédés essayés par divers auteurs pour retrouver les valeurs numériques de racines carrées calculées par approximation chez les anciens, S. Günther m'a fait l'honneur de se rallier à mes vues, développées dans mon essai précité, sous réserve de leur application à quelques cas particuliers.

J'ai d'autant moins l'intention de soulever de discussion sur ces cas particuliers, qu'ils sont relatifs à des racines que je considère comme inauthentiques. Mais je veux insister sur ce point que si j'ai essayé de distinguer les résultats que l'on peut regarder comme obtenus par Héron lui-même ou par des disciples appliquant régulièrement la méthode qu'il avait enseignée dans ses *Métriques,* si j'ai essayé d'en séparer au contraire les racines qui n'ont pas ce caractère, je ne me suis jamais laissé guider par la valeur numérique même des racines approchées, mais seulement par l'étude du problème dans lequel je les rencontrais.

Je ne pouvais naturellement entrer dans des détails circonstanciés à cet égard, et je ne le puis pas davantage aujourd'hui. Mais je prendrai un seul exemple.

L'approximation

$$\sqrt{356\frac{1}{18}} = 18\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{9},$$

qui ne se prête pas à l'application rigoureuse des règles que j'ai indiquées, se rencontre précisément dans ce problème 38 des *Stereometrica* (II) dont je viens de parler.

J'en ai dit assez pour prouver l'ignorance où était son rédacteur et de la géométrie en général et des pratiques de Héron les plus

répandues. Dois-je supposer qu'il suivait un procédé parfaitement régulier dans l'extraction d'une racine carrée? Mon doute ne s'augmente-t-il pas quand, pour déterminer le nombre même dont il doit extraire la racine carrée, je le vois commettre une erreur de calcul et poser

$$400 - 43\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{9} = 356\,\frac{1}{18},$$

alors que cette différence est $356\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{252}$? Il est clair que dans les conditions où se présente la racine dont il s'agit, je ne puis attacher aucune importance à la question de savoir si la partie fractionnaire de la racine a été obtenue par le moyen que j'ai supposé ou par celui qu'indique M. Günther.

J'en dirais autant pour les autres racines qui se trouvent dans le même cas; ainsi, la croyance où je suis d'avoir réellement retrouvé la méthode de Héron pour l'extraction de la racine carrée repose précisément sur ce fait que les règles que j'ai supposées s'appliquent au moins à toutes les racines qui se présentent avec un caractère d'authenticité, je ne dirai pas assuré, mais seulement suffisant. Ce fait, je ne pouvais prétendre le démontrer à mes lecteurs; je n'en suis que plus heureux d'avoir obtenu, sans cette démonstration, l'assentiment de M. Günther.

NOTE

SUR

LA DÉFORMATION DES IMAGES RÉFRACTÉES

ET SUR

L'APLANÉTISME D'UN SYSTÈME DE LENTILLES

PAR M. LE GÉNÉRAL PEAUCELLIER

Considérons deux milieux transparents homogènes, inégalement réfringents, séparés par une surface sphérique AM (*fig.* 1), dont le centre est O. Soit n l'indice de réfraction du milieu de droite par rapport au milieu de gauche. Soit $AO = R$ le rayon de courbure de la surface AM, que nous supposerons limitée à un très petit angle AOM.

Par analogie avec la convention habituellement observée pour les abscisses, nous appellerons rayon incident *positif* un rayon tel que CM allant de gauche à droite, et rayon incident *négatif* un rayon tel que C′M allant de droite à gauche.

Soit CM un rayon incident parallèle à AO; ce rayon est réfracté suivant FMD. La loi générale de la réfraction nous donne

$$\frac{\sin \text{OMD}}{\sin \text{OMC}'} = n,$$

ou identiquement

$$n = \frac{\sin \text{OMF}}{\sin \text{MOF}} = \frac{\text{FO}}{\text{FM}}.$$

Comme l'arc AM est très petit, on a, en négligeant un infiniment petit du second ordre,

$$\text{FM} = \text{FA};$$

donc

$$n = \frac{FO}{FA} = \frac{FA + R}{FA},$$

$$n - 1 = \frac{R}{FA},$$

d'où

$$FA = \frac{R}{n - 1}.$$

Cette longueur FA étant indépendante du choix du point M, un faisceau de rayons positifs CM parallèle à AO est réfracté en un faisceau de rayons divergents MD qui passent tous par un point fixe F.

Le point F est le foyer principal positif.

On reconnaîtrait de même qu'un faisceau de rayons négatifs C'M parallèles à OA est réfracté en un faisceau de rayons divergents F'MD' qui passent tous par un point fixe F' situé à une distance

$$OF' = \frac{R}{n - 1} = FA.$$

Le point F' est le foyer principal négatif.

Cela posé, soit un faisceau de rayons incidents négatifs PM issus d'un point P de la droite AO (*fig.* 2). Nous limitons la surface AM en sorte que les angles d'incidence soient très petits. Le rayon PM est réfracté suivant la direction QMG, et la loi générale de la réfraction nous donne

$$\sin OMP = n . \sin OMQ.$$

Les angles OMP et OMQ étant très petits, on a, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre :

$$\widehat{OMP} = n . \widehat{OMQ},$$

ou identiquement

$$MOA - MPA = n (MOA - MQA),$$

(1) $$\frac{1}{R} - \frac{1}{AP} = n \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{AQ}\right),$$

relation indépendante du choix du point M.

Le faisceau émané du point P est donc réfracté suivant un faisceau qui peut être considéré comme divergent du point Q.

Le point Q est le foyer conjugué du point P.

La relation (1) entre AP et AQ est du premier degré par rapport chacune de ces deux variables. Désignons un instant ces deux distances par X et Y. Cette relation pourra être identifiée avec une équation de la forme

$$XY + AX + BY + C = 0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole; par un simple changement de l'origine des coordonnées, elle peut recevoir la forme

$$xy + K = 0.$$

Cela signifie que le produit des distances respectives des points P et Q à deux points fixes de la droite AO est constant.

Quels sont ces deux points fixes?

Faisons $x = +\infty$.

Il en résulte $y = 0$.

C'est-à-dire que l'origine des y est le point F', foyer principal négatif. De même l'origine des x est le point F, foyer principal positif.

Quant à la valeur du produit constant, elle s'obtient en considérant le faisceau émané du point O. Ce point se confond évidemment avec son conjugué, donc

$$xy = FO.F'O.$$

Si nous convenons de compter les x positivement de gauche à droite à partir de F, et les y de la même manière à partir de F', nous avons

$$(2) \qquad FP.F'Q = xy = FO.F'O = -\frac{n}{(n-1)^2}R^2.$$

Ces principes étant rappelés, soit une courbe PP_1 (*fig.* 3) normale en P à l'axe principal.

Considérons les parties de cette courbe très voisines du point P. Chaque point, tel que P_1, de la courbe, a son foyer conjugué en un point Q_1 situé sur la droite OP_1. Le lieu de ces foyers conjugués constitue l'image de la figure PP_1.

Cherchons la relation entre le rayon de courbure ρ de la ligne PP_1 et le rayon de courbure ρ' de l'image QQ_1.

Différentions l'équation (2). Nous trouvons

$$F'Q.dFP + FP.dF'Q = 0. \tag{3}$$

Pour exprimer dFP, traçons du point O comme centre les arcs de cercle Pp, FF_1, $F'F'_1$. On a

$$dFP = F_1P_1 - FP = F_1P_1 - Fp = pP_1 = pH + HP_1.$$

L'angle en O étant très petit, les quantités pH et HP_1 peuvent être remplacées par leurs projections sur OP.

Ainsi

$$pH = p'P = \frac{\overline{pP}^2}{2OP},$$

$$HP_1 = PP'_1 = \frac{\overline{PP}_1^2}{2\rho}.$$

De plus PP_1 peut être remplacé par Pp. Donc

$$dFP = \frac{\overline{pP}^2}{2}\left(\frac{1}{OP} + \frac{1}{\rho}\right).$$

On trouve de même, en tenant compte de la valeur algébrique des longueurs:

$$dF'Q = \frac{\overline{Qq}^2}{2}\left(\frac{1}{OQ} + \frac{1}{\rho'}\right).$$

L'équation (3) qui peut s'écrire

$$\frac{dF'Q}{dFP} = -\frac{F'Q}{FP}$$

devient donc

$$-\frac{F'Q}{FP} = \left(\frac{Qq}{Pp}\right)^2 \frac{\frac{1}{OQ} + \frac{1}{\rho'}}{\frac{1}{OP} + \frac{1}{\rho}} = \left(\frac{OQ}{OP}\right)^2 \frac{\frac{1}{OQ} + \frac{1}{\rho'}}{\frac{1}{OP} + \frac{1}{\rho}},$$

ou

$$-\frac{F'Q}{FP} = \frac{OQ}{OP}\,\frac{1 + \frac{OQ}{\rho'}}{1 + \frac{OP}{\rho}}. \tag{4}$$

Or nous avons

$$FP = x, \qquad F'Q = y,$$

$$OQ = F'Q - F'O = y + \frac{R}{n-1},$$

$$OP = FP - FO = x - \frac{nR}{n-1}.$$

Afin de n'avoir d'autre variable que x, remplaçons y par sa valeur tirée de l'équation (2),

$$y = -\frac{n}{(n-1)^2} \cdot \frac{R^2}{x};$$

on aura

$$OQ = \frac{R}{n-1} - \frac{nR^2}{(n-1)^2 x}.$$

Substituant dans l'équation (4), il vient

$$\frac{n}{(n-1)^2}\frac{R^2}{x^2} = \frac{\frac{R}{n-1} - \frac{nR^2}{(n-1)^2 x}}{x - \frac{nR}{n-1}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\rho'}\left[\frac{R}{n-1} - \frac{nR^2}{(n-1)^2 x}\right]}{1 + \frac{1}{\rho}\left(x - \frac{nR}{n-1}\right)}.$$

Cette relation simplifiée devient identiquement

$$(5) \qquad \frac{n}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{n-1}{R},$$

remarquable en ce que la variable x se trouve éliminée.

Ainsi la courbure de l'image est indépendante de l'éloignement de l'objet. Cette courbure ne dépend donc que de l'indice de réfraction, et du rayon de la surface sphérique réfringente.

Nous pouvons maintenant supposer que les rayons réfractés rencontrent une deuxième surface sphérique dont le centre O' soit placé sur la droite PO. La deuxième réfraction produira une image qui sera le lieu des foyers conjugués des points Q. Dans le cas habituel d'une lentille de verre placée dans l'air, le deuxième indice de réfraction est l'inverse du premier. Appelons R' le rayon de la deuxième surface sphérique (*fig.* 4), et ρ_1 le rayon de courbure de l'image due à la deuxième réfraction.

La relation entre ρ_1 et ρ' s'obtient en substituant, dans l'équation (5) $\frac{1}{n}$ à n, ρ' à ρ, ρ_1 à ρ' et R' à R. On trouve ainsi

$$(6)\qquad \frac{1}{\rho'} - \frac{n}{\rho_1} = -\frac{n-1}{R'}.$$

Ajoutons membre à membre les équations (5) et (6) pour éliminer ρ' il vient

$$(7)\qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

C'est-à-dire que la courbure de l'image est indépendante à la fois de l'épaisseur de la lentille et de l'éloignement de l'objet par rapport à cette dernière.

Cette relation a été démontrée à l'aide d'un dessin représentant, pour fixer les idées, une lentille en forme de ménisque; mais elle est générale si l'on tient compte des signes à attribuer aux rayons de courbure R, R', ρ et ρ_1, signe positif quand la concavité est tournée vers la droite, et signe négatif quand elle l'est en sens contraire.

Considérons maintenant un système de m lentilles montées sur un même axe principal. Appelons $R_1, R'_1, R_2, R'_2, \ldots, R_m, R'_m$ les rayons de courbure de leurs faces; $n_1, n_2, \ldots, n_m$ les indices de réfraction des substances dont elles sont formées; enfin, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ les rayons de courbure des images successives d'un petit arc normal à l'axe et ayant comme précédemment ρ pour rayon de courbure.

On aura, d'après ce que l'on vient de voir, les égalités

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{n_1-1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1}\right),$$

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{n_2-1}{n_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{\rho_{m-1}} - \frac{1}{\rho_m} = \frac{n_m-1}{n_m}\left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R'_m}\right).$$

Additionnant ces égalités membre à membre, il vient

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} = \frac{n_1-1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1}\right) + \frac{n_2-1}{n_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n_m-1}{n_m}\left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R'_m}\right) = \sum \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

ou enfin

$$(8) \qquad \frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{\rho} + \sum \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right),$$

C'est-à-dire que la courbure de l'image d'un élément de courbe normal à l'axe, après m réfractions, sera égale à celle de cette courbe augmentée de la somme des produits des coefficients $\frac{n-1}{n}$, relatifs à chaque lentille par la différence de courbure correspondante des faces.

La courbure de l'image est donc indépendante comme précédemment des épaisseurs des lentilles et de la distance de la ligne lumineuse, elle est de plus indépendante de l'écartement des divers éléments du système de lentilles considéré.

Si on appelle f la distance focale d'une lentille, e son épaisseur, on a

$$f = \frac{nRR'}{(n-1)\,[n(R-R') + (n-1)e]}$$

ou

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{e}{RR'}\right],$$

et si l'on néglige l'épaisseur e, comme on le fait d'habitude dans les Traités de physique,

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right).$$

Dans ces conditions, la relation (8) deviendra

$$(9) \qquad \frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{\rho} + \sum \frac{1}{nf}.$$

On sait que dans tout système de lentilles ayant même axe principal, les contours d'une figure lumineuse et de son image sont situés respectivement sur deux cônes homothétiques dont les sommets répondent à cet axe principal. Pour qu'il y ait similitude entre les deux figures, il faut évidemment que les sphères osculatrices de rayons ρ et ρ_m soient elles-mêmes homothétiques par rapport à ces deux points. Nous ne nous arrêterons pas à

l'expression analytique qui exprime cette condition, nous bornant au seul cas intéressant dans la pratique, celui d'un *système aplanétique*.

L'aplanétisme exige que l'image d'une figure plane normale à l'axe soit elle-même plane. Dans ce cas $\frac{1}{\rho}=0$, $\frac{1}{\rho_m}=0$. Donc alors

$$\sum \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)=0, \tag{10}$$

équation à laquelle on pourra satisfaire d'une infinité de manières en réglant convenablement la courbure de l'une quelconque ou de plusieurs des faces des lentilles.

L'équation (9) montre que dans certains instruments d'observation, tels que les lunettes astronomiques ou les lunettes terrestres, les images viennent se peindre sur un élément de sphère de rayon égal à peu près aux $\frac{3}{2}$ de la distance focale de l'objectif. Le champ de ces instruments étant toujours très faible, cet élément de surface courbe se confond sensiblement avec un plan. Ainsi, pour un objectif de 0,30 de distance focale et un champ de $\frac{1}{25}$ (2° ¼ environ), ce qui correspond à beaucoup d'instruments de géodésie ou de topographie, l'écart entre cette surface et ce que l'on appelle d'habitude le *plan focal* différera au plus de $0^{mm},06$. Cet écart est insensible dans la pratique.

Mais il n'en est plus de même évidemment pour le microscope simple ou composé, dont les verres ont des courbures beaucoup plus prononcées.

Rappelons enfin, en terminant, que les considérations qui précèdent ne sauraient s'appliquer aussi utilement aux appareils photographiques, où les images embrassent presque toujours un champ très considérable. Les diverses formules qui précèdent ont été établies, en effet, dans l'hypothèse de rayons incidents peu inclinés sur l'axe principal du système.

Gal PEAUCELLIER. — *Déformation des images, etc*

2e Série. — T V — 3e Cahier

Fig. 1

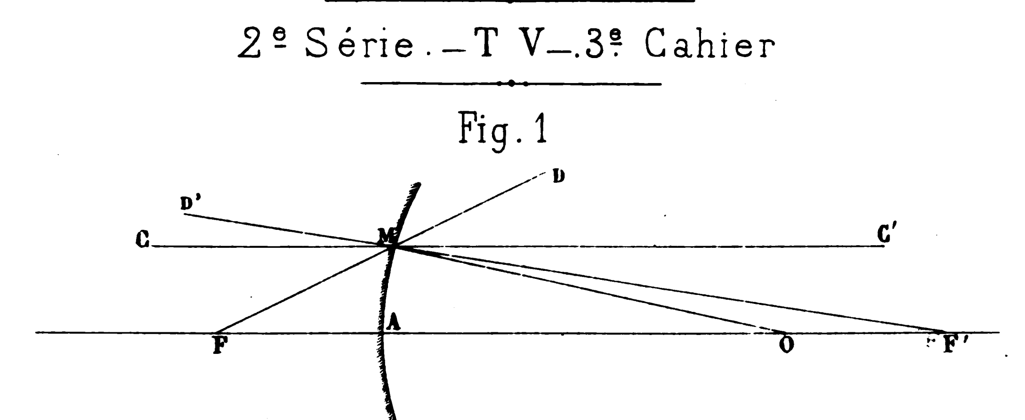


Fig. 2

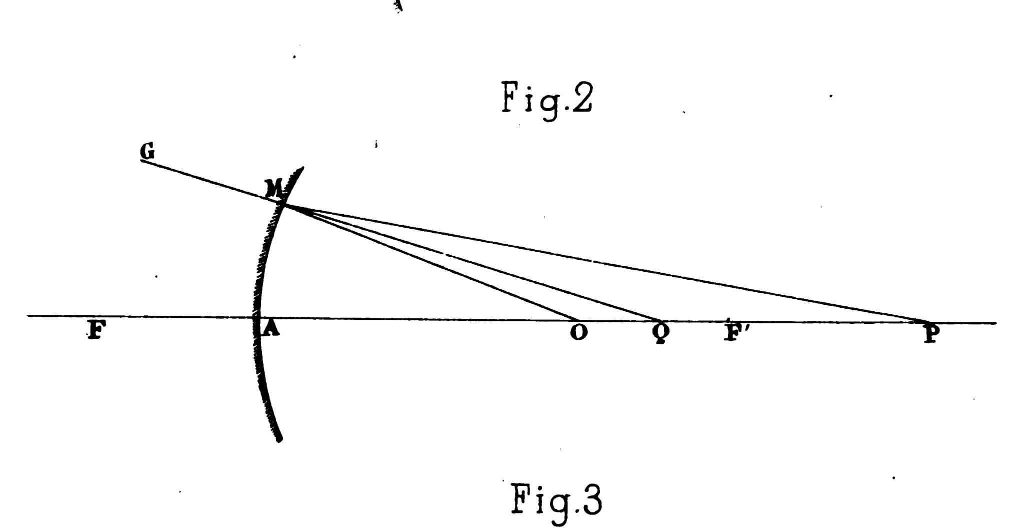


Fig. 3

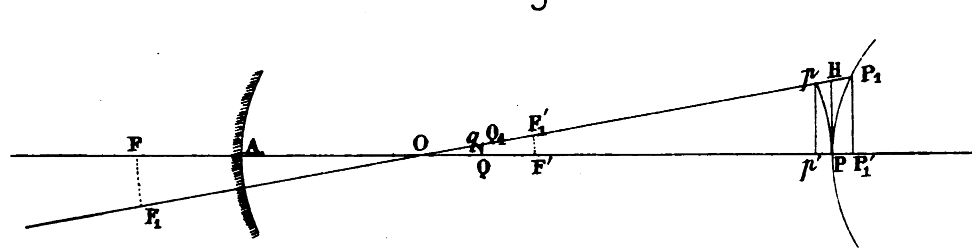


Fig. 4

R' R

NOTICE

SUR

LES CABLES ÉLECTRIQUES

PAR M. A. BONEL

Directeur du Réseau téléphonique de Bordeaux.

Depuis quelques années, il existe une notable amélioration dans la fabrication des câbles destinés à conduire l'électricité. Nous sommes loin des timides essais tentés avec des fils de cuivre enduits de gomme laque ou de résine. Si les moyens se sont beaucoup perfectionnés, de même les épreuves électriques plus complètes, les minutieuses précautions dans la pose, assurent un succès certain aux entreprises télégraphiques. La gutta-percha introduite en Europe par un Français, en 1844, bien supérieure au caoutchouc, rend de très grands services; elle est moins souple il est vrai, mais l'eau de mer, les acides ne peuvent l'attaquer. On emploie quelquefois le caoutchouc, plus susceptible de se détériorer, mais qui résiste mieux à la chaleur.

Un câble quelconque se compose d'une âme, c'est-à-dire du conducteur et de son enveloppe isolante. Les câbles télégraphiques sous-marins possèdent un conducteur formé d'un toron de fils de cuivre, revêtu d'une série de couches successives de gutta-percha et de composition Chatterton, mélange de gutta-percha et de goudron de Stockholm. Ce corps est destiné, par sa fluidité, à boucher les fissures qui pourraient survenir dans la gutta en se durcissant. Primitivement, on s'est servi d'un simple fil enduit de gutta; mais dans la Manche, il n'a pu résister à la traction. Cependant, placé bien à l'abri des courants, il présenterait de

sérieuses garanties de durée, puisque pendant la guerre de Crimée, entre Sébastopol et Varna, un fil de ce genre a pu fonctionner sans interruption.

Depuis, les câbles sous-marins furent recouverts différemment, et, après une expérience chèrement payée par la perte de plusieurs lignes, on est arrivé aux dispositions suivantes. Les câbles destinés à être placés au fond de la mer sur de grandes longueurs, se divisent en trois catégories. D'abord le câble côtier qui doit présenter des conditions spéciales de solidité. Son conducteur est un toron de sept fils, chacun d'un millimètre environ de diamètre. Le diélectrique se forme de onze couches successives de gutta et de composition Chatterton. Cette âme est entourée d'un coussinet de chanvre destiné à la garantir contre la pression de douze ou treize fils d'acier de cinq millimètres de diamètre, par dessus lesquels existe encore un guipage de chanvre goudronné, et enfin le tout est protégé par douze torsades formées de trois fils d'acier de l'épaisseur des précédents. L'assemblage présente cinq centimètres de diamètre, force très considérable destinée à résister aux ancres, aux dragues et au ressac. Au fur et à mesure qu'on descend au fond de la mer, surtout après une route convenablement choisie, l'épaisseur du câble diminue. On arrive au câble moyen, qui n'est autre que le câble côtier, moins les fils extérieurs et enfin, au câble de profondeur, composé de l'âme, du coussinet de chanvre, de dix à dix-huit fils d'acier dont le diamètre est en rapport avec le nombre et d'un guipage en cordes de chanvre goudronné. L'enveloppe métallique sert à la conservation de l'âme, à la résistance, à la pression de l'eau, qui monte quelquefois à plus de deux cents atmosphères et surtout à la pose; car le conducteur, sollicité par son propre poids, pendant la descente, se rompt souvent.

Une des conditions essentielles à la conservation d'un câble réside dans la position qu'il occupe au fond de l'eau ; aussi apporte-t-on le plus grand soin dans les sondages exécutés avant toute opération. Il arrive souvent que le câble suspendu sur des rochers s'use très rapidement sous l'influence du remous, tandis

que, placé au fond d'une vallée, il ne tarde pas à se couvrir de mollusques qui, loin de nuire à sa préservation, forment au contraire une nouvelle enveloppe protectrice. Quelquefois, mais fort rarement, des insectes du genre des tarets finissent par se glisser jusqu'au centre, rongent l'âme et mettent à nu une partie du conducteur.

Ces sortes de câble ne peuvent posséder plus d'un conducteur à causes des phénomènes électriques dus à la condensation et à l'induction ; mais pour des parcours relativement restreints, on peut en mettre une certaine quantité qui ne dépasse pas généralement cinq et, dans ce cas, le toron est sensiblement diminué. On doit toutefois observer les mêmes précautions, en les revêtant du guipage, de l'armature d'acier et de l'enveloppe goudronnée.

Les câbles télégraphiques souterrains que l'on commence à établir sur une grande échelle peuvent se passer de toutes les précautions précédemment indiquées, sauf pour l'isolation. Souvent l'âme est moins épaisse et le toron conducteur est simplement enduit d'une couche de gutta. On leur ajoute quelquefois une enveloppe de caoutchouc. Les uns sont recouverts d'une toile goudronnée, d'autres, au lieu de ruban, sont renfermés dans un tuyau de plomb.

Les fils pour l'éclairage électrique diffèrent de composition et de grosseur suivant l'usage auquel ils sont destinés. M. Edison se sert de baguettes en cuivre pour ses grandes distributions d'électricité, et, dans le même but, la Société générale des Téléphones fabrique dans son usine de Bezons de très beaux conducteurs dont le toron est de 38, 49 et 70 fils d'un millimètre chaque, avec trois ou quatre enveloppes de caoutchouc, entourées de toiles goudronnées. Pour les lampes à incandescence, on greffe sur les fils principaux des fils secondaires composés d'un seul conducteur d'un millimètre, revêtu d'un simple guipage de coton.

Comme il arrive très souvent des cas d'incendie, si dans un circuit deux conducteurs, placés auprès du foyer électrique,

fondent en se touchant; afin d'empêcher le métal liquéfié de tomber sur les objets environnants, on a imaginé de recouvrir les fils d'une enveloppe d'amiante.

Les câbles pour la télégraphie militaire diffèrent des autres simplement par l'enveloppe de cordes tressées et goudronnées, de façon à offrir une grande solidité et une certaine résistance. Les uns sont à un conducteur, les autres à deux. Ces derniers servent quand on ne peut employer la terre.

Les câbles en usage pour le téléphone, les torpilles, le télégraphe, les sonneries, se composent d'un fil de cuivre ou d'un petit toron entouré d'une couche légère de gutta. A Paris, la Société emploie sept doubles fils réunis dans une gaîne de plomb. Le guipage est fait en coton de couleurs variées afin de les distinguer. A Bordeaux, où la communication téléphonique se sert du sol, on emploie, dans les égouts, des câbles en plomb renfermant un toron de trois minces fils de cuivre, entouré de gutta-percha et de plus d'un guipage de coton imprégné d'une matière grasse. Dans les canalisations se trouvent des câbles Gower, formés d'un fil de cuivre dans une enveloppe de gutta et de chanvre sur laquelle est enroulé un petit fil de fer.

Par suite de la cherté de la gutta, on a tenté de remplacer ce corps par d'autres diélectriques. L'essai le plus sérieux est dû à MM. Berthoud et Borel. Ils recouvrent le fil de cuivre d'un mélange d'huile oxygénée et de résine contenu dans un petit tuyau de plomb. Ce tuyau ou les tuyaux, suivant le nombre de conducteurs, sont entourés d'un coussinet de chanvre. Le tout est revêtu de deux enveloppes de plomb, séparées l'une de l'autre, par une couche de brai gras. Les mêmes fabricants ont présenté à la Société des Téléphones un spécimen de câbles à quatorze conducteurs isolés entre eux par du coton imbibé de paraffine. Le prix se trouve considérablement réduit, et l'avenir nous apprendra si ces dispositions sont suffisamment pratiques.

Le cadre restreint de cette notice ne permet pas d'entrer dans les détails de la fabrication des câbles et des épreuves qu'ils subissent pour constater leurs qualités mécaniques. Je me

bornerai à citer les principales expériences employées pour déterminer leurs capacités électriques.

Avant de construire le câble, on doit s'assurer d'un fil de cuivre bien recuit et très bon conducteur. Pour trouver la conductibilité d'un fil de cuivre quelconque, il faut multiplier par 100 sa résistance calculée, puis diviser par la résistance réelle. On entend par résistance calculée, celle que possèderait le fil, s'il était de cuivre pur.

On cherche la résistance réelle du fil à éprouver, en l'enroulant autour d'un cylindre en ébonite ou en bois, dans une rainure héliçoïdale, puis on l'éprouve au moyen du pont de Wheatstone. Appelons R cette résistance, L la longueur du fil, p son propre poids et N° sa température, avec les données suivantes nous connaîtrons la résistance calculée.

Un mètre de fil de cuivre pur pesant un gramme possède une résistance 0,144 à 0° centigrade. Pour obtenir la résistance totale, il faut multiplier 0,144 par le carré de la longueur du fil et diviser par le poids. Nous aurons seulement la résistance à 0°. Pour savoir ce qu'elle sera au degré constaté au moment de l'épreuve, nous aurons à multiplier le résultat obtenu par N° et par 0,038. Par conséquent, appelant R' la résistance calculée, nous obtiendrons :

$$R' = \frac{0{,}144 \times L^2}{p} \times N^\circ \times 0{,}0038.$$

La conductibilité se déterminant par la résistance, R et R' nous donneront la différence entre la résistance exacte et la résistance calculée multipliée par 100, soit :

$$\frac{R' \times 100}{R};$$

ou, en d'autres termes, si R' = 12 et R = 18, la conductibilité du cuivre éprouvé sera :

$$\frac{12 \times 100}{18} = 87.$$

Une fois le fil entouré de gutta-percha, on éprouve son enveloppe isolante en le plaçant sur le tambour et en le faisant dérouler dans une cuve pleine d'eau posée sur des supports isolants. Un électromètre communique à cette eau et au sol, une forte pile s'applique à l'un des bouts du fil, l'autre étant isolé; de cette façon, aussitôt qu'arrive un endroit défectueux dans la cuve, il est indiqué par l'électromètre.

Cette opération s'applique aux fils sans solution de continuité; s'il existe une soudure, on se sert d'un moyen à peu près semblable; on met la soudure dans la cuve et après avoir appliqué le courant comme ci-dessus, on recueille pendant une minute dans un condensateur l'électricité échappée par la jointure. On note la déviation produite par la décharge de cette accumulation à la terre, on remplace ensuite la soudure par cinq mètres de câble bien isolé, on le charge avec la même pile et on opère comme précédemment avec le condensateur. Si la quantité d'électricité fournie par la jointure est supérieure à celle donnée à travers le câble, on considère le fil comme mal soudé.

Une fois le câble prêt, on doit vérifier avant la pose : la résistance de l'enveloppe isolante, c'est-à-dire déterminer la quantité d'électricité qui passe à travers la gutta-percha; la résistance du cuivre conducteur au courant et enfin la capacité électro-statique du câble, c'est-à-dire la charge d'électricité qu'il est susceptible de recevoir.

J'ai déjà indiqué dans une communication sur la télégraphie sous-marine la façon d'opérer les deux premières expériences (1). Voici, pour la troisième, deux méthodes proposées par M. Latimer Clark. Disons d'abord que la structure d'un câble est absolument pareille à celle d'un condensateur. Le toron intérieur du câble et l'armature extérieure, séparés par une matière isolante, sont représentés fort exactement par les feuilles d'étain d'un condensateur isolées entre elles. Donc, pour déterminer la capacité électrostatique, il suffit de lui comparer celle d'un condensateur étalon.

(1) V. *Mém. de la Soc. des Sciences phys. et nat. de Bordeaux*, t. V, 1er cab., p. 40.

Supposons un câble dont la capacité inconnue est x microfarads, on le relie à l'une des bornes d'un galvanomètre des sinus, l'autre borne communique à une pile par le moyen d'un interrupteur. Quand on abaisse cet instrument, l'aiguille du galvanomètre est déviée d'un degré d; on enlève le câble et on lui substitue un condensateur étalon de capacité C microfarads. En le chargeant, on a une déviation d', alors

$$x = C \frac{\sin \frac{d}{2}}{\sin \frac{d'}{2}} \text{ microfarads.}$$

Voici un second système pour obtenir la capacité inductive de petites longueurs : Soit D la décharge d'un condensateur étalon et d celle du câble; L la longueur en mètres, une longueur d'un kilomètre et C la constante du condensateur.

La capacité inductive $= \frac{D \times 1000}{d \times L \times C}$.

Il existe dans les conducteurs deux phénomènes, la condensation et l'induction. Comme un condensateur, si l'on charge le câble d'électricité et qu'on la fasse écouler ensuite à la terre, il restera toujours à l'intérieur une certaine quantité de fluide qui nuit aux communications télégraphiques, surtout si l'on se sert d'instruments exigeant une forte pile. L'emploi de condensateurs et d'appareils très délicats remédie à ce danger ainsi qu'à l'induction. Ce dernier phénomène qu'on devrait plutôt nommer influence provient de l'insuffisance de l'enveloppe isolante des câbles. On sait qu'il n'existe aucun corps susceptible de s'opposer complètement au passage de l'électricité. On a dû choisir comme diélectriques les moins bons conducteurs. Dans les câbles, l'envoi d'un courant détermine une perte à travers la gutta-percha, comme l'eau qui circule à travers un tube poreux. Cette électricité influence les conducteurs voisins, embrouille les communications télégraphiques, et se fait sentir très vivement dans les téléphones. Les bruits télégraphiques produisent dans ces derniers

un crépitement qu'on appelle vulgairement *friture,* et pendant l'exposition de Bordeaux, j'ai constaté le bruit prodigieux que donnait la lumière électrique par les conducteurs téléphoniques voisins des lampes à arc voltaïque.

M. Preece, électricien de l'administration anglaise, a signalé ces faits dans le journal télégraphique de Berne et il en tire les conclusions suivantes :

« La découverte du téléphone nous a expliqué un autre phénomène. Elle nous a permis de mettre hors de doute le fait que le courant électrique traverse réellement la croûte terrestre. La théorie que la terre agit pour l'électricité comme un grand réservoir, peut être mise au panier qui a englouti déjà tant d'autres théories des physiciens, comme le phlogiston, la matérialité de la lumière et tant d'autres hypothèses. On a relié des téléphones allant du sous-sol au rez-de-chaussée d'un grand bâtiment, en employant des tuyaux à gaz comme conducteurs de retour, et l'on a distinctement entendu des signaux émis par un bureau télégraphique situé à 225 mètres de distance. C'est un fait que si l'on recourt aux conduites de gaz ou d'eau, il est impossible d'exclure les signaux télégraphiques du circuit téléphonique. On mentionne des cas de circuits téléphoniques établis à des kilomètres de distance de tout fil télégraphique; mais sur une ligne se terminant par des communications à la terre, qui ont recueilli les signaux télégraphiques. Quand un système de lumière électrique emploie la terre, il empêche toute communication téléphonique dans le voisinage. Toutes les communications téléphoniques de Manchester ont un jour été interrompues par cette cause, et dans la cité de Londres, l'effet, une fois, a été assez considérable, non seulement pour paralyser toute communication téléphonique, mais encore pour faire tinter les sonnettes. »

Sans avoir à décider la question très obscure de savoir si la terre est un conducteur ou un réservoir, je crois cependant que cette dernière théorie l'emporterait sur la première. M. Preece semble trop prompt à la rejeter. Les faits allégués par lui ne sont pas probants, et j'ai été heureux que l'Exposition de Bordeaux ait

pu me permettre de constater, en ce qui concerne la lumière électrique, qu'ils sont extrêmement exagérés. D'abord les conduites d'eau et de gaz, conducteurs métalliques, transmettent fort bien les bruits des télégraphes, puisque les uns et les autres y rattachent leurs conducteurs pour prendre la terre. Le sol n'y est donc pour rien. J'ai constaté la friture assez fortement dans les câbles et plus faiblement sur les fils aériens. Elle est en général assez faible et se fait sentir d'une façon égale, sauf quand les câbles téléphoniques croisent ou côtoient, mais de très près, ceux des télégraphes. Dans ce cas, il ne serait pas surprenant d'entendre la friture quand bien même les télégraphes n'emploieraient pas les conduites pour leur communication à la terre.

Quant à percevoir des signaux télégraphiques dans un téléphone à plusieurs kilomètres de distance, je ne le crois pas, d'autant que M. Preece s'en rapporte à un simple dit-on, et de plus, il arrive d'entendre dans les téléphones des crépitements assez semblables à la friture et qui proviennent du défaut de réglage, des vibrations d'un ressort ou même d'un microphone trop sensible. Pour ce qui concerne les effets produits par la lumière électrique, ils sont très puissants; mais je me hâte de dire qu'ils sont inoffensifs. Jamais le service téléphonique n'a été interrompu et même la voix dominait parfaitement le bruit. J'ai pu me convaincre, en outre, en observant tous les appareils du réseau téléphonique de Bordeaux, que l'hypothèse admise par M. Preece n'est pas prouvée.

Le bâtiment contenant le bureau central est enclavé au nord et à l'ouest dans le terrain où se trouvait l'exposition du soir. Tous les câbles sortent du côté nord, une partie continue cette direction, une autre bifurque vers le sud et quarante suivent l'ouest, en traversant le parc où une soixantaine de lampes à arc voltaïque étaient installées sur des poteaux de bois, dont une douzaine se tenait au-dessus de la canalisation des conducteurs. Je dois constater que, sauf une qui employait la terre, toutes les lampes avaient des fils de retour; mais la plupart en fil de cuivre nu, qui touchait aux arbres et aux plantes, on peut donc les

admettre comme aboutissant au sol, ainsi que les lampes par leur poteau; car, étant données les pluies diluviennes qui ont inondé l'exposition pendant les trois derniers mois, les courants ne manquaient pas de dérivations. J'ai constaté dans les téléphones aboutissant aux câbles de l'ouest un ronflement continu semblable à la vapeur qui se condense, auquel venait se joindre un bruit grave et intermittent, comme le son d'une contre-basse dans un orchestre; tandis que les téléphones reliés aux fils s'étendant vers le nord ne donnaient pas le moindre son. Si la croûte terrestre sert de conducteur, pourquoi restaient-ils indemnes? on aurait dû au moins entendre un bruit un peu affaibli. On peut donc supposer que ce ronflement provenait de l'influence des courants générateurs de la lumière sur les conducteurs téléphoniques voisins. Du reste, comme je l'ai déjà dit, rien n'empêchait la conversation et jamais, malgré l'affirmation de M. Preece, les sonnettes n'ont donné le moindre tintement.

Enfin, comment cet électricien peut-il expliquer, avec son système, qu'en télégraphie un circuit se forme au moyen d'un câble de plus de cent kilomètres en employant la terre? Il faut, pour donner une raison plausible de ce fait, supposer que l'électricité se trouve puisée au départ pour être déversée à l'autre extrémité; car il n'est pas admissible, en raison des résistances, que le courant puisse revenir à son point de départ. Peut-être les deux théories ne sont pas plus vraies l'une que l'autre; mais il semble que celle qui considère le globe comme un réservoir chargé d'électricité douée d'une tension égale à peu près partout, doit être adoptée de préférence, parce que rien ne démontre son absurdité et qu'elle satisfait mieux que toute autre aux idées admises sur la propagation de l'électricité.

Bien des remèdes ont été proposés pour se débarrasser de l'induction. Me fondant sur l'emploi des condensateurs dans la télégraphie sous-marine, et partant de ce principe que la surface métallique du condensateur doit être égale à celle donnée par la longueur du conducteur multipliée par son diamètre, j'ai voulu

tenter ce moyen pour les téléphones. J'ai parfaitement diminué l'induction, je l'ai même supprimée; mais en enlevant le mal, j'ai également enlevé le malade, on n'entendait presque plus rien. Je crois expliquer ce mauvais résultat par ce fait que, pendant la conversation téléphonique, le conducteur se trouve toujours chargé et que les modulations vocales sont reproduites par des diminutions ou des augmentations du courant; tandis que pour la transmission par le miroir ou le siphon, il faut envoyer un signal bref et instantané, ce qui se fait très bien avec les deux condensateurs dans le circuit.

Les journaux ont annoncé aussi des applications de condensateurs par MM. Maiche et le docteur Cornelius Herz. J'ignore le résultat pratique de leurs efforts, mais il est à craindre qu'ils n'aient pas réussi.

En Belgique, récemment, on a fait beaucoup de bruit au sujet d'une invention qui devait révolutionner la science; on prétendait avoir enlevé complètement l'induction; on attendait avec impatience la vulgarisation de cette découverte. Il s'agit simplement de l'application de condensateurs non au fil lui-même, mais aux fils télégraphiques voisins. Ce moyen n'est pas pratique pour un réseau téléphonique.

On vient d'essayer sur un parcours téléphonique une disposition due à M. Bennett pour supprimer l'induction. Il suffit d'employer une bobine à chaque extrémité de la ligne dont le circuit est continué par le gros fil, tandis que le fil induit se rend à la terre. On doit, dans ce cas, avoir soin de varier les communications avec le sol.

Le câble Gower décrit précédemment possède un fil de fer enroulé autour du guipage ; il a pour but de recueillir le suintement électrique, si je puis m'exprimer ainsi, qui passe du conducteur à travers l'enveloppe isolante, pour le déverser dans le sol. Le moyen n'est pas suffisant. Je crois qu'on arriverait à de très bons résultats, si le diamètre du conducteur était augmenté; de nombreuses expériences m'ont prouvé la réalité de ce fait.

On emploie, pour éviter l'induction, deux fils : l'un d'aller,

l'autre de retour; cette disposition est excellente. Quand on use du sol pour remplacer le second conducteur dans un réseau téléphonique, tous les abonnés aboutissant à la même terre dans le bureau central et reliés chez eux aux conduites d'eau et de gaz, il peut se rencontrer de fortes résistances qui s'opposent à un écoulement facile du courant. Ces inconvénients n'existent pas avec un fil de retour; mais on n'obtient pas encore la suppression complète de l'induction, ce qui ne peut arriver qu'en trouvant un diélectrique absolument isolant.

Toutefois, il est très facile de ne pas être entendu par ses voisins, quand on parle dans le téléphone, et c'est un conseil que je donne en terminant au plus grand nombre des abonnés : il suffit d'articuler nettement et à voix basse. On peut se considérer comme dans une foule, si l'on veut confier un secret à quelqu'un, il faut bien se garder de crier, comme on croit souvent devoir le faire, quand on se trouve devant un appareil téléphonique. Dans ce cas, les câbles voisins transmettent la conversation; tandis qu'avec la précaution que je viens d'indiquer, seul le correspondant entendra la parole et l'induction se manifestera par un bourdonnement confus et à peine perceptible.

ÉTUDES HÉRONIENNES

PAR M. PAUL TANNERY

J'ai déjà consacré à la collection des écrits héroniens (1) deux études qui ont été publiées dans les *Mémoires de la Société* (2); la matière n'est pas épuisée, et je pourrai avoir à y revenir encore; aujourd'hui je me propose particulièrement d'examiner diverses formules approximatives employées par les anciens pour les calculs où nous nous servons actuellement des fonctions circulaires.

I

Aire du segment de cercle.

Nous désignons par
c la corde ou base d'un segment de cercle;
h sa flèche;
S sa surface.

---

(1) *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiæ, edidit Fridericus Hultsch.* Berlin, Weidmann, 1864.

(2) Tome IV (2e Série). — *L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie.* — Tome V. — *La Stéréométrie de Héron d'Alexandrie.*

On trouve en fait dans la collection héronienne dix calculs de segments dans lesquels sont appliquées l'une ou l'autre des cinq formules suivantes.

$$\text{(A)} \qquad S = \frac{c+h}{2} h + \frac{1}{14} \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

$$\text{(B)} \qquad S = \frac{c+h}{2} h \left(1 + \frac{1}{21}\right),$$

$$(B_1) \qquad S = \frac{c+h}{2} h,$$

$$(B_2) \qquad S = \frac{c+h}{2} h \left(1 + \frac{1}{16}\right),$$

$$\text{(C)} \qquad S = \frac{c^2 11}{28} + \left(h - \frac{c}{2}\right) c.$$

Pour la formule (A), il nous est dit qu'elle n'est applicable que dans le cas où le segment est plus petit qu'un demi-cercle. Dans le cas contraire, on doit commencer par calculer la flèche du segment complémentaire

$$h' = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{h},$$

d'où le diamètre du cercle,

$$d = h + h',$$

le cercle entier,

$$A = \frac{d^2 11}{14},$$

le segment complémentaire

$$S' = \frac{c+h'}{2} h' + \frac{1}{14} \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

e tenfin

$$S = A - S'.$$

Cette méthode est appliquée rigoureusement dans plusieurs problèmes; je n'ai compté que les calculs des segments complémentaires, lorsqu'ils ne se trouvaient d'ailleurs pas déjà faits dans d'autres problèmes.

Pour la formule (B), on nous dit au contraire qu'elle est applicable dans tous les cas, que le segment soit plus grand, plus petit qu'un demi cercle, ou enfin égal à un demi-cercle. On remarquera en effet pour ce dernier cas que si on fait $c = 2h$, la formule (B), comme au reste la formule (A) et la formule (C), donnent $\frac{11}{7} h^2$ pour la valeur du demi-cercle de rayon h, suivant la détermination $\pi = \frac{22}{7}$ d'Archimède.

Il n'en est pas de même des formules (B_1) et (B_2) et on doit les considérer comme inauthentiques. Pour la dernière, il n'y a pas de doute, celui qui l'emploie a voulu retrouver, en augmentant $\frac{c+h}{2} h$ dans une certaine proportion, à peu près le résultat qu'il voyait obtenu par la formule (A).

Quant à (B_1), je n'hésite pas à y voir l'ancienne formule antérieure aux travaux d'Archimède et correspondant à l'antique approximation $\pi = 3$. Mais sa présence dans les écrits héroniens ne peut être considérée que comme le résultat d'une négligence de calcul.

J'écarterai donc ces deux formules (B_1) et (B_2) de l'étude que je me propose.

D'après la forme même de (C), on voit qu'elle est appliquée à un segment plus grand qu'un demi-cercle. Mais il est clair aussi à première vue qu'elle est réellement plus applicable dans le cas contraire, puisqu'elle s'annule pour $b = 0$, $h = d$, ce qui n'a pas lieu pour les précédentes.

Au reste, j'ai consigné dans le tableau ci-après, l'indication des problèmes où se trouvent les dix calculs de segments que j'ai relevés, celle des formules appliquées, les données, les résultats, la valeur exacte, et l'erreur relative. On remarquera immédiatement que la formule (A) est la plus fréquemment employée et la

seule qui soit suivie dans la *Geometria,* c'est-à-dire l'écrit où la tradition du maître a été le plus fidèlement suivie. On ne peut se refuser à croire que cette formule ait été celle qu'a adoptée Héron, et que probablement elle lui soit due en réalité.

PROBLÈMES	FORMULE	DONNÉES		RÉSULTAT	VALEUR VRAIE	ERREUR RELATIVE
		c	h			
Geometria 94	(A)	16	6	$70 \frac{1}{2} \frac{1}{14}$	70,7048	— 0,002
d° 95,96 / *Mensuræ* 30	(A)	12	4	$34 \frac{1}{2} \frac{1}{14}$	34,6822	— 0,003
Geometria 97	(A)	24	9	$158 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{28}$	159,0940	— 0,002
d° 98 / *Mensuræ* 32	(A)	20	$3 \frac{1}{3}$	$66 \frac{2}{33}$	67,9636	— 0,029
Stereom. II 32	(B_1)	16	14	210	224,0544	— 0,063
d° 33	(B_1)	10	2	12	13,7354	— 0,127
Mensuræ (¹) 28	(C)	$13 \frac{1}{2}$	$7 \frac{1}{4}$	78,[3482]	78,4465	— 0,001
d° 29	(B)	24	16	$335 \frac{1}{6} \frac{1}{14}$	331,7798	+ 0,011
d° 31	(B_2)	12	4	34	34,6822	— 0,020
d° 48	(B_1)	24	6	90	100,6423	— 0,106

Les trois formules (A), (B), (C) peuvent être examinées à deux points de vue, l'un pratique, l'autre théorique. Sous le premier rapport, on peut les comparer aux tables qui se trouvent dans les manuels, par exemple le *Carnet de l'Ingénieur* édité par Eugène Lacroix, Paris, et qui donnent la surface du segment en fraction décimale du carré de la corde, pour des valeurs de la flèche exprimées également en fraction décimale de la corde. J'ai dressé le tableau suivant en adoptant le même système pour les segments plus petits que le demi-cercle; pour ceux qui sont plus grands, je les ai rapportés au contraire au carré de la flèche, et j'ai calculé pour dix valeurs progressives du rapport à la flèche de la moitié de la corde.

(¹) Le problème 28 est très corrompu; le résultat doit se déduire d'un autre nombre, son produit par $2 \frac{1}{2}$; les chiffres entre parenthèses représentent les fractions négligées dont j'ai tenu compte pour déterminer l'erreur relative.

Le problème 48 est indiqué à tort comme se rapportant à un segment de sphère; le segment à calculer est plus grand qu'un demi-cercle et on y applique les règles de la *Geometria* pour la détermination du segment complémentaire; celui-ci est donné comme déterminé dans un problème précédent qui ne se retrouve pas.

SEGMENTS PLUS PETITS QU'UN DEMI-CERCLE					SEGMENTS PLUS GRANDS QU'UN DEMI-CERCLE				
$\frac{h}{c}$	Valeurs de $\frac{S}{c^2}$				$\frac{c}{2h}$	Valeurs de $\frac{S}{h^2}$			
	Exacte	Formules (A)	(B)	(C)		Exacte	Formules (A)	(B)	(C)
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1	1,5708	1,5714	1,5714	1,5714
0,05	0,0334	0,0441	0,0275	Négative	0,9	1,4582	1,4579	1,4667	1,4529
0,10	0,0672	0,0729	0,0576	d°	0,8	1,3490	1,3457	1,3619	1,3257
0,15	0,1018	0,1041	0,9036	0,0429	0,7	1,2443	1,2350	1,2571	1,1900
0,20	0,1375	0,1379	0,1257	0,0929	0,6	1,1449	1,1243	1,1524	1,0457
0,25	0,1747	0,1741	0,1637	0,1429	0,5	1,0525	1,0179	1,0476	0,8929
0,30	0,2137	0,2129	0,2043	0,1929	0,4	0,9664	0,9114	0,9429	0,7314
0,35	0,2548	0,2541	0,2475	0,2429	0,3	0,8604	0,8064	0,8381	0,5614
0,40	0,2982	0,2979	0,2933	0,2929	0,2	0,8387	0,7029	0,7333	0,3829
0,45	0,3441	0,3441	0,3418	0,3429	0,1	0,8007	0,6003	0,6286	0,1957
0,50	0,3927	0,3929	0,3929	0,3929	0	0,7854	0,5000	0,5238	0,0000

L'inspection de ce tableau montre que la formule (C) est de beaucoup la moins satisfaisante; elle n'est réellement applicable que pour les segments très voisins du demi-cercle; elle devient alors même un moment préférable à (B), mais reste toujours inférieure à A. Les valeurs qu'elle donne sont en général trop faibles.

Il en est de même pour les valeurs de la formule (B), tant que $c > 2h$; elle est plus satisfaisante que la formule (A) pour les petits segments, mais sans atteindre pour ces segments une approximation convenable. Pour $c < 2h$, tandis que la formule (A) donne toujours des valeurs trop faibles, la formule (B) donne des valeurs longtemps trop fortes, puis enfin trop faibles, en sorte que pour les segments plus grands qu'un demi-cercle, sans être en général bien satisfaisante, elle est préférable la plupart du temps à la formule (A), ce qui explique qu'elle soit donnée comme applicable dans tous les cas.

Enfin la formule (A) donne d'abord pour les segments des valeurs beaucoup trop fortes. Puis elle devient trop faible au contraire, mais en restant toujours assez voisine des valeurs vraies. En somme, elle était réellement satisfaisante pour la pratique des anciens pour $0,2 < \frac{h}{c} < 0,5$. Pour les segments plus grands que le demi-cercle, elle ne devait pas être appliquée

directement, comme on l'a vu. Quant aux petits segments, les anciens ne paraissent pas s'être préoccupés de les calculer avec quelque précision.

Quant à l'examen théorique de ces formules, il convient de le limiter à ce qui peut être utile pour expliquer leur origine. Or celle de la formule (C) se reconnaît immédiatement. On est parti, en considérant les segments voisins d'un demi-cercle, de la valeur du demi-cercle décrit sur la corde comme diamètre; il fallait en retrancher ou y ajouter une lunule dont la largeur maximum était $\frac{c}{2} - h$ et dont les deux extrémités étaient distantes de c. L'idée de la représenter approximativement par le rectangle $\left(\frac{c}{2} - h\right) c$ était toute naturelle; cette formule doit donc être une des plus anciennes et remonter au temps où l'approximation $\pi = \frac{22}{7}$ n'était pas connue. Alors elle se présentait sans doute sous la forme

$$S = \frac{3c^2}{8} - \left(c - \frac{h}{2}\right) c,$$

dont on aura corrigé plus tard le premier terme.

Pour les deux autres formules, elles dérivent d'un ordre d'idées différent, et leur origine se rattache à celle de la formule (B_1),

$$S = \frac{c + h}{2} h.$$

Voici comment j'expliquerais l'invention de cette dernière.

On est parti des segments moyens (pour lesquels l'insuffisance de la formule (C) était au reste facilement démontrable). On a d'abord calculé le triangle $\frac{ch}{2}$ qui s'y présente immédiatement. Il fallait y ajouter une correction qui s'annulât avec c et h.

Pour ne pas avoir une formule trop compliquée, il était naturel d'essayer de former cette correction avec un seul terme, qui pouvait d'ailleurs être soit en c^2, soit en ch, soit en h^2. Enfin, on avait la condition que, pour $c = 2$, $h = 1$, S fût égal à $\frac{3}{2}$, d'après la valeur approximative alors attribuée à π.

On pouvait dès lors ajouter, comme terme correctif, soit $\frac{c^2}{8}$, soit $\frac{ch}{4}$, soit enfin $\frac{h^2}{2}$. Restait à choisir entre ces trois termes.

Pour cela, il convenait de prendre un segment moyen et de vérifier lequel des trois termes était le plus satisfaisant. Or on pouvait facilement calculer le segment intercepté par le côté du carré, segment qui, dans le cercle de rayon 1, a pour surface $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ dans notre hypothèse, tandis que $c=\sqrt{2}$, $h=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les surfaces calculées avec les trois termes à essayer pour la correction, en supposant connue l'approximation $\sqrt{2}=\frac{1}{5}$, sont respectivement, dans l'ordre adopté plus haut pour ces trois termes, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$, $\frac{1}{4}$. Le choix du dernier terme $\frac{h^2}{2}$ pour la correction était donc tout indiqué, et l'invention de la formule (B_1) en résulta.

Je suppose évidemment cette formule plutôt grecque qu'égyptienne, au contraire de la forme originaire de (C); mais il est clair que le mode d'invention que je suppose pour (B_1) ne nécessite que des connaissances certainement possédées par les Grecs du Ve siècle avant J.-C.

Cette formule dut subsister jusqu'après les travaux d'Archimède, qui en nécessitèrent la correction.

Rien n'était plus simple que de faire cette correction en multipliant par $\frac{22}{21}$, de là la formule (B); mais désormais cette formule ne donnait plus la concordance pour aucun segment inférieur au demi-cercle, mais seulement pour le demi-cercle et pour un segment supérieur (celui d'un arc d'environ 248°).

Si nous admettons que la formule (A) est due à Héron, son origine n'est pas plus difficile à reconnaître. L'auteur s'est proposé de trouver une formule plus exacte que (B), en bornant d'ailleurs le problème aux segments plus petits que le demi-cercle.

La formule (B) contenant déjà des termes en ch et en h^2, il

était naturel d'essayer d'y faire entrer un terme en c^2. On disposait ainsi de trois coefficients, ce qui eût permis d'établir la concordance, par exemple pour le demi-cercle et pour les segments sur les côtés du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier. Mais la formule eût été trop compliquée, et l'auteur se contenta, en supposant égaux entre eux les coefficients de ch et de h^2, à l'exemple des formules (B_1) et (B), d'établir la concordance pour le segment sur le côté du carré. Il est facile de vérifier que cette concordance existe rigoureusement si l'on fait $\pi = \frac{22}{7}$. Car le segment est alors $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, valeur donnée également par la formule (A).

J'ajouterai que cette formule correspond pour nous, si l'on désigne par φ le demi-arc du segment, à l'approximation

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{1}{14}\sin^2\varphi + 2\sin^4\frac{\varphi}{2}.$$

La dérivée de l'erreur absolue est nulle en même temps que l'erreur pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$; elle est nulle également pour $\sin\varphi = \frac{4 \mp \sqrt{2}}{6}$, c'est-à-dire pour $\varphi = 25^\circ 31' 44''$ (maximum positif de l'erreur : 0,00338) et pour $\varphi = 64^\circ 28' 16''$ (maximum négatif de l'erreur : 0,00275).

Absolument parlant, c'est-à-dire l'erreur étant rapportée au carré du rayon, la formule est donc satisfaisante, puisque l'erreur reste dans les limites de celle qu'Archimède avait admise pour π, soit $\frac{1}{497}$. Si, au contraire, on rapporte l'erreur sur le segment au carré de la corde, elle est très considérable comme on l'a vu pour les arcs de faible amplitude, le terme complémentaire $\frac{1}{14}\left(\frac{c}{2}\right)^2$ dépassant à lui seul la surface réelle du segment tant que la flèche est inférieure aux 0,027 de la corde.

Quant à la formule (B) qui correspond à

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{2}{21}\sin\varphi\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{44}{21}\sin^4\frac{\varphi}{2},$$

la dérivée s'annule pour $\varphi = 0$ $\left(\text{non pour } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, et pour $\sin\varphi = \frac{110 \mp \sqrt{22}}{122}$ c'est-à-dire pour $\varphi = 59^\circ 40' 37''$ (maximum négatif de l'erreur, — 0,0288) et pour $\varphi = 109^\circ 56' 3''$ (maximum positif de l'erreur, + 0,0262). On voit qu'elle est beaucoup moins satisfaisante en thèse générale que la formule (A), quoique, pour les arcs de très faible amplitude, elle présente un léger avantage sur elle.

II

Longueur de l'arc de cercle.

Nous désignerons par L la longueur de l'arc de cercle limitant le segment de corde c et de hauteur h.

La collection héronienne nous offre en fait sept calculs de longueurs d'arcs, et l'application des formules suivantes :

$$\text{(D)} \qquad L = \sqrt{c^2 + 4h^2} + \frac{h}{4},$$

$$\text{(D}_1\text{)} \qquad L = \sqrt{c^2 + 4h^2} + \left(\sqrt{c^2 + 4h^2} - c\right)\frac{h}{c},$$

$$\text{(E)} \qquad L = (c + h)\left(1 + \frac{1}{21}\right),$$

$$\text{(F)} \qquad L = \frac{11c}{7} + 2\left(h - \frac{c}{2}\right),$$

$$\text{(G)} \qquad L = \frac{\left(\frac{c}{2} + h\right)22,}{14}$$

$$\text{(H)} \qquad L = (c + h)\left(1 - \frac{h}{c}\right)\left(1 + \frac{h}{c}\right).$$

Le tableau ci-dessous donne les mêmes renseignements que le tableau analogue pour l'aire des segments.

PROBLÈMES	FORMULE	DONNÉES		RÉSULTAT d'après Héron	VALEUR VRAIE	ERREUR RELATIVE
		c	h			
Geometria 94	(D)	16	6	$21\ \frac{1}{2}$	21,4500	+ 0,0023
d° 95	(D)	12	4	$15\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{12}$	15,2881	+ 0,0084
d° 97	(D_1)	24	9	$32\ \frac{1}{4}$	32,1750	+ 0,0023
d° 98 / *Mensuræ* 32	(D)	20	$3\ \frac{1}{3}$	$21\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{12}$	21,4500	+ 0,0220
Mensuræ 28	(F)	15	8	$24\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$	24,5804	— 0,0004
d° 31	(G)	12	4	$15\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{14}$	15,2881	+ 0,0279
d° 33	(H)	40	10	$46\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$	46,3648	+ 0,0110

La formule E n'est employée (*Stereometrica* II, 33) que pour le calcul d'une demi-circonférence qu'elle donne avec l'approximation d'Archimède.

Cette fois, la formule qui domine et qui semble avoir été adoptée par Héron est (D); de même que (A) pour l'aire, elle nous est d'ailleurs présentée comme applicable seulement pour les arcs plus petits que la demi-circonférence, les arcs plus grands devant être déterminés par différence avec la circonférence entière.

Si la *Geometria* nous offre d'ailleurs une autre formule (D_1), il ne faut pas hésiter à considérer cette dernière comme inauthentique; dans l'exemple auquel elle est appliquée, et où $\frac{h}{c} = \frac{3}{8}$, elle donne identiquement le même résultat que (D). Il n'est pas douteux qu'on n'ait voulu expliquer par son moyen un calcul fait originairement avec l'autre formule.

Et cependant cette formule (D_1) qui correspond, en désignant par u l'arc considéré, à l'approximation

$$u = 4 \sin \frac{u}{4} \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{u}{4} \sin^2 \frac{u}{8}\right),$$

est en réalité, au point de vue pratique, la plus satisfaisante de toutes pour les arcs au-dessous de celui de 147°28′46″ qui correspond à ce rapport de $\frac{h}{c} = 0{,}375$. L'erreur s'annule pour un

arc un peu inférieur, et pour les arcs plus petits, elle est constamment par défaut sans dépasser 0,012 de la corde. Pour les arcs plus grands, elle est au contraire toujours par excès et la formule devient bien vite complètement inacceptable.

On remarquera au reste que ni la formule (D_1), ni la formule (D) ne donnent $L = \frac{22}{7}$ pour $h = 1$, $c = 2$; une autre des six formules plus haut (H), est dans le même cas.

Je regarde également comme inauthentique cette dernière formule; elle ne donne des valeurs un peu admissibles que dans le voisinage du rapport $\frac{h}{c}$ auquel elle est appliquée. Pour les arcs plus petits, elle donne des valeurs beaucoup trop fortes; pour les arcs plus grands, des valeurs beaucoup trop faibles.

Le rédacteur du problème aura encore voulu retrouver un calcul dont la raison lui échappait. Seulement, comme le résultat auquel il arrive est plus exact que celui que donneraient toutes les autres formules héroniennes, sauf (D_1), et en diffère d'ailleurs par le chiffre des unités, il est probable que le calcul originaire provenait d'une autre source, sans aucun doute, relativement récente.

Toutes les formules qu'il nous reste à examiner étant, au point de vue pratique, très inférieures aux formules relatives à l'aire des segments, je crois inutile de donner le même tableau comparatif que pour ces dernières, et je me bornerai aux remarques suivantes.

Sous la forme où nous rencontrons les formules héroniennes donnant la longueur de l'arc de cercle d'un segment, elles doivent être postérieures à Archimède. Mais pour (E), (F), (G), si l'on fait abstraction de la valeur attribuée à π, l'origine est évidemment beaucoup plus ancienne.

La formule (E) qui correspond à

$$L = \frac{\pi}{3}(c + h),$$

est de beaucoup la plus grossière. L'erreur n'est nulle que pour les arcs de 0° et de 180°; positive pour les arcs intermédiaires,

négative au delà de 180°, elle est loin d'être négligeable en thèse générale. Au reste, il n'est pas suffisamment prouvé que cette formule ait été réellement appliquée dans la pratique.

La formule (G), qui correspond à

$$L = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2} + h\right),$$

est sensiblement plus satisfaisante. L'erreur s'annule pour les arcs de 0°, de 90° et de 180°, ce qui explique son origine et la rapproche de la formule (B_1) pour l'aire des segments. Mais elle est beaucoup trop faible pour les petits arcs; la valeur qu'elle donne est inférieure à la corde, tant que la flèche est inférieure aux 0,18 de la corde. De 90° à 180°, l'erreur, positive, atteint jusqu'à près des 0,04 de la corde. Enfin pour les arcs plus grands que la demi-circonférence, l'erreur est négative et grandit rapidement en valeur absolue.

La formule F, qui correspond à

$$L = \frac{\pi}{2}c + 2\left(h - \frac{c}{2}\right),$$

offre une analogie évidente avec la formule (C) des aires des segments, et son origine doit être identique. Mais il se trouve que si, pour les petits arcs, elle est absolument illusoire, c'est la plus avantageuse de toutes les héroniennes pour les arcs très voisins de la demi-circonférence, et pour tous les arcs plus grands. Cependant les valeurs qu'elle donne sont toujours trop faibles $\left(\text{en supposant } \pi = \frac{22}{7}\right)$, et elle n'est vraiment applicable que dans des limites assez restreintes. Il est clair enfin que le coefficient 2 du terme correctif $h - \frac{c}{2}$ ne peut être regardé que comme choisi empiriquement.

Enfin la formule (D), toujours trop faible pour les arcs plus grands que la demi-circonférence, auxquels elle est avec raison présentée comme non applicable, est également trop faible pour les arcs plus petits et voisins de la demi-circonférence, tandis

qu'elle est trop forte pour les petits arcs. L'erreur est nulle pour un rapport $\frac{h}{c}$ un peu au-dessous de 0,4. En valeur absolue, elle peut, pour les arcs de 0° à 180°, dépasser de quelque peu les 0,03 de la corde.

Il faut admettre que si cette formule a été adoptée par Héron, c'est qu'il l'a considérée comme suffisante pour les besoins de la pratique. Mais son invention est trop simple pour qu'on en fasse honneur au géomètre alexandrin, et elle lui est probablement antérieure.

On est parti évidemment de l'assimilation de l'arc avec la somme des cordes qui sous-tendent les deux moitiés. A cette somme, qui est $\sqrt{c^2 + 4h^2}$, il fallait ajouter des termes correctifs, s'annulant avec b et h.

En prenant deux termes, l'un en b, l'autre en h, on aurait pu disposer des coefficients de façon à obtenir la concordance pour deux arcs choisis convenablement. Mais la formule aurait été trop compliquée et on se contenta de prendre un seul terme. Il convenait à cet égard de choisir h, qui est plus petit que b.

Pour obtenir la concordance pour l'arc de 180°, il eût fallu, en supposant $\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, ajouter $\frac{12}{35}h$, soit environ $\frac{1}{3}h$. Pour l'arc de 120°, il eût fallu ajouter $\frac{4}{21}h$, soit environ $\frac{1}{5}h$. On se contenta de prendre une fraction intermédiaire $\frac{h}{4}$, et on put sans doute vérifier plus ou moins empiriquement que cette approximation suffisait aux besoins de la pratique.

III

Volume des conques.

J'appellerai *conque* (κόγχη), avec les héroniens, la plus petite des quatre portions entre lesquelles une sphère se trouve divisée par deux plans qui se coupent à angle droit suivant une corde de cette sphère.

Je désignerai par c la longueur de cette corde, *base* de la conque; par h et k les flèches des deux segments de cercle qui forment les faces planes de la conque, et qui sont généralement inégaux. Je supposerai enfin en thèse générale $k < h$.

Il est clair que les trois éléments c, h, k suffisent à déterminer la conque, qui appartiendra à une sphère de rayon

$$R = \frac{1}{8hk}\sqrt{(h^2 + k^2)(c^4 + 16h^2k^2)}.$$

Soient a et b les distances du centre de la sphère aux deux plans qui limitent la conque, savoir,

$$a = \frac{c^2 - 4h^2}{8h},$$

$$b = \frac{c^2 - 4k^2}{8k};$$

la surface courbe de la conque sera

$$S = 2R\left[R \operatorname{arc\,tg} \frac{Rc}{2ab} - a \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{2b} - b \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{2a}\right],$$

et son volume aura pour expression

$$V = \frac{1}{3}abc + \frac{2R^3}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{Rc}{2ab}$$
$$- a\left(R^2 - \frac{a^2}{3}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{2b} - b\left(R^2 - \frac{b^2}{3}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{2a}.$$

On rencontre dans les écrits héroniens la formule

$$\text{(I)} \qquad V = \left\{\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2\right]\frac{3}{2} + k^2\right\}\frac{k}{2} \cdot \frac{11}{21}.$$

L'inexactitude de cette formule saute aux yeux; elle devrait être symétrique en h et k. Mais si l'on y suppose $h = \frac{c}{2}$, la conque devient un demi-segment sphérique à une base et l'on a pour le volume de ce segment

$$\text{(J)} \qquad 2V = \left[3\left(\frac{c}{2}\right)^2 + k^2\right]k\frac{\pi}{6},$$

formule exacte et qui a nécessairement été obtenue par la théorie.

Ce rapprochement indique l'origine de la formule approximative (I); mais il est clair que, si elle peut être assez satisfaisante pour les valeurs de h très voisines de $\frac{c}{2}$, elle donnera en général un résultat beaucoup trop fort.

Elle ne se trouve appliquée que dans un seul problème (*Stereometrica* I, 42), où il est proposé en fait de calculer la différence des volumes de deux conques dont les éléments c, h, k sont respectivement pour l'une 12, 4, 3, pour l'autre 10, 3, 2. Les résultats sont $68\frac{1}{3}\frac{1}{14}$ (cette dernière fraction est négligée) et $28\frac{17}{21}$. Les volumes ne sont que 40,628 et 23,384. On voit que l'erreur est énorme.

La formule exacte (J) est, au contraire, appliquée plusieurs fois. Mais il me paraît certain que ni l'une ni l'autre ne l'ont été par Héron lui-même, quoique, depuis les travaux d'Archimède, la dernière pût s'obtenir avec la plus grande facilité. A cet égard je m'en rapporte aux listes de l'introduction de la *Geometria* (p. 45-46) où, pour la géométrie plane, on distingue quatre théorèmes pour le cercle : le cercle entier, le demi-cercle, le segment plus petit que le demi-cercle, et le segment plus grand, tandis que, pour la stéréométrie, la sphère apparaît seule.

Il semble assuré par là que l'invasion des mesures pratiques de volumes qui défigura le travail primitif de Héron d'Alexandrie, ne fut pas sans être accompagnée dans son école de l'introduction de quelques résultats théoriques. Malheureusement la plupart des problèmes où se retrouvent ces résultats sont singulièrement corrompus. Je vais passer en revue ceux qui se rattachent plus ou moins à la question que j'examine.

Stereometrica I, 41. — Avant le problème des conques dont j'ai parlé, s'en trouve un autre; mais la conque est simplement un quart de sphère, c'est-à-dire que $\frac{c}{2} = h = k$. La surface est calculée comme $\frac{c^2 11}{14}$, équivalente au cercle de diamètre c.

Après le problème suivant, se trouve un petit appendice où l'on donne comme règle, pour le calcul d'un segment de sphère dont les dimensions sont égales à r (ἰσαρίθμων), de prendre $r^3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{42}\right)$ par analogie avec le volume de la sphère de diamètre D, soit $D^3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{42}\right)$.

Nous rencontrons ici une transformation commode des formules de Héron pour le volume de la sphère. Quant au prétendu segment de sphère dont il est parlé, c'est évidemment un huitième de sphère, intercepté par trois plans perpendiculaires entre eux et passant par le centre.

Le texte est trop ambigu pour que l'on puisse reconnaître si l'auteur entend ou non que le même procédé soit appliqué dans le cas où les plans ne passeraient pas par le centre de la sphère, en remplaçant alors r^3 par le produit abc des trois arêtes rectilignes.

J'appellerai *segment de conque* le solide ainsi formé. Il est clair d'ailleurs que trois éléments ne suffisent pas à le déterminer.

Si on désigne par R le rayon de la sphère, et par A, B, C les distances du centre aux plans passant par les arêtes bc, ca, ab, on aura, entre les sept éléments R, A, B, C, a, b, c, les trois relations

$$R^2=(A+a)^2+B^2+C^2=A^2+(B+b)^2+C^2=A^2+B^2+(C+c)^2,$$

et la surface sera donnée par

$$\begin{aligned} S = R^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{R(A+a)}{BC}+\operatorname{arc\,tg}\frac{R(B+b)}{AC}+\operatorname{arc\,tg}\frac{R(C+c)}{AB}\right) \\ -AR\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{A+a}{C}-\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{C+c}\right) \\ -BR\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{C+c}{B}-\operatorname{arc\,tg}\frac{C}{B+b}\right) \\ -CR\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{B+b}{A}-\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A+a}\right), \end{aligned}$$

formule dont on pourra sans difficulté déduire l'expression du volume.

Stereometrica II, 1. — Je vais donner la traduction complète de ce problème où les calculs sont mutilés par une lacune importante, mais qu'il est facile de combler :

« (Héron). Mesure d'un *tétrastège* ou *tétracamare* (?) sur une base carrée.

» Soit le côté de 12 pieds; le multipliant par lui-même, on a 144 pieds, doublant, 288, dont la racine carrée est de 17 pieds environ; c'est le diamètre dont le carré sera donc 288; multipliant par la hauteur $8\frac{1}{2}$ *(moitié de 17)* on a 2448, par 11, 26928, dont $\frac{1}{21}$ est $1282\frac{6}{21}$. C'est là l'*hyphérèse*. Il faut maintenant retrancher de l'*hyphérèse* les quatre segments des conques. La moitié des côtés (de la base carrée) est de 6 pieds : multipliant ce nombre par lui-même, on a 36. Multipliant par 3, suivant la règle générale, 108. Ajoutant à 108 le....., on a $285\frac{1}{2}\frac{1}{8}$, multipliant par 11, 3141 $\left(\textit{en négligeant } 1\frac{1}{2}\right)$, divisant par 21, 149 $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ $\left(\textit{correction partielle de l'erreur précédente; on devrait avoir } 149\frac{1}{2}\frac{1}{7}\right)$. Doublant $299\frac{1}{4}$, il reste $\left(\text{en retranchant de l'}\textit{hyphérèse } 1282\frac{6}{21}\text{, et en négligeant la fraction de ce dernier nombre}\right)$ $982\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. »

Je n'insiste pas sur le peu d'exactitude des calculs; j'ai à expliquer le problème. Il s'agit d'une voûte hémisphérique; dans le cercle de base est inscrit un carré, et sur les quatre côtés de ce carré sont élevés quatre plans perpendiculaires à la base qui retranchent de l'hémisphère quatre conques. Il est demandé de calculer le vide qui reste dans l'hémisphère.

Du côté a du carré de base qui est donné, on déduit le diamètre du cercle de base ou de l'hémisphère $D = \sqrt{2a^2}$. Les mêmes calculs avec les mêmes nombres sont répétés dans le problème suivant, ainsi que ceux de la détermination de a, si D est donné, sous le titre vicieux : « Inscrire dans une sphère un

cube carré », que j'ai déjà signalé dans ma précédente étude sur la *Stéréométrie de Héron*. L'origine et la signification véritable de ce dernier problème ne peuvent donc être méconnues.

On calcule ensuite, dans le premier problème, celui que nous examinons maintenant, $D^2 \times \frac{D}{2} \times \frac{11}{21}$, c'est-à-dire $\frac{\pi D^3}{12}$ ou le volume de l'hémisphère, ce que l'auteur appelle hyphérèse, le vide (dans la maçonnerie). Puis, pour calculer les conques à retrancher, on applique la formule (J), soit, puisqu'il y a quatre conques,

$$4V = \left[3\left(\frac{c}{2}\right)^2 + k^2\right]k.\frac{11}{21} \times 2.$$

La lacune ne permet pas de constater le passage de $3\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 108$ à $\left[3\left(\frac{c}{2}\right)^2 + k^2\right]k = 285\frac{1}{2}\frac{1}{8}$. Mais il est facile de reconnaître que $k = 2\frac{1}{2}$. On a donc ajouté à 108, $k^2 = 6\frac{1}{4}$, ce qui a fait $114\frac{1}{4}$, et on a multiplié par $k = 2\frac{1}{2}$; le résultat est exact. D'ailleurs $k = \frac{D}{2} - \frac{a}{2} = 2\frac{1}{2}$, puisque l'on a pris $8\frac{1}{2}$ pour $\frac{D}{2}$ et que $\frac{a}{2} = 6$.

On ne peut donc méconnaître dans ce problème une application rigoureuse de la formule (J).

Mensuræ, 45. — On demande de calculer la surface et le volume d'un segment de sphère dont le diamètre de la base unique $c = 24$, et dont la hauteur $k = 5$. La surface est obtenue par la formule

$$S = \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 + k^2\right] 4 \times \frac{11}{14},$$

qui est exacte avec $\pi = \frac{22}{7}$.

Le calcul du volume est misérablement corrompu et inachevé; on forme successivement $3\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 432$ et $\left(\frac{c}{2}\right)^2 k = 720$, et le

malheureux copiste ajoute qu'il ne trouve pas de solution plus exacte.

Mensuræ, 47. — Volume d'un segment de sphère où $c = 24$, $k = 36$. On applique la formule (J) sous la forme

$$V = \left[3\left(\frac{c}{2}\right)^2 k + k^3\right]\frac{11}{21}.$$

Le résultat est exact sauf une erreur de copie; $32585\frac{1}{7}$ doit être lu au lieu de $32775\frac{1}{7}$.

Stereometrica, II, 27. — Il est proposé de calculer le volume d'un vase (πίθος) sphéroïde qui a une profondeur $k = 8$, et un diamètre à l'ouverture de $c = 5$.

Au lieu d'appliquer la formule régulière $V = \frac{\pi}{6}\left(3\frac{c^2}{4} + k^2\right) k$, on a absurdement calculé $\frac{\pi}{6}\left(3\frac{c}{2} + k\right)^3$; mais l'exemple primitif devait sans doute offrir une application de la bonne formule (J).

Mensuræ, 38. — Nous rencontrons maintenant un problème qui semble indiquer une formule approximative analogue aux formules (C), (F), pour les segments de cercle. Il est malheureusement très corrompu. Voici la traduction du début où j'ai indiqué entre crochets une correction qui ne me paraît pas devoir faire de doute.

« *Mesure d'une conque d'un quart.* — Soit une conque d'un quart, dont le diamètre (c) soit en pieds $\left[10\frac{1}{2}\frac{1}{4}\right]$, la hauteur ($h$) $6\frac{1}{4}$, l'épaisseur $1\frac{1}{4}$ (il s'agit d'une voûte dont les surfaces soient des conques comme *Stereom.* II, 42, soit a cette épaisseur), et le *centre* (?) (k) $5\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Fais comme suit; ajoute le diamètre et l'épaisseur; il vient 12 pieds, le produit par 11 est de 132, encore par 11, 1452, divisant par 14, $103\frac{2}{3}\frac{1}{21}$, multipliant par l'épaisseur $1\frac{1}{4}$, $129\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{21}\frac{1}{84}$, c'est le volume de la maçonnerie de briques. »

Arrêtons-nous ici ; évidemment on calcule comme s'il s'agissait d'une voûte d'épaisseur a, dont la surface soit un quart de sphère de diamètre c. Le volume

$$\frac{\pi}{24}[(c+2a)^3-c^3]=\frac{\pi}{4}a(c+a)\left(c+a+\frac{a^2}{3(c+a)}\right)\cdot$$

Nous retrouvons bien les facteurs

$$\frac{\pi}{4}=\frac{11}{14},\qquad a=1\frac{1}{4},\qquad c+a=12,$$

Mais au lieu du dernier facteur qui devrait être $12\frac{1}{23}$ environ, nous rencontrons un facteur 11, plus petit que 12, et qui ne peut s'expliquer que par une confusion avec le facteur provenant de l'approximation de π. Très probablement la formule employée était $(c+a)^2\, a\, \frac{11}{14}\cdot$

La suite est entachée d'erreurs plus grossières encore, qui ne permettent guère de l'expliquer bien sûrement. On y reconnaît cependant qu'on apporte au précédent calcul deux corrections, en y ajoutant un terme où entre comme facteur l'excédant de la hauteur, c'est-à-dire $h-\frac{c}{2}$, et en en retranchant un terme où entre comme facteur le *manquant sur le centre*, c'est-à-dire $\frac{c}{2}-k=\frac{3}{8}$ de pied, ou 6 doigts, comme il est dit explicitement.

Par analogie avec la formule (C), où la correction sur la surface du demi-cercle est $c\left(h-\frac{c}{2}\right)$, comme le terme à corriger est d'ailleurs le produit de a par deux demi-cercles de rayon $(c+a)$, il semble que les termes correctifs devraient être

$$+\,a\,(c+a)\left(h-\frac{c}{2}\right)\qquad\text{et}\qquad -\,a\,(c+a)\left(\frac{c}{2}-k\right)\cdot$$

Mais d'une part le facteur $\frac{11}{7}$ y paraît bien introduit, et d'un autre côté, pour le terme additif, on aurait pris, peut-être par erreur, $c+2a$ au lieu de $c+a$; pour le terme négatif, autant qu'on en peut juger, ce serait au contraire ce dernier facteur qui

aurait été pris, tandis que si l'on s'en rapporte au résultat final, qui, souvent copié fidèlement, permet de rectifier les calculs intermédiaires, on aurait plutôt pris c dans les deux cas.

Les autres indications d'opérations qui figurent dans le texte sont sûrement erronées et il n'y a pas lieu d'en tenir compte. En résumé, on pourrait conclure de ce problème à l'emploi pour la surface des conques voisines du quart de sphère d'une formule comme

$$V = \frac{\pi}{2} c \left(h + k - \frac{c}{2}\right);$$

Mais elle est trop douteuse pour que nous insistions sur cette approximation qui n'offre pas d'ailleurs d'intérêt réel.

Geeponicus, 202. — J'ajoute pour mémoire qu'on rencontre à la fin de la collection la mesure d'un four (φοῦρνος) de dimension a, par $\frac{11a^3}{42}$; il s'agit évidemment d'un hémisphère de diamètre a; pour calculer le cube de la maçonnerie de la voûte d'épaisseur b, il est indiqué que l'on doit prendre $(a + 2b)^3$, et sous-entendu probablement que ce cube doit être multiplié par $\frac{11}{42}$, puis diminué de $\frac{11}{42} a^3$.

III

Voûtes cylindriques.

La Collection héronienne offre enfin deux problèmes, *Mensuræ* 49 (répété *Geepon.* 198) et *Geepon.* 199, qui sont passablement obscurs, mais me paraissent se rapporter à des voûtes cylindriques.

La construction dont il s'agit est désignée sous le nom de τετράσειρον ou τετρασίριον. Ce mot barbare paraît désigner un silo (latin *sirus*) de forme quadrangulaire. Il est d'ailleurs assez probable que le *tétrastèbe* ou *tétracamare* du problème *Stereom.* II, 1, que nous avons vu, représente une construction analogue, mais ayant pour élément principal une voûte sphérique. Cette

fois l'absence du diviseur 3, qui nécessairement accompagne $\frac{22}{7}$ dans les mesures des volumes sphériques, indique que les voûtes sont cylindriques.

Prenons d'abord le second des deux problèmes; la base du silo est un carré de côté $2a$, et sa hauteur est a, en sorte que l'on doit avoir une voûte d'arêtes ou une voûte en arc de cloître.

Le calcul de la surface, πa^2, quoique inexact, nous indique la voûte d'arêtes plutôt que la voûte en arc de cloître. La surface de la première est en effet $(4\pi - 8)\, a^2$, celle de la seconde $8\, a^2$. Il est clair au reste que le calculateur n'avait aucune idée de la différence entre les surfaces cylindriques conservées et celles qui sont supprimées, et qu'il opère comme s'il avait un seul demi-cylindre.

Ce qui confirme bien qu'il s'agit d'une voûte d'arêtes, c'est que pour le calcul du volume du silo, après avoir obtenu le volume du demi-cylindre πa^3, qu'il trouve de $84 \frac{11}{24}$ $(a = 3)$, il y ajoute un terme de $18 \frac{1}{4}$, sans indiquer comment il est obtenu.

Dans l'autre problème, ce terme correctif est $\frac{1}{14}$ du terme à augmenter; ici le coefficient serait beaucoup plus fort et de $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$, mais l'emploi d'un pareil diviseur est absolument invraisemblable, et il est plus probable que les nombres sont corrompus.

Le volume du vide dans la voûte en arc de cloître est $\frac{8}{3}\, a^3$, dans la voûte d'arêtes $\left(2\pi - \frac{8}{3}\right) a^3$. Si l'on met cette expression sous la forme $\pi a^3 \left(1 + \frac{1}{m}\right)$, en faisant $\pi = \frac{22}{7}$, on aurait $\frac{1}{m} = \frac{5}{33}$ ou environ $\frac{1}{7}$.

Pour l'autre problème, la base du silo est un rectangle de côtés $2a$, $2b$, et sa hauteur h est supérieure à a comme à b. Il serait évidemment très hasardeux de vouloir définir géométriquement la construction de la voûte d'arêtes établie dans ces conditions.

En tous cas, les formules approximatives sont très grossièrement déduites de celles relatives au silo à base carrée.

On prend pour la surface $\pi\left(\frac{a+b}{2}\right) h$ et pour le volume du silo $\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h\left(1+\frac{1}{m}\right)$. Comme je l'ai dit, m est pris égal à 14.

Je remarquerai seulement que, si l'on suppose la voûte établie avec des arêtes planes (par conséquent les sections droites des cylindres elliptiques), le volume serait $abh\left(2\pi-\frac{8}{3}\right)$. Au lieu de prendre $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, on aurait donc dû prendre ab dans la formule approximative.

Quant à la surface de la voûte d'arêtes dans ce cas, elle dépend évidemment des fonctions elliptiques, tandis que celle de la voûte correspondante en arc de cloître dépend seulement des fonctions circulaires si $h > a$, ou logarithmiques si $h < a$.

En résumé, cette étude nous a permis seulement de constater la connaissance dans l'école héronienne de la quadrature des calottes sphériques et de la cubature des segments sphériques à une base, questions que le maître n'avait point traitées.

Quant aux formules approximatives qui ont fait l'objet de cette étude, je crois avoir suffisamment expliqué les considérations très simples qui ont conduit les anciens à les employer. On a pu remarquer aussi que, si un certain nombre en paraissent vraiment anciennes, d'autres sont incontestablement récentes et postérieures à Héron.

SUR

LA TORPILLE ÉLECTRIQUE

PAR M. F. JOLYET[1]

Depuis longtemps, on a comparé, au point de vue du fonctionnement, l'organe électrique de la Torpille au muscle strié.

Comme le muscle, l'appareil électrique est soumis à l'influence de la volonté, et il reçoit des nerfs centrifuges émanant de centres excito-moteurs ou électriques, par l'intermédiaire desquels, à l'état normal, les incitations de la volonté amènent la décharge électrique de l'organe, de la même façon qu'elles amènent, pour les muscles striés ordinaires, la contraction. La section des nerfs, ou la destruction des centres d'où ils émanent, paralyse l'organe, comme la section des nerfs moteurs paralyse les muscles. Dans ces dernières années, on est allé plus loin dans cette assimilation des fonctions électrique et musculaire.

M. Marey aurait constaté qu'il existe une période d'excitation latente pour l'appareil électrique de la torpille, analogue à celle du muscle : c'est par l'application de la myographie et des signaux électriques à l'étude de la fonction qui nous occupe, que cet important résultat aurait été constaté.

Pendant les mois de septembre et d'octobre derniers, j'ai eu l'occasion à Arcachon, dans le laboratoire marin de la Société scientifique, de répéter les expériences de M. Marey, et de les

---

[1] Lu dans la séance du 13 janvier 1888.

compléter par la détermination de la vitesse de l'agent nerveux dans les nerfs électriques; en tenant compte de ce fait nouveau, négligé par ce physiologiste, je suis arrivé à une conclusion diamétralement opposée, à savoir qu'il n'y a pas de temps perdu pour l'organe électrique.

Pour déterminer la vitesse de conduction dans les nerfs électriques, j'ai suivi la méthode de Helmholtz et de Marey, en utilisant en particulier les dispositions spéciales employées par le professeur du Collège de France dans le travail que j'ai rappelé.

J'ai constaté ainsi que cette vitesse est relativement faible, beaucoup plus faible que la vitesse de conduction dans les nerfs moteurs de la grenouille, puisqu'elle n'est que de 6 mètres par seconde. Il y a donc une grande importance à en tenir compte dans les expériences de mesure du temps perdu de l'appareil électrique.

Dans ces conditions, on trouve que l'intervalle de temps qui sépare le moment de l'excitation du nerf de la torpille, du moment de l'inscription par le signal (muscle de grenouille, ou signal Deprez) de la décharge de l'organe électrique, défalcation faite du retard propre du signal, est employé à la propagation de la vibration nerveuse dans le nerf, du point excité à l'organe électrique : la vibration du nerf une fois arrivée à l'appareil électrique, celui-ci entre en action, et la décharge s'ensuit, sans qu'il y ait de temps perdu appréciable.

Les recherches de M. Bergonié, sur la cause du temps perdu du muscle, en montrant que ce phénomène est dû à l'élasticité musculaire, confirment d'ailleurs le résultat indiqué ci-dessus : l'absence d'une période d'excitation latente de l'appareil électrique.

La torpille, cachée dans le sable et presque toujours immobile, se présente avec des fonctions amoindries et lentes à se manifester. La respiration, par exemple, est peu active, si on la compare à celles d'autres poissons, toujours en mouvement, les mulets je suppose. Tandis que, en effet, ceux-ci consomment par kilogramme d'animal et par heure 134 centimètres cubes d'oxygène, les torpilles n'en consomment que 49 centimètres cubes.

Les actes réflexes sont également plus lents à se manifester que chez les autres animaux : l'acte réflexe qui met en jeu l'organe électrique de la torpille est beaucoup plus long que l'acte réflexe qui amène la contraction d'un muscle chez la grenouille. Tout cela est en rapport avec la lenteur de conduction dans les nerfs, chez la torpille.

Les membres de la Société peuvent voir sur les tracés en circulation, la vérification des faits que j'ai avancés. On remarque également que chaque flux électrique, enregistré au moyen du signal Deprez, n'est pas un acte simple, en ce sens que l'attraction par l'électro, de l'armature portant le style inscripteur, ne donne pas un plateau sur les tracés, pendant le passage du courant, mais une ligne sinueuse à crochets aigus.

L'explication de ce fait est la suivante : chacune des incitations de la volonté qui amène un flux électrique de l'organe a dû être transmise par les nerfs électriques aux divers départements de cet organe. Comme les divers nerfs électriques et les divers filets d'un même nerf n'ont pas la même longueur, les vibrations nerveuses, causées par la volonté, parties à un même moment à l'origine des nerfs, n'arriveront pas au même instant aux différents départements de l'organe électrique. Il en résultera que le flux simple, dû à une excitation unique émanée de la volonté, sera lui-même composé de chacun des flux secondaires non synchrones de tous les départements de l'organe.

J'ai eu l'occasion de constater un fait déjà signalé par A. Moreau, à savoir que les petites torpilles, contenues encore dans l'utérus de la mère, peuvent donner, lorsqu'on les en a extraites, des décharges même sensibles à la main. Recueillies dans mon galvanomètre de du Bois, ces décharges lançaient violemment l'aiguille contre les bornes d'arrêt. Toujours la direction du courant est constante chez les petites comme chez les grosses torpilles : la surface dorsale de l'organe étant positive, par rapport à la surface ventrale.

Pendant une partie du développement de la torpille dans l'utérus, les branchies extérieures, sous forme de chevelu vascu-

laire flottant dans l'eau, sont intéressantes à étudier; elles tombent plus tard et sont remplacées pour la respiration par les branchies ordinaires. Le liquide contenu dans chacune des poches utérines, et dans lequel baignent les petites torpilles, est de l'eau de mer : l'analyse m'a montré que ce liquide contenait la même quantité de chlorure de sodium que l'eau de mer du bassin. Relativement aux gaz dissous, il y avait un peu moins d'oxygène, et davantage d'acide carbonique; mais cela tenait sans doute à ce que la mère avait été retirée de l'eau depuis quelques instants. Je ferai connaître dans une autre communication le mécanisme par lequel la torpille renouvelle l'eau dans ses poches utérines.

DES

DÉBOISEMENTS AMÉRICAINS

ET

DE LEUR INFLUENCE MÉTÉOROLOGIQUE

M. Lespiault communique à la Société un certain nombre de documents qu'il a reçus d'Amérique, et qui lui paraissent de nature à confirmer les idées météorologiques qu'il a, à plusieurs reprises, développées devant ses collègues.

M. Lespiault commence par rappeler qu'il a, bien des fois, non seulement depuis 1880, mais depuis cinq ou six ans, signalé au passage un grand nombre de singularités atmosphériques qui lui semblaient présenter un autre caractère que celui de phénomènes accidentels, et dont la fréquence et l'intensité se rattachaient plutôt, suivant lui, à une modification profonde et de longue durée du climat de l'Europe Occidentale. Il pourrait renvoyer, à ce sujet, à cinq ou six communications successives qui ont été insérées par extraits dans les procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

Le caractère général de cette modification ne se manifeste guère dans les moyennes. Les moyennes de température, de pression barométrique, de pluie sont à peu près ce qu'elles étaient jadis; mais la distribution est différente. Les extrêmes se rencontrent beaucoup plus fréquemment et atteignent des degrés bien rares ou même inconnus il y a dix ans. Pour ne parler que des deux dernières années, on trouve, pendant ce court espace de temps, dans les colonnes d'observations météorologiques de diverses natures, des chiffres qui dépassent de beaucoup, soit en moins, soit en plus, toutes les indications des registres précédents.

En ce qui concerne d'abord le thermomètre, on le voit, dans la matinée du 16 janvier 1881, descendre, à Bordeaux et à Nérac, à — 22°, c'est-à-dire à plusieurs degrés au-dessous des froids les plus excessifs des années antérieures. Par contre, le 18 juillet, il s'élève à 39°,1, marquant ainsi dans le cours de cette seule année 1881, la température la plus basse et la température la plus haute qui aient jamais été constatées depuis que l'on dispose d'instruments exacts.

Le baromètre, de son côté, dans la journée du 17 janvier 1881, atteint à Paris la pression extraordinaire de 787 millimètres, et s'élève le lendemain, à Prague, à $788^{mm}3$, hauteur précédemment inconnue. Par contre, tout au nord de l'Europe, il descend, à plusieurs reprises, aux environs de 720^{mm}.

Si, au lieu de comparer les observations d'une année entière, on se contente de comparer celles de mois correspondants, on voit encore bien des nombres sortir des limites dans lesquelles ils s'étaient maintenus jusqu'ici. C'est ainsi que, du 8 au 14 juin 1881, le thermomètre à minima descend plusieurs fois à Bordeaux jusqu'à 4°, que les 28 et 31 juillet 1882, il marque 5° à Clermont et à Limoges, et que, d'autre part, le 27 juillet 1882, le baromètre atteint à Paris la hauteur de 775^{mm}, la plus forte qui ait été notée, dans le mois de juillet, depuis le commencement du siècle.

Mais ces chiffres n'ont d'importance que pour les météorologistes. Sauf les excès de froid et de chaud, ils attirent peu l'attention du public. Ce qui au contraire frappe tout le monde, c'est la modification qui paraît s'être faite dans le cours des saisons.

On en connait les traits généraux : d'une part, des sécheresses persistantes, plus fréquentes et plus prolongées que par le passé, généralement accompagnées d'un anticyclone; d'autre part, et surtout, des pluies continues, comme celles de la fin de 1882, des inondations répétées, des tempêtes sans exemple, telles que celles du 14 octobre et du 28 novembre 1881, dont le journal *la Nature* a donné une description détaillée, des coups de vent terribles amenés par des dépressions successives qui suivent, pendant des mois entiers, la même route, avec une désespérante régularité.

Où chercher la cause probable de cette intensité excessive des accidents météorologiques? Il suffit, d'après M. Lespiault, pour expliquer tous les faits qu'il vient d'énumérer, d'une très simple hypothèse. Admettons un instant qu'il y ait eu, dans ces dernières années, un accroissement marqué d'énergie dans les bourrasques qui abordent régulièrement, dix à quinze fois par mois, les côtes occidentales de l'Europe, et voyons les conséquences de cette supposition. D'abord, la profondeur d'une bourrasque augmentant avec son énergie, le baromètre descend plus bas au centre et monte plus haut sur les bords; ensuite, la température variant, toutes choses égales d'ailleurs, en sens inverse de la pression, les écarts du thermomètre augmentent en même temps que ceux du baromètre. Enfin, une énergie plus grande entraîne une plus grande intensité des tempêtes, une plus grande quantité de pluie en un lieu donné, une plus grande vitesse du vent.

Ce n'est pas tout : les dépressions cycloniques tracent, à travers l'atmosphère, un sillon d'autant plus droit et d'autant plus facile qu'elles ont plus d'énergie. Si cette énergie est grande, leur ligne de parcours se maintient longtemps aux mêmes latitudes, de sorte qu'elles amènent sur leur passage une série ininterrompue de mauvais temps. A droite et à gauche, au contraire, régnent le calme et les hautes pressions. Plus le fleuve aérien est rapide, plus son action est concentrée; lorsque les bourrasques qu'il emporte dans son cours sont faibles, elles ont de la tendance à se subdiviser à mesure qu'elles avancent et à finir en pluie d'arrosoir; lorsqu'elles sont puissantes, elles poursuivent leur chemin en masse serrée, elles *font balle*, pour ainsi dire, et semblent frayer la route de celles qui les suivent. On voit donc que, si l'on admet que les bourrasques ont augmenté d'énergie depuis quelques années, il a dû en résulter une accentuation marquée de tous les phénomènes météorologiques, et des séries plus longues de beau temps ou de mauvais temps, bien que les moyennes aient dû rester sensiblement les mêmes.

Il y a lieu maintenant de se demander si cette augmentation

d'énergie des cyclones, sensible seulement depuis un petit nombre d'années, a pu être amenée par quelque modification physique survenue récemment à la surface du globe.

Ici, on est réduit aux hypothèses; quelques météorologistes sont portés à chercher la cause des phénomènes dont il a été question plus haut dans un changement de direction du Gulf-Stream repoussé par les glaciers du Gröenland. M. Lespiault fait remarquer à ce propos que le Gulf-Stream est généralement regardé aujourd'hui comme un courant de surface résultant surtout de la poussée du vent, et que, par suite, les changements qui peuvent se produire dans son cours ne sont que les changements simultanés dans le régime des mouvements aériens. Il pense donc qu'il faut chercher ailleurs cette cause problématique.

On sait que toutes les bourrasques qui nous abordent viennent d'Amérique, soit directement, soit après quelques détours et quelques transformations. Le plus souvent, elles entrent en Amérique par le golfe du Mexique, remontent les bassins du Mississipi, du Missouri, de l'Ohio, et sortent par le Saint-Laurent. Jadis, elles perdaient de leur énergie, pendant ce long voyage, à cause de la résistance que présentaient à leur partie inférieure les grandes forêts d'Amérique. Aujourd'hui que ces forêts disparaissent avec une rapidité incroyable, n'y a-t-il pas lieu de supposer que les bourrasques perdent moins de force vive et arrivent sur nous plus souvent comme des boulets de canon que comme des jets d'arrosoir [1]?

A cette hypothèse, que M. Lespiault a plusieurs fois soumise, sous toute réserve, au jugement de la Société, on peut faire deux

---

[1] Au moment même où cette communication était faite à la Société, l'Europe était traversée, dans toute sa profondeur, du nord au sud, par une de ces puissantes bourrasques qui se frayent un chemin comme des boulets de canon, et qui sont certainement moins rares aujourd'hui qu'il y a quelques années.

Le 5 mars, cette dépression, très profonde et très étendue, se montrait au nord de la Scandinavie;

Le 6, elle avait son centre sur le golfe de Livonie;

Le 7, sur l'Adriatique;

Le 8, sur Lésina;

Le 9, elle couvrait la Méditerranée occidentale tout entière. Ce jour-là, tout le

objections principales : la première, c'est que l'Amérique est bien loin pour exercer sur notre climat une action si prononcée; la seconde, c'est que les Américains auraient dû être les premiers à s'apercevoir des effets désastreux de leurs déboisements.

Il sera répondu tout à l'heure à la première objection. M. Lespiault veut répondre d'abord à la seconde à l'aide des documents qu'il a entre les mains.

Bien souvent, dans ces dernières années, les journaux américains ont manifesté des appréhensions au sujet de ces déboisements qui marchent chez eux en progression géométrique; bien souvent ils les ont regardés comme la cause principale des inondations répétées dont leur pays a tant à souffrir depuis quelque temps. Mais jamais, peut-être, ils n'avaient donné des chiffres aussi précis et aussi détaillés que ceux qui se trouvent dans *l'Abeille* de la Nouvelle-Orléans du 6 février 1883. Voici des extraits de l'article que ce journal consacre aux forêts des États-Unis :

« Nous avons publié dernièrement une statistique des bois de charpente que produisent les usines du Nord et de l'Ouest.

» Les chiffres énormes de ces coupes faites un peu au hasard nous ont effrayés sur le sort réservé à nos incomparables forêts. L'immensité de nos ressources a aveuglé le peuple et le gouvernement lui-même, au point de leur laisser croire qu'elles étaient inépuisables; aussi l'abatage s'est-il fait sans aucune des précautions que la science forestière impose à qui veut tirer parti des bois sans les détruire. La cognée de nombreux établissements industriels a frappé sans discernement, s'attaquant tout d'abord aux arbres les plus rapprochés, poursuivant ensuite une exécution *qui transforme*

---

littoral de cette mer éprouva des froids inconnus, et fut simultanément couvert de masses de neige. La neige tomba à Naples, à Caserte, à Gênes, à Nice, à Marseille, à Cette, à Barcelone, où il n'avait pas neigé depuis 50 ans, à Almeria *où il n'avait jamais neigé*, et même à Tripoli où les Arabes étaient dans la stupéfaction, n'ayant aucune idée d'un pareil phénomène.

Le 10, cette dépression paraît se bifurquer; une partie remonte sur le golfe de Gênes : les cartes ne permettent pas malheureusement de suivre l'autre partie qui est probablement la cause d'une tempête de trois jours rendant toute navigation impossible sur la mer Rouge, à partir du 12.

en déserts arides les plaines d'où s'élevaient les géants des forêts que Châteaubriand émerveillé a si poétiquement décrits.

» Au Nord, dans l'Ouest, au Sud, des plaintes s'élèvent contre cette destruction insensée..... La spéculation, plus encore que les habitants des États, a créé *les vides déplorables où se forment les orages, les tourbillons qui portent au loin leurs ravages.* Cela dure depuis quatre-vingts ans et se continue, sans relâche, des rives de l'Atlantique aux bords du Pacifique.

» ..... Il est facile de prévoir qu'avant peu le bois deviendra une rareté dans un pays qui, il y a quelques années à peine, possédait les plus belles et les plus vastes forêts du monde.

» D'après le rapport du bureau de recensement des États-Unis, 18,001,356,000 pieds de bois de charpente, évalués à 233,367,729 livres sterling *(près de six milliards de francs),* disparus *annuellement* du sol, laissent à nu une superficie de 6,000,000 d'acres (environ 2,500,000 hectares). Le *Forester Bulletin* établit, d'un autre côté, que la consommation annuelle du bois de chauffage est de 145,778,137 cordes, valant 321,962,373 livres. Cette immense quantité de combustible dépeuple 7,000,000 d'acres de terre. C'est à peine si quelques broussailles remplacent les arbres séculaires tombés sous la scie de la spéculation. Bientôt, dit un journal, si on n'arrête pas ce dévergondage criminel, les États-Unis seront aussi dépouillés et aussi arides que la Palestine. »

Le lendemain, le même journal insérait la lettre suivante :

« Nouvelle-Orléans, 7 février 1883.

» Messieurs les Éditeurs de *l'Abeille,*

» Votre remarquable article d'hier sur les forêts mérite les éloges de tous ceux qui voient l'avenir par dessus les épaules de la multitude. Depuis bien longtemps déjà, nous avons tenté d'attirer l'attention des gouvernants à ce sujet, témoins ces quelques mots adressés au bureau de santé le 1er janvier 1882 :

« Très honorés collègues, des inondations l'hiver et des conflagrations l'été *pourraient bien être causées par la dévastation de nos forêts.* Aussi nous voyons l'*ordre des saisons interverti* par l'alternance de pluies torrentielles et de sécheresses sans précédents.

» Le bureau de santé national pourrait bien éveiller l'attention du Congrès sur cet état de choses..... »

» Dr Piquée,
» Ex-membre du bureau de santé. »

Ces documents appellent quelques réflexions. Certes, les déboisements américains ne datent pas d'hier. Mais c'est depuis cinq ou six ans qu'ils ont pris une extension démesurée, aggravée encore par les incendies que les colons de l'extrême Ouest allument incessamment pour étendre la culture du blé ou du maïs. Il est fort possible que les déboisements antérieurs aux dix dernières années aient amené dans notre climat une modification légère et graduelle, que bien des personnes croyaient déjà avoir remarquée depuis longtemps. Mais ces déboisements étaient relativement insensibles, et ce n'est que tout récemment, par l'effet d'un ravage général, que cette modification est devenue alarmante et de nature à préoccuper tout le monde.

Autre remarque : Les documents qu'on vient de lire sont des 6 et 7 février 1883; ils n'ont trait qu'aux intempéries qui ont précédé 1882 et aux inondations terribles de cette dernière année. Eh bien! ils précédaient de quelques jours seulement une nouvelle inondation, plus désastreuse encore, la plus forte qui ait jamais désolé les États-Unis. Le 14 février courant, en effet, à Cincinnati, l'Ohio, qui n'avait jamais atteint une hauteur de plus de 60 pieds, montait à 66 pieds $\frac{3}{4}$, et la crue n'était pas terminée. Cette inondation est descendue ensuite au Mississipi, renversant les barrages, couvrant des centaines de kilomètres de chaque côté du fleuve, bouleversant les gares et emportant des villages entiers.

An moment où l'Ohio atteignait son niveau le plus élevé, la bourrasque qui avait causé ces désastres était probablement déjà sur l'Océan, ainsi qu'il est permis de le conjecturer, d'après la note suivante insérée au *Journal d'Histoire naturelle de Bordeaux* (n° du 28 février 1883).

« Dans la nuit du 14 au 15 février, un redoutable cyclone a failli causer la perte du transatlantique *le Saint-Laurent*, vers le 20e degré de longitude ouest, c'est-à-dire bien au-delà de la pointe sud de l'Irlande. Le baromètre est tombé à 710^{mm}, *ce qui ne s'était peut-être jamais vu.* »

Les articles de *l'Abeille* qui ont été cités plus haut ont été

suivis de plusieurs autres, dont l'un, celui du 3 mars [1], insiste particulièrement sur les immenses ravages produits par le feu des pionniers dans les forêts américaines, et annonce que les pouvoirs publics commencent à se préoccuper de cette grave question. Il serait facile de multiplier les citations, mais celles qui précèdent suffisent pour montrer que les désastreux effets des déboisements ne passent pas inaperçus en Amérique [2]. Il reste à montrer que ces effets peuvent s'étendre jusqu'en Europe.

Pour cela, rappelons en quelques mots la trajectoire la plus habituelle des bourrasques qui sillonnent l'Atlantique Nord et les continents voisins.

Prenons une de ces bourrasques à son départ de la côte de Guinée. Poussée par les vents alizés de l'hémisphère nord, elle marche vers l'ouest, traverse l'Océan, et pénètre dans le golfe du Mexique en déviant vers le nord, comme le Gulf-Stream. Elle entre ensuite sur le continent, et remonte, du sud au nord, les immenses bassins du Mississipi, du Missouri et de l'Ohio. Le plus généralement, elle suit son chemin jusqu'à la région des Grands Lacs, en déviant graduellement vers l'est, et elle quitte le conti-

---

(1) **Extraits de *l'Abeille* du 3 mars 1883.**

Aujourd'hui encore, surtout dans les États du Sud, vous rencontrez souvent de vastes champs dénudés, d'où émergent, à deux ou trois pieds de terre, des centaines, des milliers de troncs d'arbres, calcinés et noircis par la fumée; vous vous croiriez au milieu de vieux cimetières de l'Europe. Ce sont les restes des incendies, œuvre des pionniers de l'Amérique. On n'a rien épargné, aux États-Unis, pour en opérer le déboisement. Le feu, la pioche, la scie, la machine à vapeur, tout était bon. Il semblait que ce fût une plaie dont il fallait se débarrasser à tout prix. Un colon arrivait, il brûlait *ou* abattait; un spéculateur survenait, il faisait disparaître les arbres séculaires pour semer le maïs ou le riz.

...... On sait maintenant ce qu'il en coûte aux États-Unis. D'immenses étendues de forêts ont disparu en pure perte......

...... Il y a quelques jours, c'est-à-dire bien tard, beaucoup trop tard, l'attention du Congrès semble s'être portée sur cette question grosse de périls......

(2) On trouve dans le *Wine and fruit Grower* d'autres indices d'une détérioration rapide du climat des États-Unis. Dans beaucoup de pays compris entre le 40e et le 45e degrés de latitude, tels que l'Indiana, l'Ohio, etc., nombre de viticulteurs sont obligés de renoncer à la culture des hybrides qu'ils ont inventés, ou qui ont longtemps prospéré chez eux, et cela principalement à cause du développement prodigieux et récent des maladies cryptogamiques, telles que le *Mildiou*, le *Rôt*, etc. On sait que ces maladies sont favorisées par l'humidité et les changements de temps.

nent américain à la hauteur de l'embouchure du Saint-Laurent, souvent plus haut ou plus bas. C'est de là qu'elle s'élance vers l'Europe, pour atteindre les côtes de Norwège, de Grande-Bretagne ou de France, et redescendre ensuite vers la mer Noire ou la mer Caspienne. Puis elle rejoint probablement son point de départ, parcourant ainsi, toujours dans le même sens, un immense circuit autour des régions calmes du Sahara africain et de la mer des Sargasses.

Ce parcours régulier, mis en lumière depuis longtemps par plusieurs météorologistes, particulièrement par M. de Tastes, est naturellement sujet à bien des variations. Tantôt la région calme du centre se resserre, tantôt elle s'étend; elle oscille du sud au nord, de l'est à l'ouest; mais elle occupe toujours en moyenne les mêmes zônes, et c'est autour d'elle que circulent les dépressions cycloniques, invariablement dans le sens que nous venons d'indiquer.

Il va sans dire que, dans cet immense trajet, ces dépressions subissent d'incessantes modifications. Elles changent à chaque instant de forme et de grandeur, dévient à droite ou à gauche, s'accélèrent ou se ralentissent. La seule chose qui ne change pas, c'est le sens de leur mouvement général de translation. Aucune, par exemple, ne va d'Europe en Amérique. Lors même qu'elles se montrent tout d'un coup au nord de nos cartes, il est à peu près certain qu'elles sont en réalité venues de l'ouest par les très hautes latitudes.

On peut remarquer en passant que c'est à cette constance de direction qu'est dû le demi-succès des prédictions du *New-York Herald*. Ce journal, qui du reste n'a pas fait connaître sa méthode de divination, n'a qu'à suivre de l'œil les bourrasques américaines. Connaissant leur vitesse et la latitude à laquelle elles entrent dans l'Océan, il peut annoncer à jour fixe le point où elles aborderont l'Europe. Elles arrivent, en effet, quelquefois en retard, plus souvent en avance; quelquefois entières, parfois en morceaux. Il en est qui, annoncées pour la France, entrent par la Norwège, et réciproquement; il en est d'autres qui se ralentissent à l'ap-

proche du continent et restent quelque temps stationnaires; mais, en somme, elles finissent toutes par passer et achever leur circuit.

En dépit de leurs constantes variations, il y a une chose que ces bourrasques conservent généralement sur une grande partie de leur parcours, c'est *leur somme totale d'énergie*. Cette somme se compose, comme on sait, de *l'énergie actuelle* ou force vive et de *l'énergie potentielle* ou de chaleur. On sait aussi que ces deux espèces d'énergie se transforment incessamment l'une dans l'autre, et il est clair que dans le voyage d'une bourrasque, du sud au nord, à travers le continent américain, ce serait généralement l'énergie actuelle qui s'accroîtrait aux dépens de l'énergie potentielle, s'il n'y avait pas des causes multipliées de déperdition.

Ces causes, il faut les chercher surtout dans les résistances de toute espèce qu'éprouve la masse d'air en mouvement. Or, une partie notable de cette résistance provient des forêts qui se trouvent sur son passage. Il n'y a qu'à voir les effets du vent sur un bois, pour se rendre compte de l'immense quantité de force vive nécessaire à l'agitation continuelle de tant de branches et de feuilles. Ajoutons que cette action porte uniquement sur la partie inférieure, c'est-à-dire la plus dense, de la masse d'air, et que, selon toute probabilité, les parties supérieures de l'atmosphère ne sont pas entraînées dans le mouvement cyclonique.

On voit, dès lors, toutes choses égales d'ailleurs, que la bourrasque, partie du golfe du Mexique avec une somme donnée d'énergie, doit en conserver d'autant plus, en arrivant à l'embouchure du Saint-Laurent, qu'elle a rencontré moins de forêts sur sa route. Dès lors aussi, elle en conserve davantage en atteignant l'Europe, et, par suite, nous ressentons le contre-coup des déboisements américains.

Quelques personnes pourraient penser que cette énergie des bourrasques venues d'Amérique a le temps de se perdre en grande partie dans la traversée. Cette opinion assez répandue tient peut-être à ce que les gens du monde qui étudient la géographie, non sur des globes, mais sur des cartes, se figurent en général la distance entre l'Amérique du Nord et l'Europe beaucoup plus

grande qu'elle n'est en réalité. Or, il importe de remarquer que, du golfe du Saint-Laurent à la côte orientale de l'Irlande, il n'y a guère que 700 lieues, c'est-à-dire *100 ou 200 lieues de moins* environ que la longueur moyenne du trajet des bourrasques à travers l'Amérique, ou que le chemin qu'elles ont à parcourir en Europe avant d'atteindre la mer Noire. La distance entre les deux continents est encore beaucoup plus courte par le Groënland et la Norwège, de telle sorte *qu'une bourrasque un peu étendue peut atteindre l'Europe par son bord oriental, avant que le bord occidental ait quitté l'Amérique.*

Il y a lieu de remarquer, en terminant, qu'en admettant un accroissement d'énergie dans la généralité des bourrasques, les effets de cet accroissement doivent être *relativement* beaucoup plus sensibles en Europe et surtout en France, pays très tempéré, qu'en Amérique, climat extrême où les pluies sont beaucoup plus considérables, les écarts de température et de pression beaucoup plus étendus, les transitions infiniment plus brusques et plus fréquentes. Ajoutons, enfin, que la théorie qui vient d'être exposée n'exige pas que *toutes* les bourrasques, ni même la plus grande partie aient augmenté d'énergie depuis quelques années. Il suffit qu'il en soit ainsi pour les plus violentes, et ce sont justement celles qui ont le plus long parcours sur le continent américain.

En résumé, voici les points sur lesquels M. Lespiault croit devoir appeler l'attention des météorologistes.

1° Les accidents météorologiques qui se multiplient depuis quelques années sont assez fréquents et assez graves pour qu'il y ait lieu de rechercher si l'on ne doit pas les attribuer à une cause permanente.

2° L'ensemble des phénomènes constatés s'expliquerait par une hypothèse très simple; il suffirait d'admettre un accroissement graduel d'énergie dans les cyclones qui nous arrivent d'Amérique.

3° La cause la plus probable de cet accroissement d'énergie est l'extension énorme que les déboisements américains ont prise dans ces derniers temps.

NOTE

SUR UN

NOUVEL ÉLECTROMÈTRE CAPILLAIRE

PAR M. CLAVERIE

L'électromètre capillaire de M. Lippmann, d'une sensibilité si merveilleuse et si précieux pour la mesure des faibles forces électromotrices, est assez difficile à construire; de plus, il est peu transportable et très délicat, la moindre maladresse de l'opérateur pouvant le mettre hors de service. Il serait avantageux dans certains cas d'avoir un appareil plus robuste, plus aisément transportable, d'une construction et d'une observation plus faciles, dût-on y perdre un peu de sensibilité. On obtient facilement un semblable instrument en inclinant le tube capillaire dans lequel se déplace le ménisque, ce qui permet de lui donner un diamètre beaucoup plus grand. M. Debrun a publié en 1880, dans le *Journal de Physique*, la description d'un nouvel électromètre conçu dans ce sens.

L'idée d'incliner le tube capillaire est si simple que je l'avais eue également; mais mes premiers essais, qui datent de 1879, ne furent pas heureux, et je n'en ai pas parlé. J'ai obtenu récemment de meilleurs résultats, et la théorie de mon appareil m'a semblé présenter quelques points intéressants.

Un tube de verre de 5 à 6^{mm} de diamètre intérieur est chauffé en un point à la lampe et étiré de façon à donner un tube capillaire légèrement conique ayant un peu moins de 1^{mm} de diamètre intérieur. Le tube V est fixé sur une petite planchette verticale, et la partie capillaire recourbée comme l'indique la figure 1, de

façon à présenter une partie à peu près horizontale AB, vient plonger dans l'eau acidulée d'un second tube V, fermé inférieurement et contenant du mercure. La planchette est portée par un pied à trois vis calantes qui permet de donner à la partie capillaire AB différentes inclinaisons. Cette partie rectiligne AB est soutenue par une petite règle fixée à la planchette et qui porte des divisions en millimètres ou demi-millimètres. Un fil de platine α plonge dans le tube V et un second fil β dans le mercure de V'. Ces deux fils α et β communiquant, on verse dans V du mercure, on incline l'appareil jusqu'à ce que ce mercure coule goutte à goutte par l'extrémité du tube capillaire dans V', puis on place AB à peu près horizontalement et on ajoute peu à peu du mercure en V jusqu'à ce que la surface de séparation du mercure et de l'eau acidulée soit dans la branche horizontale AB près de l'extrémité B la plus voisine de V'. Cette position du ménisque sera le zéro de l'appareil. Si on rend maintenant le fil α négatif par rapport à β, le ménisque se déplace de B vers A, et le déplacement est toujours le même pour une même force électromotrice, si l'appareil est bien construit.

Mais il est rare qu'un appareil construit sans précautions particulières n'ait pas plusieurs zéros, et que la même force électromotrice ne donne pas plusieurs déplacements différents. Pour se rendre compte de ces irrégularités, il est bon de chercher d'abord comment varie le diamètre intérieur d'un fil capillaire obtenu en étirant un tube à la lampe. J'ai mesuré la longueur qu'une goutte de mercure occupe dans les différentes parties de ce fil et représenté graphiquement les résultats en prenant pour axe des x l'axe du fil et menant des ordonnées proportionnelles aux longueurs de la bulle. En partant d'un point situé à quelques centimètres de la partie large du tube, on obtient des courbes ayant la forme générale indiquée sur la figure 2, la courbe tourne d'abord sa concavité vers le haut, puis devient rectiligne et tourne enfin sa concavité vers le bas. Mais il est rare que la courbe déterminée par points présente la régularité de celle que j'ai tracée sur la figure; on trouve à peine un tube sur dix dont

le diamètre décroisse aussi régulièrement. Le plus souvent la courbe ne présente aucune portion à peu près rectiligne; j'en ai trouvé qui présentaient des maxima et des minima; il est évident que les tubes qui me les avaient donnés ayant le même diamètre en plusieurs points, les électromètres que j'aurais construits avec eux auraient présenté toutes les irrégularités signalées plus haut.

Je ne conserve que les tubes qui me donnent une courbe pouvant, sur une certaine longueur, être confondue avec une droite, et c'est la portion correspondant à cette partie rectiligne de la courbe qui fait la branche AB de l'électromètre.

Soit $y = ax + b$ la droite dont les ordonnées sont les longueurs de l'index de mercure. Plaçons AB horizontalement, faisons toucher les fils α et β, et en pressant sur le mercure du tube V, amenons successivement le ménisque aux différents points de AB. D'après la loi approchée de Jurin, les pressions supportées par le ménisque aux différents points du tube doivent être en raison inverse des diamètres du tube, par suite proportionnelles aux racines carrées des longueurs correspondantes de la bulle ou des ordonnées de la droite $y = ax + b$. La courbe ayant ces pressions pour ordonnées sera une parabole $y^2 = ax + b$; mais le sommet dont l'abscisse est $x = -\frac{b}{a}$ est assez éloigné pour que la partie de cette parabole qui correspond à la partie AB du tube puisse être confondue avec une droite. J'ai vérifié ce fait expérimentalement et construit la courbe par points en mesurant les pressions à l'aide d'un manomètre différentiel à eau et huile, dont la sensibilité était cinq fois et demie plus grande que celle d'un manomètre à eau; j'ai obtenu rigoureusement une droite.

Si a et b sont les hauteurs de mercure que le ménisque peut soutenir aux points A et B du tube, l'origine des coordonnées étant en A, cette droite sera

$$y = \frac{b - a}{l} x + a = mx + a;$$

donc un de mes électromètres a et b estimés en indications du

manomètre différentiel étaient

$$a = 755^{mm},$$
$$b = 1033,$$
$$l = 150.$$

Si on établit entre les deux fils α et β une différence l de potentiel, chaque ordonnée croît d'une fraction de sa longueur primitive proportionnelle à l, d'après les expériences de M. Lippmann, pourvu que $l < 0,9$ Daniell, c'est-à-dire que y devient $y' = y(1 + ke)$.

La nouvelle ligne des pressions nécessaires pour amener le ménisque aux différents points du tube est

$$y' = (1 + ke)(mx + a).$$

Les deux droites coupent l'axe des x au même point; prenons ce point pour origine, les deux droites deviennent alors

$$y = mx,$$
$$y' = (1 + ke)mx.$$

Soit m la position initiale du ménisque correspondant à $e = 0$, m' sa nouvelle position (*fig.* 3).

Le diamètre du tube capillaire est assez faible par rapport à celui du tube V pour que le déplacement du ménisque ne fasse pas varier d'une façon appréciable le niveau du mercure dans le tube V. La pression est donc la même en m et en m', les ordonnées des deux droites correspondant à ces points sont égales et le déplacement mm' est la différence des abscisses $x - x'$ des deux droites pour une même ordonnée y.

$$x - x' = kex' = \frac{ke}{1 + ke} x,$$

pour une force électromotrice donnée e, $x - x'$ varie proportionnellement à x ou à $\frac{bl}{b - a}$; cette quantité est assez grande pour être considérée comme la même pour tous les points de la partie AB du tube.

D'autre part, pour une valeur déterminée de x, correspondant au zéro de l'électromètre, le déplacement d est lié à la force électromotrice par la relation

$$d(1+ke) - kex_0 = 0.$$

Si d et e sont rapportés à deux axes rectangulaires, on a une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont $e = -\frac{1}{k}$ $d = x_0$ (*fig.* 4).

La forme de la courbe fait voir que l'appareil présente son maximum de sensibilité pour de petites valeurs de e, mais l'asymptote horizontale est tellement éloignée $\left(d = \frac{bl}{b-a}\right)$ dans notre appareil que la branche d'hyperbole se confond sensiblement avec une droite près de l'origine, et les déplacements du ménisque sont proportionnels aux forces électromotrices. L'instrument que j'ai construit peut donc servir à mesurer par une simple lecture de petites forces électromotrices, et il permet avec un zéro parfaitement fixe d'évaluer $\frac{1}{500}$ et même $\frac{1}{1000}$ de D, le tube AB étant horizontal.

La seule précaution à prendre pour avoir des indications sûres est de s'assurer que le tube est mouillé par l'eau acidulée au-dessus de la position finale du ménisque; pour cela on aspirera légèrement dans le tube V, de façon à amener le ménisque dans une position plus éloignée de sa position initiale que celle qu'il doit prendre définitivement, et on le laisse redescendre; on attend ensuite quelques instants pour qu'il soit parfaitement fixé et on fait la lecture.

Il est nécessaire aussi que l'acide sulfurique employé pour aciduler l'eau soit bien pur. Dans *tous* les acides sulfuriques vendus comme purs, j'ai trouvé des produits nitreux qui attaquent le mercure et qu'il est indispensable d'éliminer.

Nous avons supposé le tube AB horizontal; si on l'incline sur l'horizon, on fait varier sa sensibilité. La sensibilité augmente lorsqu'on incline le tube de façon que les parties les plus étroites

proche du continent et restent quelque temps stationnaires; mais, en somme, elles finissent toutes par passer et achever leur circuit.

En dépit de leurs constantes variations, il y a une chose que ces bourrasques conservent généralement sur une grande partie de leur parcours, c'est *leur somme totale d'énergie*. Cette somme se compose, comme on sait, de *l'énergie actuelle* ou force vive et de *l'énergie potentielle* ou de chaleur. On sait aussi que ces deux espèces d'énergie se transforment incessamment l'une dans l'autre, et il est clair que dans le voyage d'une bourrasque, du sud au nord, à travers le continent américain, ce serait généralement l'énergie actuelle qui s'accroîtrait aux dépens de l'énergie potentielle, s'il n'y avait pas des causes multipliées de déperdition.

Ces causes, il faut les chercher surtout dans les résistances de toute espèce qu'éprouve la masse d'air en mouvement. Or, une partie notable de cette résistance provient des forêts qui se trouvent sur son passage. Il n'y a qu'à voir les effets du vent sur un bois, pour se rendre compte de l'immense quantité de force vive nécessaire à l'agitation continuelle de tant de branches et de feuilles. Ajoutons que cette action porte uniquement sur la partie inférieure, c'est-à-dire la plus dense, de la masse d'air, et que, selon toute probabilité, les parties supérieures de l'atmosphère ne sont pas entraînées dans le mouvement cyclonique.

On voit, dès lors, toutes choses égales d'ailleurs, que la bourrasque, partie du golfe du Mexique avec une somme donnée d'énergie, doit en conserver d'autant plus, en arrivant à l'embouchure du Saint-Laurent, qu'elle a rencontré moins de forêts sur sa route. Dès lors aussi, elle en conserve davantage en atteignant l'Europe, et, par suite, nous ressentons le contre-coup des déboisements américains.

Quelques personnes pourraient penser que cette énergie des bourrasques venues d'Amérique a le temps de se perdre en grande partie dans la traversée. Cette opinion assez répandue tient peut-être à ce que les gens du monde qui étudient la géographie, non sur des globes, mais sur des cartes, se figurent en général la distance entre l'Amérique du Nord et l'Europe beaucoup plus

grande qu'elle n'est en réalité. Or, il importe de remarquer que, du golfe du Saint-Laurent à la côte orientale de l'Irlande, il n'y a guère que 700 lieues, c'est-à-dire *100 ou 200 lieues de moins* environ que la longueur moyenne du trajet des bourrasques à travers l'Amérique, ou que le chemin qu'elles ont à parcourir en Europe avant d'atteindre la mer Noire. La distance entre les deux continents est encore beaucoup plus courte par le Groënland et la Norwège, de telle sorte *qu'une bourrasque un peu étendue peut atteindre l'Europe par son bord oriental, avant que le bord occidental ait quitté l'Amérique.*

Il y a lieu de remarquer, en terminant, qu'en admettant un accroissement d'énergie dans la généralité des bourrasques, les effets de cet accroissement doivent être *relativement* beaucoup plus sensibles en Europe et surtout en France, pays très tempéré, qu'en Amérique, climat extrême où les pluies sont beaucoup plus considérables, les écarts de température et de pression beaucoup plus étendus, les transitions infiniment plus brusques et plus fréquentes. Ajoutons, enfin, que la théorie qui vient d'être exposée n'exige pas que *toutes* les bourrasques, ni même la plus grande partie aient augmenté d'énergie depuis quelques années. Il suffit qu'il en soit ainsi pour les plus violentes, et ce sont justement celles qui ont le plus long parcours sur le continent américain.

En résumé, voici les points sur lesquels M. Lespiault croit devoir appeler l'attention des météorologistes.

1° Les accidents météorologiques qui se multiplient depuis quelques années sont assez fréquents et assez graves pour qu'il y ait lieu de rechercher si l'on ne doit pas les attribuer à une cause permanente.

2° L'ensemble des phénomènes constatés s'expliquerait par une hypothèse très simple; il suffirait d'admettre un accroissement graduel d'énergie dans les cyclones qui nous arrivent d'Amérique.

3° La cause la plus probable de cet accroissement d'énergie est l'extension énorme que les déboisements américains ont prise dans ces derniers temps.

NOTE

SUR UN

NOUVEL ÉLECTROMÈTRE CAPILLAIRE

PAR M. CLAVERIE

L'électromètre capillaire de M. Lippmann, d'une sensibilité si merveilleuse et si précieux pour la mesure des faibles forces électromotrices, est assez difficile à construire; de plus, il est peu transportable et très délicat, la moindre maladresse de l'opérateur pouvant le mettre hors de service. Il serait avantageux dans certains cas d'avoir un appareil plus robuste, plus aisément transportable, d'une construction et d'une observation plus faciles, dût-on y perdre un peu de sensibilité. On obtient facilement un semblable instrument en inclinant le tube capillaire dans lequel se déplace le ménisque, ce qui permet de lui donner un diamètre beaucoup plus grand. M. Debrun a publié en 1880, dans le *Journal de Physique*, la description d'un nouvel électromètre conçu dans ce sens.

L'idée d'incliner le tube capillaire est si simple que je l'avais eue également; mais mes premiers essais, qui datent de 1879, ne furent pas heureux, et je n'en ai pas parlé. J'ai obtenu récemment de meilleurs résultats, et la théorie de mon appareil m'a semblé présenter quelques points intéressants.

Un tube de verre de 5 à 6^{mm} de diamètre intérieur est chauffé en un point à la lampe et étiré de façon à donner un tube capillaire légèrement conique ayant un peu moins de 1^{mm} de diamètre intérieur. Le tube V est fixé sur une petite planchette verticale, et la partie capillaire recourbée comme l'indique la figure 1, de

TABLE DES MATIÈRES.

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

[illegible]

COMMISSION MÉTÉOROLOGIQUE DÉPARTEMENTALE

DE LA GIRONDE

OBSERVATIONS PLUVIOMÉTRIQUES

de Juin 1881 à Juin 1882

OBSERVATIONS PLUVIOMÉTRIQUES

FAITES DANS LE DÉPARTEMENT DE LA GIRONDE

de Juin 1881 à Juin 1882.

NOTE DE M. RAYET,

Vice-Président de la Commission météorologique départementale.

Les études sur la distribution journalière de la pluie en France, entreprises dès 1871 par M. Belgrand (1), inspecteur général des ponts et chaussées, et poursuivies depuis par les soins du Bureau central météorologique de France (2), avaient montré, depuis plusieurs années déjà, qu'il n'existait dans la Gironde qu'un nombre trop restreint de pluviomètres et que ceux qui existaient ne pouvaient, par suite de leur groupement géographique, donner qu'une idée fort incomplète du mode de distribution des chutes d'eau dans la partie nord du golfe de Gascogne.

La Commission météorologique de la Gironde, préoccupée depuis longtemps de cette situation, s'est enfin, au commencement de 1881, trouvée en mesure de compléter sur ce point, grâce à la libéralité du Conseil général, le cercle de ses recherches.

Ce sont les premiers résultats de ces études, que la Commission a bien voulu me confier le soin d'organiser, que je dois résumer ici.

Les Stations pluviométriques, établies directement par la Commission ou qui sont venues se placer sous sa direction, sont au nombre de trente-deux. Leur emplacement a été choisi de manière à mettre en évidence les principaux traits de la distribution des pluies à la surface du département et à préparer les éléments nécessaires à la solution de quelques questions spéciales.

(1) Association scientifique de France. — *Bulletin mensuel météorologique*; années 1872 à 1876.

(2) *Annales du Bureau central météorologique de France*; années 1877 et suivantes.

Les publications du Bureau central météorologique mettent hors de doute l'existence d'une sorte de minimum de pluie dans la vallée même de la Gironde et de la Garonne, ainsi qu'une croissance rapide des quantités d'eau tombées lorsque l'on marche, sur le littoral de l'Océan, du nord au sud; mais ces publications sont insuffisantes pour mettre en relief les accidents locaux provenant des collines situées entre la Garonne et la Dordogne, l'influence probable de la chaîne des Dunes, et enfin l'action de la route ordinaire des orages à partir du bassin d'Arcachon vers la vallée de l'Isle.

La solution de ces questions locales, intéressantes au point de vue agricole, ne pouvait être tentée, avec quelques chances de succès, que par des météorologistes vivant au milieu de la région; c'est donc ces détails que la Commission météorologique a cherché à étudier.

Pour y parvenir, les pluviomètres ont été disposés, autant que l'a permis la nécessité de trouver des observateurs exacts, suivant une série de lignes parallèles aux bords de l'Océan; en particulier une ligne de stations a été établie à l'ouest des Dunes, et une seconde, doublant la première, sur la ligne des Étangs.

Quant au mode de publication, la Commission a été unanime à penser que les observations devaient, suivant la méthode adoptée en 1871 par M. Belgrand, être publiées jour par jour; seulement les nécessités de l'impression ont obligé à ne donner les observations journalières qu'au millimètre près, en conservant dans les totaux mensuels le chiffre exact de la quantité d'eau, notée chaque fois au dixième de millimètre à l'aide des pluviomètres de l'Association scientifique, dont la surface est de 4 décimètres carrés.

Les observations sont faites à huit heures du matin et portées à la date du jour où l'eau a été recueillie.

Les tableaux qui terminent cette note mettent en évidence tous les détails de la distribution des pluies de juin 1881 à juin 1882:

Été de 1881. — Le mois de juin a été pluvieux et les jours de beau temps peu fréquents.

En juillet l'état du ciel s'est sensiblement amélioré et l'on peut constater l'existence de deux périodes pluvieuses: la première, comprise entre le 5 et le 10; la seconde, du 21 au 24.

Pour août, les observations indiquent trois périodes de pluies générales. La première, commençant le 10, se termine par les pluies abondantes du 14; viennent ensuite deux jours de beau temps, puis les pluies intenses des 17 et 18. Enfin, la troisième et dernière période pluvieuse s'étend du 27 au 29.

Dans le trimestre d'Été, et malgré les irrégularités que les orages peuvent introduire dans la distribution des chutes d'eau, on remarquera une croissance marquée dans les quantités de pluie, en allant du nord au sud; 83 millimètres à Soulac, 165 à Cazaux et 174 à Captieux. Les nuages paraissent d'ailleurs s'essuyer sur les côtes, car, s'il tombe environ 175 millimètres de pluie sur la ligne des Étangs, l'eau recueillie dans l'Entre-deux-Mers ne forme plus qu'une couche de 125 millimètres de hauteur.

L'été a été normal, au moins dans son ensemble, quoique un peu sec.

Automne de 1881. — En septembre, l'on doit remarquer deux périodes pluvieuses : la première, du 5 au 12; la seconde, du 21 au 26.

Le mois d'octobre débute par une longue série de beaux jours, suivis par une première période pluvieuse du 10 au 16 et une seconde série d'averses du 20 au 26.

Novembre a un régime exceptionnel caractérisé par une absence presque complète de pluie jusqu'au 24, et puis par des chutes d'eau nombreuses jusqu'à la fin du mois.

Il y a, pour l'automne, une augmentation de pluie très marquée en passant de Soulac (159 millimètres) à Cazaux (213 millimètres) et à Captieux (280 millimètres). La diminution est aussi très sensible en allant de l'ouest à l'est; mais quelques lacunes dans les séries rendent difficile de la préciser.

L'automne a été sec; à Bordeaux, 152 millimètres de pluie à la place de 176 millimètres, qui est la moyenne.

Hiver 1881-1882. — Le mois de décembre a été très pluvieux jusqu'au 23; c'est à peine si, dans cette période, on distingue un ou deux jours sans pluie. A partir du 24, le ciel s'éclaircit et le beau temps s'établit.

En janvier, qui a été exceptionnellement beau, il n'y a qu'une seule période de pluie ayant donné 20 à 25 millimètres, et comprise entre le 4 et le 9.

Le beau temps qui s'était établi le 10 janvier dure jusqu'au 12 février; mais à partir de cette date, le vent tourne peu à peu au S.-O. et les observations indiquent une faible période de pluie du 12 au 20. Elle est suivie par quelques jours de ciel serein, mais la pluie reprend le 26 pour s'étendre jusqu'à la fin du mois.

Les pluies d'hiver sont plus uniformément réparties que celles des saisons précédentes, et les différences entre les quantités d'eau recueillies dans les diverses Stations sont peu sensibles. Il faut cependant remarquer un maximum pluviométrique sur la ligne de séparation des bassins de la Gironde et de la Leyre.

En décembre, la quantité de pluie a légèrement dépassé la moyenne, mais janvier et février ont été très secs, en sorte que les chutes d'eau de l'hiver ne sont guère que les 5/8 des chutes normales.

Printemps 1882. — Le mois de mars débute par une série de pluies qui, suite de celles de février, continuent jusqu'au 6. Vient ensuite une période de beau temps, et puis une nouvelle période pluvieuse du 22 au 27.

Le mois d'avril a été généralement mauvais; les périodes pluvieuses sont au nombre de trois : la première, du 1er au 8; la seconde, du 13 au 19; la troisième enfin, la plus intense, du 23 au 30.

En mai, les observations indiquent nettement deux périodes de mauvais temps : l'une, du 1er au 8; la seconde, très étendue, du 20 au 31.

Le printemps a été très pluvieux. Tandis que la moyenne normale des pluies du printemps est, à Bordeaux, de 176 millimètres environ, la quantité d'eau recueillie à l'Observatoire s'est, en 1882,

élevée à 275 millimètres, présentant ainsi un excès de 100 millimètres.

Je joins enfin à cette note un résumé, par saisons, des observations pluviométriques de juin 1881 à juin 1882 :

RÉSUMÉ DES OBSERVATIONS PLUVIOMÉTRIQUES DE LA GIRONDE
de Juin 1881 à Juin 1882.

STATIONS	OBSERVATEURS	ÉTÉ 1881	AUT. 1881	HIVER 1882	PRINT. 1882	ANN.
		mm	mm	mm	mm	mm
Phare de Grave.	Les Gardiens du phare...	93,3	129,2	122,5	182,0	527,0
Soulac.	M. Lemaitre, brig. forest.	82,6	159,4	138,7	216,2	596,9
Saint-Nicolas.	M. Caplon, brig. forestier.	100,9	170,0	154,2	205,9	631,0
L'Alexandre.	M. Eymat, garde canton..	157,4	188,7	161,0	243,8	750,9
Phare d'Hourtin.	M. Labrousse, maîtr. de ph.	120,7	201,4	146,9	195,4	664,4
Gressier.	M. Martin, garde canton..	»	»	»	237,7	»
Salie.	M. Villenave, garde forᵗ..	163,3	191,9	166,8	215,9	747,9
Grand-Mont.	M. Beneyt, brig. forestier.	119,2	172,4	158,4	216,5	666,5
Moutchic.	M. Nohide, brig. forestier.	172,3	200,6	167,9	241,3	782,1
Gleize-Vieille.	M. Benné, brig. forestier.	»	»	»	220,8	»
Le Porge.	M. Bachon, conducteur des ponts et chaussées.	193,5	208,0	184,9	278,4	865,7
Arès.	M. Hazera, pharmacien...	162,1	202,2	211,5	232,7	808,5
Piquey.	M. Rougé, brig. forestier.	»	182,5	147,2	197,6	»
Cazaux.	M. Grenier, chef de gare..	164,7	212,9	197,0	222,3	796,9
Saint Julien.	M. Robert, instituteur...	133,5	118,5	137,5	206,3	595,8
Sainte-Hélène.	MM. Guilhou et Lacroix, instituteurs.	148,5	206,1	182,6	319,9	857,1
Audenge.	M. Gassian, instituteur...	»	»	139,7	201,0	»
Belin.	M. Rozié, instituteur....	170,0	218,5	157,2	291,1	836,8
Saint-Savin.	M. Lafaye, instituteur...	105,6	144,3	122,9	272,9	645,7
Sᵗ-André-de-Cubzac.	M. Ménard, prof. au Coll..	148,5	123,9	135,1	281,1	688,6
Bordeaux.	Observatoire............	128,4	151,8	127,1	274,5	681,8
Talence.	M. Boutfroy............	136,5	169,8	145,3	265,0	716,6
La Sauve.	École normale..........	»	»	169,2	265,8	»
Machorre.	M. Thevenin............	127,9	»	»	266,4	»
Saint-André-du-Bois.	M. Ricard, instituteur...	»	»	123,7	290,8	»
Captieux.	M. Coutures, instituteur..	174,0	279,6	135,1	290,9	879,6
Coutras.	M. Roumand, instituteur..	104,9	123,0	102,3	268,1	598,3
Les Églisottes.	M. Bodin, instituteur....	119,4	133,7	133,8	280,5	667,4
Lussac.	M. Soubaigné, instituteur.	128,9	»	139,0	273,4	»
Sauveterre.	M. Chaigné, instituteur...	119,1	129,4	117,2	257,9	623,6
La Réole.	M. Clermont............	104,7	137,8	78,8	222,0	544,2
Grignols.	M. Jolles, instituteur....	151,4	217,5	116,5	268,8	754,2

Le tableau précédent met nettement en lumière le fait d'une croissance rapide des quantités de pluie du nord au sud du département, et l'existence d'un maximum de chute d'eau sur les

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Janvier 1882.*

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave	.	.	.	9	.	2	3	0	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15.2
Soulac	.	.	.	9	.	3	5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18 1
Saint-Nicolas	.	.	.	5	.	2	2	2	.	3	.	0	0	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14.6
L'Alexandre	.	.	.	9	.	4	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17,2
Phare d'Hourtin	.	.	.	.	6	2	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	13,1
Gressier	.	.	.	3	.	2	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7.6
Salie	.	.	1	5	.	6	4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18,5
Grand-Mont	.	.	.	5	.	3	4	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15,8
Moutchic	.	.	.	7	.	4	4	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17,7
Gleize-Vieille	.	.	.	5	.	5	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14.7
Le Porge	.	.	.	5	.	6	6	3	.	.	.	0	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20.1
Arès	.	.	.	15	.	7	6	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29.2
Piquey	.	.	.	10	.	3	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17.6
Cazaux	.	.	.		5	9	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	24,1
Saint-Julien	.	.	.	12	.	16		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	28 0
Sainte-Hélène	.	.	1	5	.	4	5	4	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18,3
Audenge	.	.	.	4	.	4	6	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16.4
Belin	.	.	2	1	.	2	2	2	.	.	.	.	1	.	0	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10 7
Saint-Savin	.	.	.	3	.	1	2	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10 8
Saint-André-de-Cubzac	.	.	4	.	.	1	.	2	.	0	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9.4
Bordeaux (Observatre)	0	0	0	0	0	1	4	2	0	0	0	0	0	0	0	.	.	.	.	0	.	0	0	0	0	.	.	.	.	.	.	9,7
Talence	.	2	.	1	.	2	.	5	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9 2
La Sauve	.	.	.	1	.	.	4	9	.	8	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	30,5
Machorre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	» »
Saint-André-du-Bois	0	0	0	1	.	0	1	2	0	.	0	.	0	0	0	.	.	.	.	0	0	0	.	.	0	0	0	0	0	.	.	8 5
Captieux	.	.	.	1	.	1	1	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5,5
Coutras	.	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3,2
Les Eglisottes	.	.	.	.	.	.	6	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	19.3
Lussac	.	0	0	3	0	1	2	2	0	0	0	0	.	.	0	.	.	.	.	0	.	0	0	.	0	.	.	.	.	.	.	0.1
Sauveterre	.	1	.	1	.	0	1	2	0	.	0	.	0	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	0	.	.	0	.	.	7.1
La Réole	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2.3
Grignols	.	.	.	2	.	1	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6,8

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Février* 1882.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	Totaux mm
Phare de Grave	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	0	1	.	.	.	.	.	.	6	16	9	33.0
Soulac	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	4	.	0	1	.	.	.	.	.	.	2	16	5	29 6
Saint-Nicolas	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	0	.	2	1	1	.	.	.	.	.	1	15	9	30,0
L'Alexandre	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	12	6	25.1
Phare d'Hourtin	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	.	1	.	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	13	7	25 6
Grossier	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	2	.	3	1	1	.	.	.	.	.	.	12	17	38,2
Salie	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	2	4	.	.	.	.	.	.	.	15	5	26,8
Grand-Mont	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	0	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	13	15	34 5
Moutchic	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	.	.	2	2	.	7	.	.	.	.	.	.	2	6	11	36 6
Gleize-Vieille	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	2	1	.	.	.	.	.	.	14	15	34 3
Le Porge	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	16	10	31,8
Arès	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	0	2	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	24	10	40.7
Piquey	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	2	.	4	1	1	.	.	.	.	.	.	13	5	28 1
Cazaux	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	3	.	.	.	.	6	8	16	5	44.1
Saint-Julien	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	18	37 9
Sainte-Hélène	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	29	15	49.3
Audenge	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	.	.	.	.	.	.	13	6	23.4
Belin	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	0	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	17	3	25.9
Saint-Savin	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15	15	33,0
Saint-André-de-Cubzac	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	31	15	50,0
Bordeaux (Observatre)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	0	.	1	0	0	1	1	.	0	0	.	.	0	14	9	29.3
Talence	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	1	.	0	.	2	.	.	.	.	.	.	13	21	39,0
La Sauve	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	2	2	.	.	.	.	.	0	18	17	39 5
Machorre	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	11	17	33.1
Saint-André-du-Bois	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	0	.	1	.	0	0	1	.	.	.	.	.	.	13	14	34,2
Captieux	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	14	10	30 4
Coutras	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29	11	42 6
Les Eglisottes	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	22	11	33 0
Lussac	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	0	.	2	.	0	1	1	.	.	.	.	.	.	23	21	49 3
Sauveterre	.	.	.	.	.	.	0	0	.	.	.	4	.	.	0	1	.	0	.	0	.	.	.	.	.	.	20	8	33,6
La Réole	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.	0	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	15	1	20 6
Grignols	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	0	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	11	7	26.1

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Mars* 1882.

STATIONS	1	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	15	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave	10	12	10	13	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	.	1	6	.	.	.	.	3	58,5
Soulac	8	11	14	11	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	1	3	.	.	.	.	4	58.1
Saint-Nicolas	4	9	22	5	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	5		.	2	4	.	.	.	.	4	53.3
L'Alexandre	5	12	33	6	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	3	2	2	6	.	.	.	5	80.3
Phare d'Hourtin	.	5	6	3	11	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	4	2	4	.	.	.	6	47,6
Gressier	2	8	37	12	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	2	0	5	1	4	.	.	.	4	77.8
Salie	6	4	14	9	0	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	1	4	7	.	.	.	.	2	54 0
Grand-Mont	3	6	23	9	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	2	3	0	.	.	.	5	58 6
Moutchic	4	8	32	13	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	5	5	4	.	.	.	6	84.7
Gleize-Vieille	2	9	33	15	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	2	.	5	4	4	2	.	.	4	47.2
Le Porge	1	12	34	20	.	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	2	.	7	4	4	.	.	.	4	97,5
Arès	2	11	19	9	.	2	1	.	0	0	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	4	2	1	5	3	5	.	.	.	4	69 3
Piquey	2	9	9	7	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	2	.	4	2	1	.	.	.	4	44 6
Cazaux	4	3	7	12	4	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	1	8	3	2	.	.	.	3	57 2
Saint-Julien	1	8	.	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	5	.	.	.	.	.	26 8
Sainte-Hélène	2	10	46	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	2	1	.	4	4	2	.	.	.	3	80 3
Audenge	1	6	13	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	6	3	.	.	.	6	47 0
Belin	1	1	23	10	.	2	2	0	.	.	0	.	.	.	.	0	.	0	.	.	0	2	3	0	3	3	2	.	.	.	2	55 7
Saint-Savin	12	6	26	9	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	3	5	.	.	.	.	3	67 6
Saint-André-de-Cubzac	2	6	37	10	.	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	3	.	.	.	.	2	63,1
Bordeaux (Observat^re^)	2	7	19	7	.	1	1	.	0	0	0	0	.	.	.	0	.	0	0	.	0	3	2	.	2	2	4	.	.	.	4	58 8
Talence	2	5	21	9	.	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	2	.	2	4	.	.	3	.	53.4
La Sauve	3	7	22	7	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	3	4	1	.	.	.	7	62.1
Machorre	2	6	34	4	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	1	3	2	.	.	.	3	65.1
Saint-André-du-Bois	2	4	38	4	.	2	3	0	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	0	0	.	4	1	.	2	4	3	.	.	.	3	70,8
Captieux	1	9	16	5	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	3	2	6	.	.	.	2	51,2
Coutras	3	6	24	7	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	1	3	1	.	.	.	3	56.9
Les Eglisottes	4	10	23	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	.	8	2	.	.	.	2	57,0
Lussac	3	4	23	7	.	2	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	.	0	0	.	.	1	3	.	1	3	1	.	.	.	3	50.4
Sauveterre	4	9	36	4	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	2	2	1	2	.	.	.	64,0
La Réole	.	.	36	2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	2	2	1	.	.	.	3	51.8
Grignols	.	7	14	7	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	3	.	2	3	3	.	.	.	3	47,2

Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies d'Avril 1882.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Totaux mm
Phare de Grave	.	.	.	3	.	8	2	.	.	.	.	.	1	4	6	2	6	19	.	.	.	.	.	3	1	11	7	2	1	1	75,7
Soulac	.	.	.	3	.	22	18	.	.	.	.	.	.	4	6	5	6	17	.	.	.	.	.	1	.	14	11	.	3	1	110 8
Saint-Nicolas	2	2	.	4	.	8	.	2	.	.	.	.	1	4	4	4	6	14	.	.	.	.	.	1	1	17	10	5	.	1	83.9
L'Alexandre	1	1	.	3	.	5	11	1	.	.	.	.	.	3	5	2	12	17	0	.	.	.	.	4	0	14	21	1	1	.	103,7
Phare d'Hourtin	1	.	.	6	.	8	3	0	.	.	.	.	0	5	7	1	8	14	1	.	.	.	.	2	.	17	16	2	.	.	89.2
Gressier	3	3	2	.	.	1	8	0	.	.	.	.	.	3	3	3	9	16	2	.	.	.	0	4	0	17	9	2	2	.	87.5
Salie	.	1	5	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	2	10	6	9	9	.	.	.	.	.	7	2	21	11	1	0	.	83,0
Grand-Mont	.	1	5	.	8	1	3	.	.	.	.	0	6	4	11	9	13	0	.	.	.	.	0	1	19	14	3	0	0	.	98,7
Moutchic	.	2	.	3	.	2	8	5	.	.	.	.	.	4	2	3	11	20	.	.	.	.	.	6	2	7	12	.	3	7	97,1
Gleize-Vieille	.	2	.	3	.	7	6		.	.	.	.	.	4	3	6	19	12	1	.	.	.	.	4	.	17	12	2	2	.	100,5
Le Porge	.	2	.	3	.	2	2	.	.	.	.	.	.	4	3	8	16	19	1	.	.	.	.	5	0	22	11	3	2	.	102.6
Arès	2	2	3	.	.	2	0	1	.	.	.	.	.	5	5	5	19	5	1	.	.	.	0	1	1	22	12	2	2	.	88.3
Piquey	4	.	.	7	.	3	.	.	.	.	.	.	.	5	5	12	9	11	1	.	.	.	.	1	.	17	10	1	1	.	86,3
Cazaux	.	.	.	7	0	4	.	.	.	.	.	.	.	3	10	2	9	13	.	.	.	1	6	5	20	7	5	3	1	.	95,2
Saint-Julien	.	.	.	7	.	.	20	5	.	.	.	.	.	.	11	.	11	.	.	.	.	.	.	.	40	.	.	2	.	.	95,1
Sainte-Hélène	2	.	.	8	1	.	.	.	.	.	12	.	.	.	5	8	12	27	1	.	.	.	1	7	1	26	29	2	0	.	140.0
Audenge	.	.	.	6	.	17	.	.	.	.	.	.	.	6	4	3	6	.	.	.	.	.	3	9	11	13	3	3	.	3	87,8
Belin	1	0	.	10	1	.	.	.	.	.	.	.	.	4	7	18	5	10	1	.	.	.	2	7	0	17	8	3	.	.	93.1
Saint-Savin	1	3	.	10	.	1	5	.	.	.	.	.	.	7	9	7	4	19	.	.	.	.	.	3	2	23	16	1	.	.	112,1
Saint-André-de-Cubzac	2	.	.	13	1	11	5	.	.	.	.	.	.	10	12	.	.	20	.	.	.	.	2	5	.	12	22	1	1	.	117.9
Bordeaux (Observatre)	2	.	.	15	.	0	2	.	.	.	0	.	.	5	12	4	3	12	2	.	.	.	3	5	1	19	10	1	1	.	94,1
Talence	2	.	.	14	.	0	2	.	.	.	.	.	.	5	6	8	1	15	2	.	.	.	0	6	2	16	16	0	0	.	94,9
La Sauve	3	6	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	15	12	4	13	.	.	.	.	.	6	1	19	11	3	.	.	114,7
Machorre	5	9	.	36	.	.	1	.	.	.	.	.	.	2	15	4	2	9	1	.	.	.	.	4	1	13	7	1	1	.	110,4
Saint-André-du-Bois	7	5	.	31	.	0	1	.	.	.	.	.	1	2	15	2	1	10	1	.	.	.	.	5	1	14	8	1	1	.	106.4
Captieux	.	2	.	14	2	.	1	.	.	.	.	.	.	7	14	.	15	10	0	.	.	.	.	18	1	12	7	4	.	2	108 3
Coutras	.	.	2	.	.	.	5	.	.	.	.	.	.	6	13	7	1	16	2	.	.	.	1	2	1	13	18	0	1	.	88.1
Les Eglisottes	4	.	1	3	.	.	6	.	.	.	.	.	.	6	10	9	.	20	.	.	.	.	.	3	4	18	13	.	3	.	97,0
Lussac	.	3	.	5	.	0	4	.	.	.	.	.	.	2	10	6	2	15	1	.	.	.	.	6	1	14	16	1	1	.	86,4
Sauveterre	3	.	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	13	1	3	8	.	.	.	.	.	.	7	16	9	.	9	.	87.3
La Réole	2	4	.	12	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3	9	6	1	8	.	.	.	.	.	3	1	16	0	1	.	.	65,2
Grignols	5	7	.	24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	11	7	6	5	2	.	.	.	.	13	.	10	14	2	1	.	111,7

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Mai* 1882.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave	2	.	.	11	0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	0	4	4	.	2	0	.	2	1	16	.	47.8
Soulac	2	.	.	12	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	.	4	2	1	.	.	.	2	18	.	47.3
Saint-Nicolas	5	.	.	11	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	5	.	1	2	.	4	1	37	.	68,7
L'Alexandre	7	.	.	11	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	4	.	.	.	8	5	1	17	.	59,8
Phare d'Hourtin	13	.	.	12	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	.	4	.	.	1	2	4	1	16	.	58,6
Gressier	8	.	11	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	8	.	.	.	4	6	2	28	.	72.4
Salie	1	.	.	8	3	.	.	3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	9	3	.	6	.	0	.	12	15	10	8	1	78,9
Grand-Mont	11	.	.	13	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	4	.	1	.	1	4	1	20	.	59,2
Moutchic	6	.	.	9	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	3	10	2	18	.	59,5
Gleize-Vieille	8	.	.	12	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	0	0	8	.	0	.	3	10	3	22	.	73,1
Le Porge	8	.	.	15	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	6	0	.	8	.	1	.	4	11	3	18	.	78,3
Arès	8	.	.	14	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	7	1	.	5	.	0	.	7	11	3	15	.	75,1
Piquey	8	.	.	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	7	.	.	4	.	.	.	7	11	3	14	.	66,7
Cazaux	.	.	.	13	1	.	.	5	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	9	.	.	13	.	.	.	.	11	3	15	.	69,9
Saint-Julien	.	.	.	26	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	5	.	.	17	.	.	.	12	8	.	13	.	84.4
Sainte-Hélène	9	0	.	17	3	8	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	7	.	9	.	.	.	8	1	5	25	1	99,6
Audenge	.	.	6	.	13	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	3	.	5	.	.	.	14	3	.	23	.	76,2
Belin	0	.	.	24	3	.	.	17	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	4	11	.	5	0	.	4	50	9	4	11	.	142,3
Saint-Savin	4	.	.	22	2	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	12	.	6	.	.	.	15	8	.	16	3	93,2
Saint-André-de-Cubzac	1	.	.	23	2	7	.	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	6	.	8	.	.	.	15	10	1	12	.	100,1
Bordeaux (Observatre)	2	0	.	34	4	2	.	19	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	3	1	8	0	1	.	15	8	5	15	1	121,6
Talence	1	.	.	32	5	5	.	14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	3	.	8	2	1	.	15	9	.	19	.	116,7
La Sauve	2	.	.	7	6	2	.	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	10	.	6	.	.	2	28	4	5	8	.	89,0
Machorre	1	.	.	23	4	2	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	6	.	1	.	0	1	27	2	5	10	0	90,9
Saint-André-du-Bois	1	.	.	26	4	1	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	10	0	4	0	0	1	37	8	10	0	113.6
Captieux	8	.	.	36	1	1	.	3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	7	.	1	3	.	.	7	19	.	10	36	.	131,4
Coutras	.	.	.	26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	2	.	26	1	.	.	32	3	6	26	0	124,0
Les Eglisottes	1	.	.	27	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	8	2	10	.	2	.	30	.	11	28	0	126.5
Lussac	1	0	.	24	3	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	16	1	11	0	0	2	31	4	7	27	1	136.6
Sauveterre	3	.		11	7	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	6	5	15	3	.	5	9	5	9	20	.	106,6
La Réole	3	.	.	19	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	2	23	2	.	1	.	17	.	7	25	.	105.3
Grignols	10	.	.	25	8	1	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	4	0	3	.	2	5	20	.	2	19	.	109,9

TABLES GÉNÉRALES

DES CINQ VOLUMES

DE LA DEUXIÈME SÉRIE

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Novembre* 1881.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Totaux mm
Phare de Grave	.	1	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	12	5	7	7	.	40,6
Soulac	4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	2	.	11	1	11	6	.	39,3
Saint-Nicolas	.	4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	3	.	11	1	11	11	0	46.1
L'Alexandre	.	7	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	4	.	10	.	7	27	3	59.1
Phare d'Hourtin	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	4	.	12	1	11	17	3	56,5
Gressier	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	» »
Salie	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	3	.	7	.	5	22	1	43.4
Grand-Mont	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	4	.	14	1	9	24	1	59.6
Moutchic	.	5	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	10	14	16	54,7
Gleize-Vieille	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	» »
Le Porge	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	.	.	.	.	3	.	12	.	15	20	1	61 0
Arès	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	3	.	.	12	13	16	3	54.6
Piquey	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	2	.	9	.	7	22	2	47.9
Cazaux	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7	.	.	.	.	.	.	3	.	8	4	8	22	8	59.4
Saint-Julien	.	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	.	.	10	.	4	.	25.4
Sainte-Hélène	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	3	.	.	.	.	.	3	.	11	.	13	22	9	66,2
Belin	.	.	2	.	.	.	.	0	0	.	.	.	0	0	0	0	0	4	0	0	0	.	.	4	0	8	.	17	9	0	46.2
Saint-Savin	.	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.	.	.	4	.	13	.	8	4	.	37,6
Saint-André-de-Cubzac	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	2	.	.	.	.	.	4	.	11	0	5	4	0	29.9
Bordeaux (Observatre)	.	2	0	.	.	.	.	.	.	.	0	0	0	0	1	0	0	2	.	.	.	.	.	4	.	9	0	5	5	1	29 5
Talence	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	4	0	.	13	6	6	0	6	32,3
La Sauve	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	»	.	.	4	.	8	4	5	26.4
Machorre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	» »
Saint-André-du-Bois	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	.	»	»	»	»	»	»	»	» »
Captieux	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	4	5	.	6	.	8	.	2	25,3
Coutras	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	12	26.0
Les Églisottes	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.	.	.	5	.	9	1	11	0	6	36.5
Lussac	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	0	0	0	1	.	.	.	.	.	4	.	7	0	5	4	1	25.2
Sauveterre	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	7	.	4	.	9	.	.	21.1
La Réole	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	4	.	7	.	.	4	22 8
Grignols	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	5	.	6	.	7	.	1	26.1

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Décembre* 1881.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave	4	1	2	.	.	2	2	8	3	10	3	.	4	.	.	3	3	3	1	4	5	12	4	.	.	.	.	.	.	.	.	74.3
Soulac	3	4	.	.	2	3	7	8	6	8	5	1	10	.	.	2	4	1	1	8	4	9	6	.	.	.	.	.	.	.	.	91.0
Saint-Nicolas	3	4	.	.	2	4	8	9	.	10	7	.	6	.	.	.	2	3	5	9	2	10	14	.	.	.	.	.	.	.	1	109.6
L'Alexandre	7	2	.	.	1	2	8	10	6	6	4	6	14	.	.	.	3	7	5	14	1	10	12	.	.	.	.	.	.	.	.	118.7
Phare d'Hourtin	4	1	.	.	0	5	9	8	1	17	3	2	10	.	.	.	3	5	3	16	1	10	10	.	.	.	.	.	.	.	.	108.2
Grossier	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	» »
Salie	5	3	.	.	.	2	2	13	2	14	4	.	7	.	.	.	3	5	22	18	2	12	8	.	.	.	.	.	.	.	.	121.5
Grand-Mont	5	3		.	1	2	8	10	1	14	6	.	5	.	.	.	3	3	7	12	2	11	15	.	.	.	.	.	.	.	.	108.1
Moutchic	10		.	.	.	3	.	12	6	8	6	6	9	.	.	.	4	10	8	10	2	10	9	.	.	.	.	.	.	.	.	115.6
Gleize-Vieille	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	» »
Le Porge	9	1	.	.	1	3	4	15	11	6	12	.	11	.	.	.	3	3	11	22	1	11	10	.	.	.	.	.	.	.	.	133.0
Arès	5	.	.	.	.	6	6	7	1	15	13	.	10	.	.	.	.	6	13	3	12	39	7	.	.	.	.	.	.	.	.	141.6
Piquey	5	1	.	.	2	1	4	6	1	15	11	.	11	.	.	.	2	3	9	17	.	10	5	.	.	.	.	.	.	.	.	101.5
Cazaux	.	1	.	2	.	.	12	8	.	14	.	6	.	.	.	.	5	11	19	29	6	7	9	.	.	.	.	.	.	.	.	128.8
Saint-Julien	.	.	.	.	.	.	4	7	1	8	.	.	.	2	.	.	.	3	7	14	2	.	24	.	.	.	.	.	.	.	.	71.6
Sainte-Hélène	6	2	.	.	1	6	1	11	.	10	6	.	.	3	1	.	2	11	7	27	2	9	10	.	.	.	.	.	.	.	.	115.0
Audenge	.	.	5	4	.	.	5	5	6	6	6	3	.	.	.	.	2	5	13	19	4	13	6	.	.	.	.	.	.	.	.	99.9
Belin	9	3	.	.	0	1	0	12	0	7	3	.	1	.	.	.	1	2	26	34	2	10	10	.	.	.	.	.	.	.	.	120.6
Saint-Savin	4	.	1	.	.	2	.	9	.	6	.	.	.	.	.	.	3	6	8	23	2	9	6	.	.	.	.	.	.	.	.	79.1
Saint-André-de-Cubzac	6	2	0	.		2	.	8	.	6	1	0	2	.	0	.	2	5	7	19	2	8	6	.	.	.	.	.	.	.	.	75.7
Bordeaux (Observatre)	7	3	.	0	0	2	2	6	1	6	0	0	3	0	0	0	1	5	8	19	11	9	11	.	0	.	0	0	0	.	0	88.1
Talence	6	.	.	.	3	.	9	4	.	.	.	.	3	.	.	1	1	17	26	1	1	15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	97.1
La Sauve	6	1	.	.	.	2	1	8	2	3	.	.	2	2	.	.	2	6	17	23	4	9	14	.	.	.	.	.	.	.	.	99.2
Machorre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	» »
Saint-André-du-Bois	8	4	0	0	0	1	0	7	0	3	0	.	0	1	0	0	2	2	15	20	1	9	8	.	0	.	0	.	.	.	0	81.0
Captieux	3	.	.	.	.	1	.	8	.	3	.	1	.	.	.	.	2	5	18	31	2	10	16	0	.	.	.	.	.	.	.	99.2
Coutras	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	6	9	20	17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	56.5
Les Eglisottes	4	1	.	.	.	1	.	6	.	3	.	.	.	.	.	.	2	2	10	44	2	6	12	.	.	.	.	.	.	.	.	91.5
Lussac	5	4	0	0	0	2	.	8	0	2	0	0	0	0	.	0	1	1	14	24	2	7	10	0	0	.	0	.	.	.	.	79.6
Sauveterre	7	5	.	.	.	.	.	6	.	2	.	.	.	1	.	.	1	2	15	20	1	9	5	1	.	.	.	.	.	.	.	76.5
La Réole	2	.	.	.	1	.	3	.	.	2	.	.	.	.	.	2	2	10	17	0	12	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	55.9
Grignols	3	0	.	.	2	.	.	6	0	1	.	.	.	.	.	.	2	2	19	25	1	10	11	0	.	.	.	.	.	.	.	83.6

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Janvier 1882.*

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave	.	.	.	9	.	2	3	0	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15.2
Soulac	.	.	.	9	.	3	5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18 1
Saint-Nicolas	.	.	.	5	.	2	2	2	.	3	.	0	0	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14.6
L'Alexandre	.	.	.	9	.	4	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17.2
Phare d'Hourtin	.	.	.	.	6	2	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	13.1
Gressier	.	.	.	3	.	2	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7.6
Salie	.	.	1	5	.	6	4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18.5
Grand-Mont	.	.	.	5	.	3	4	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15.8
Moutchic	.	.	.	7	.	4	4	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17.7
Gleize-Vieille	.	.	.	5	.	5	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14.7
Le Porge	.	.	.	5	.	6	6	3	.	.	.	0	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20.1
Arès	.	.	.	15	.	7	6	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29.2
Piquey	.	.	.	10	.	3	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17.6
Cazaux	.	.	.		5	9	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	24.1
Saint-Julien	.	.	.	12	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	28 0
Sainte-Hélène	.	.	1	5	.	4	5	4	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	18.3
Audenge	.	.	.	4	.	4	6	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16.4
Belin	.	.	2	1	.	2	2	2	.	.	.	.	1	.	0	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10 7
Saint-Savin	.	.	.	3	.	1	2	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10 8
Saint-André-de-Cubzac	.	.	4	.	.	1	.	2	.	0	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9.4
Bordeaux (Observat^re^)	0	0	0	0	0	1	4	2	0	0	0	0	0	0	0	.	.	.	.	0	.	0	0	0	0	.	.	.	.	.	.	9.7
Talence	.	2	.	1	.	2	.	5	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9 2
La Sauve	.	.	.	1	.	.	4	9	.	8	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	30.5
Machorre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	» »
Saint-André-du-Bois	0	0	0	1	.	0	1	2	0	.	0	.	0	0	0	.	.	.	.	0	0	0	.	.	0	0	0	0	0	.	.	8 5
Captieux	.	.	.	1	.	1	1	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5.5
Coutras	.	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3.2
Les Eglisottes	.	.	.	.	.	.	6	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	19.3
Lussac	.	0	0	3	0	1	2	2	0	0	0	0	.	.	0	.	.	.	.	0	.	0	0	.	0	.	.	.	.	.	.	0.1
Sauveterre	.	1	.	1	.	0	1	2	0	.	0	.	0	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	0	.	.	0	.	.	7.1
La Réole	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2.3
Grignols	.	.	.	2	.	1	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6.8

Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies de Février 1882.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	Totaux mm
Phare de Grave	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	0	1	.	.	.	.	.	.	6	16	9	33.0
Soulac	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	4	.	0	1	.	.	.	.	.	.	2	16	5	29 6
Saint-Nicolas	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	0	.	2	1	1	.	.	.	.	.	1	15	9	30,0
L'Alexandre	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	12	6	25.1
Phare d'Hourtin	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	.	1	.	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	13	7	25 6
Grossier	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	2	.	3	1	1	.	.	.	.	.	.	12	17	38,2
Salie	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	2	4	.	.	.	.	.	.	.	15	5	26,8
Grand-Mont	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	0	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	13	15	34 5
Moutchic	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	.	.	2	2	.	7	.	.	.	.	.	.	2	6	11	36 6
Gleize-Vieille	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	2	1	.	.	.	.	.	.	14	15	34 8
Le Porge	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	16	10	31,8
Arès	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	0	2	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	24	10	40.7
Piquey	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	2	.	4	1	1	.	.	.	.	.	.	13	5	28 1
Cazaux	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	3	.	.	.	.	6	8	16	5	44.1
Saint-Julien	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	18	37 9
Sainte-Hélène	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	29	15	49,3
Audenge	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	.	.	.	.	.	.	13	6	23.4
Belin	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	0	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	17	3	25.9
Saint-Savin	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15	15	33,0
Saint-André-de-Cubzac	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	31	15	50,0
Bordeaux (Observatre)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	0	.	1	0	0	1	1	.	0	0	.	.	0	14	9	29.3
Talence	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	1	.	0	.	2	.	.	.	.	.	.	13	21	39.0
La Sauve	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	2	2	.	.	.	.	.	0	18	17	39 5
Machorre	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	11	17	33.1
Saint-André-du-Bois	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	0	.	1	.	0	0	1	.	.	.	.	.	.	13	14	34,2
Captieux	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	14	10	30 4
Coutras	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	29	11	42 6
Les Eglisottes	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	22	11	33 0
Lussac	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	0	.	2	.	0	1	1	.	.	.	.	.	.	23	21	49 3
Sauveterre	.	.	.	.	.	.	0	0	.	.	.	4	.	.	0	1	.	0	.	0	.	.	.	.	.	.	20	8	33,6
La Réole	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.	0	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	15	1	20 6
Grignols	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	0	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	11	7	26.1

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Mars* 1882.

STATIONS	1	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave	10	12	10	13	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	.	1	6	.	.	.	.	3	58,5
Soulac	8	11	14	11	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	1	3	.	.	.	.	4	58.1
Saint-Nicolas	4	9	22	5	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	5		.	2	4	.	.	.	.	4	53.3
L'Alexandre	5	12	33	6	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	3	2	2	6	.	.	.	5	80.3
Phare d'Hourtin	.	5	6	3	11	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	4	2	4	.	.	.	6	47,6
Gressier	2	8	37	12	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	2	0	5	1	4	.	.	.	4	77.8
Salie	6	4	14	9	0	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	1	4	7	.	.	.	.	2	54 0
Grand-Mont	3	6	23	9	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	2	3	0	.	.	.	5	58 6
Moutchic	4	8	32	13	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	5	5	4	.	.	.	6	84.7
Gleize-Vieille	2	9	33	15	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	2	.	5	4	4	2	.	.	4	47.2
Le Porge	1	12	34	20	.	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	2	.	7	4	4	.	.	.	4	97,5
Arès	2	11	19	9	.	2	1	.	0	0	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	4	2	1	5	3	5	.	.	.	4	69 3
Piquey	2	9	9	7	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	2	.	4	2	1	.	.	.	4	44 6
Cazaux	4	3	7	12	4	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	1	8	3	2	.	.	.	3	57 2
Saint-Julien	1	8	.	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	5	.	.	.	.	.	26 8
Sainte-Hélène	2	10	46	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	2	1	.	4	4	2	.		.	3	80 3
Audenge	1	6	13	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	6	6	3	.		.	6	47 0
Belin	1	1	23	10	.	2	2	0	.	.	0	.	.	.	.	0	.	0	.	.	0	2	3	0	3	3	2	.	.	.	2	55 7
Saint-Savin	12	6	26	9	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	3	5	.	.	.	.	3	67 6
Saint-André-de-Cubzac	2	6	37	10	.	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	3	.	.	.	.	2	63,1
Bordeaux (Observat^re^)	2	7	19	7	.	1	1	.	0	0	0	0	.	.	.	0	.	0	0	.	0	3	2	.	2	2	4	.	.	.	4	58 8
Talence	2	5	21	9	.	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	2	.	2	4	.	.	3	.	53.4
La Sauve	3	7	22	7	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	3	4	1	.	.	.	7	62.1
Machorre	2	6	34	4	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	1	3	2	.	.	.	3	65.1
Saint-André-du-Bois	2	4	38	4	.	2	3	0	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	0	0	.	4	1	.	2	4	3	.	.	.	3	70,8
Captieux	1	9	16	5	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	3	2	6	.	.	.	2	51,2
Coutras	3	6	24	7	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	1	3	1	.	.	.	3	56 9
Les Eglisottes	4	10	23	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	.	8	2	.	.	.	2	57,0
Lussac	3	4	23	7	.	2	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	.	0	0	.	.	1	3	.	1	3	1	.	.	.	3	50.4
Sauveterre	4	9	36	4	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	2	2	1	2	.	.	.	64,0
La Réole	.	.	36	2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	2	2	1	.	.	.	3	51.8
Grignols	.	7	14	7	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	3	.	2	3	3	.	.	.	3	47,2

Commission Météorologique de la Gironde. — Pluies d'Avril 1882.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Totaux mm
Phare de Grave	.	.	.	3	.	8	2	.	.	.	.	.	1	4	6	2	6	19	.	.	.	.	.	3	1	11	7	2	1	1	75,7
Soulac	.	.	.	3	.	22	18	.	.	.	.	.	.	4	6	5	6	17	.	.	.	.	.	1	.	14	11	.	3	1	110 8
Saint-Nicolas	2	2	.	4	.	8	.	2	.	.	.	.	1	4	4	4	6	14	.	.	.	.	.	1	1	17	10	5	.	1	83.9
L'Alexandre	1	1	.	3	.	5	11	1	.	.	.	.	.	3	5	2	12	17	0	.	.	.	.	4	0	14	21	1	1	.	103,7
Phare d'Hourtin	1	.	.	6	.	8	3	0	.	.	.	.	0	5	7	1	8	14	1	.	.	.	.	2	.	17	16	2	.	.	89,2
Gressier	3	3	2	.	.	1	8	0	.	.	.	.	.	3	3	3	9	16	2	.	.	.	0	4	0	17	9	2	2	.	87.5
Salie	.	1	5	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	2	10	6	9	9	.	.	.	.	.	7	2	21	11	1	0	.	83,0
Grand-Mont	.	1	5	.	8	1	3	.	.	.	.	0	6	4	11	9	13	0	.	.	.	.	0	1	19	14	3	0	0	.	98,7
Moutchic	.	2	.	3	.	2	8	5	.	.	.	.	.	4	2	3	11	20	.	.	.	.	.	6	2	7	12	.	3	7	97,1
Gleize-Vieille	.	2	.	3	.	7	6		.	.	.	.	.	4	3	6	19	12	1	.	.	.	.	4	.	17	12	2	2	.	100,5
Le Porge	.	2	.	3	.	2	2	.	.	.	.	.	.	4	3	8	16	19	1	.	.	.	.	5	0	22	11	3	2	.	102,6
Arès	2	2	3	.	.	2	0	1	.	.	.	.	.	5	5	5	19	5	1	.	.	.	0	1	1	22	12	2	2	.	88,3
Piquey	4	.	.	7	.	3	.	.	.	.	.	.	.	5	5	12	9	11	1	.	.	.	.	1	.	17	10	1	1	.	86,3
Cazaux	.	.	.	7	0	4	.	.	.	.	.	.	.	3	10	2	9	13	.	.	.	1	6	5	20	7	5	3	1	.	95,2
Saint-Julien	.	.	.	7	.	.	20	5	.	.	.	.	.	.	11	.	11	.	.	.	.	.	.	.	40	.	.	2	.	.	95,1
Sainte-Hélène	2	.	.	8	1	.	.	.	.	.	12	.	.	.	5	8	12	27	1	.	.	.	1	7	1	26	29	2	0	.	140.0
Audenge	.	.	.	6	.	17	.	.	.	.	.	.	.	6	4	3	6	.	.	.	.	.	3	9	11	13	3	3	.	3	87,8
Belin	1	0	.	10	1	.	.	.	.	.	.	.	.	4	7	18	5	10	1	.	.	.	2	7	0	17	8	3	.	.	93.1
Saint-Savin	1	3	.	10	.	1	5	.	.	.	.	.	.	7	9	7	4	19	.	.	.	.	.	3	2	23	16	1	.	.	112,1
Saint-André-de-Cubzac	2	.	.	13	1	11	5	.	.	.	.	.	.	10	12	.	.	20	.	.	.	.	2	5	.	12	22	1	1	.	117,9
Bordeaux (Observat^re)	2	.	.	15	.	0	2	.	.	.	0	.	.	5	12	4	3	12	2	.	.	.	3	5	1	19	10	1	1	.	94,1
Talence	2	.	.	14	.	0	2	.	.	.	.	.	.	5	6	8	1	15	2	.	.	.	0	6	2	16	16	0	0	.	94,9
La Sauve	3	6	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	15	12	4	13	.	.	.	.	.	6	1	19	11	3	.	.	114,7
Machorre	5	9	.	36	.	.	1	.	.	.	.	.	.	2	15	4	2	9	1	.	.	.	.	4	1	13	7	1	1	.	110,4
Saint-André-du-Bois	7	5	.	31	.	0	1	.	.	.	.	.	1	2	15	2	1	10	1	.	.	.	.	5	1	14	8	1	1	.	106,4
Captieux	.	2	.	14	2	.	1	.	.	.	.	.	.	7	14	.	15	10	0	.	.	.	.	18	1	12	7	4	.	2	108 3
Coutras	.	.	2	.	.	.	5	.	.	.	.	.	.	6	13	7	1	16	2	.	.	.	1	2	1	13	18	0	1	.	88.1
Les Eglisottes	4	.	1	3	.	.	6	.	.	.	.	.	.	6	10	9	.	20	.	.	.	.	.	3	4	18	13	.	3	.	97,0
Lussac	.	3	.	5	.	0	4	.	.	.	.	.	.	2	10	6	2	15	1	.	.	.	.	6	1	14	16	1	1	.	86,4
Sauveterre	3	.	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	13	1	3	8	.	.	.	.	.	.	7	16	9	.	9	.	87,3
La Réole	2	4	.	12	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3	9	6	1	8	.	.	.	.	.	3	1	16	0	1	.	.	65,2
Grignols	5	7	.	24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	11	7	6	5	2	.	.	.	.	13	.	10	14	2	1	.	111,7

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Mai* 1882.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave	2	.	.	11	0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	0	4	4	.	2	0	.	2	1	16	.	47.8
Soulac	2	.	.	12	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	.	4	2	1	.	.	.	2	18	.	47.3
Saint-Nicolas	5	.	.	11	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	5	.	1	2	.	4	1	37	.	68,7
L'Alexandre	7	.	.	11	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	4	.	.	.	8	5	1	17	.	59,8
Phare d'Hourtin	13	.	.	12	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	.	4	.	.	1	2	4	1	16	.	58,6
Gressier	8	.	11	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	8	.	.	.	4	6	2	28	.	72,4
Salie	1	.	.	8	3	.	.	3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	9	3	.	6	.	0	.	12	15	10	8	1	78,9
Grand-Mont	11	.	.	13	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	4	.	1	.	1	4	1	20	.	59,2
Moutchic	6	.	.	9	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	3	10	2	18	.	59,5
Gleize-Vieille	8	.	.	12	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	0	0	8	.	0	.	3	10	3	22	.	73,1
Le Porge	8	.	.	15	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	6	0	.	8	.	1	.	4	11	3	18	.	78,3
Arès	8	.	.	14	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	7	1	.	5	.	0	.	7	11	3	15	.	75.1
Piquey	8	.	.	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	7	.	.	4	.	.	.	7	11	3	14	.	66,7
Cazaux	.	.	.	13	1	.	.	5	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	9	.	.	13	.	.	.	.	11	3	15	.	69,9
Saint-Julien	.	.	.	26	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	5	.	.	17	.	.	.	12	8	.	13	.	84.4
Sainte-Hélène	9	0	.	17	3	8	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	7	.	9	.	.	.	8	1	5	25	1	99,6
Audenge	.	.	6	.	13	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	3	.	5	.	.	.	14	3	.	23	.	76,2
Belin	0	.	.	24	3	.	.	17	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	4	11	.	5	0	.	4	50	9	4	11	.	142,3
Saint-Savin	4	.	.	22	2	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	12	.	6	.	.	.	15	8	.	16	3	93,2
Saint-André-de-Cubzac	1	.	.	23	2	7	.	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	6	.	8	.	.	.	15	10	1	12	.	100,1
Bordeaux (Observat[re])	2	0	.	34	4	2	.	19	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	3	1	8	0	1	.	15	8	5	15	1	121,6
Talence	1	.	.	32	5	5	.	14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	3	.	8	2	1	.	15	9	.	19	.	116,7
La Sauve	2	.	.	7	6	2	.	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	10	.	6	.	.	2	28	4	5	8	.	89,0
Machorre	1	.	.	23	4	2	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	6	.	1	.	0	1	27	2	5	10	0	90,9
Saint-André-du-Bois	1	.	.	26	4	1	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	10	0	4	0	0	1	37	8	10	0	113,6
Captieux	8	.	.	36	1	1	.	3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	7	.	1	3	.	.	7	19	.	10	36	.	131,4
Coutras	.	.	.	26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	2	.	26	1	.	.	32	3	6	26	0	124,0
Les Eglisottes	1	.	.	27	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	8	2	10	.	2	.	30	.	11	28	0	126,5
Lussac	1	0	.	24	3	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	16	1	11	0	0	2	31	4	7	27	1	136,6
Sauveterre	3	.		11	7	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	6	5	15	3	.	5	9	5	9	20	.	106,6
La Réole	3	.	.	19	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	2	23	2	.	1	.	17	.	7	25	.	105.3
Grignols	10	.	.	25	8	1	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	4	0	3	.	2	5	20	.	2	19	.	109,9

TABLES GÉNÉRALES

DES CINQ VOLUMES

DE LA DEUXIÈME SÉRIE

TABLES GÉNÉRALES

DES CINQ VOLUMES

DE LA DEUXIÈME SÉRIE

(1876-1884)

TABLES GÉNÉRALES

DES 5 VOLUMES DE LA 2me SÉRIE

(1876-1884)

TABLE I

Liste des Mémoires par noms d'auteurs.

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Mars* 1882.

STATIONS	1	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	15	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave	10	12	10	13	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	.	1	6	.	.	.	.	3	58,5
Soulac	8	11	14	11	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	1	3	.	.	.	.	4	58.1
Saint-Nicolas	4	9	22	5	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	5		.	2	4	.	.	.	.	4	53.3
L'Alexandre	5	12	33	6	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	3	2	2	6	.	.	.	5	80.3
Phare d'Hourtin	.	5	6	3	11	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	4	2	4	.	.	.	6	47,6
Gressier	2	8	37	12	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	2	0	5	1	4	.	.	.	4	77.8
Salie	6	4	14	9	0	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	1	4	7	.	.	.	.	2	54 0
Grand-Mont	3	6	23	9	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	2	3	0	.	.	.	5	58 6
Moutchic	4	8	32	13	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	5	5	4	.	.	.	6	84.7
Gleize-Vieille	2	9	33	15	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	2	.	5	4	4	2	.	.	4	47.2
Le Porge	1	12	34	20	.	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	2	.	7	4	4	.	.	.	4	97,5
Arès	2	11	19	9	.	2	1	.	0	0	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	4	2	1	5	3	5	.	.	.	4	69 3
Piquey	2	9	9	7	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	2	.	4	2	1	.	.	.	4	44 6
Cazaux	4	3	7	12	4	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	1	8	3	2	.	.	.	3	57 2
Saint-Julien	1	8	.	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	5	.	.	.	.	.	26 8
Sainte-Hélène	2	10	46	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	2	1	.	4	4	2	.	.	.	3	80 3
Audenge	1	6	13	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	6	3	.	.	.	6	47 0
Belin	1	1	23	10	.	2	2	0	.	.	0	.	.	.	.	0	.	0	.	.	0	2	3	0	3	3	2	.	.	.	2	55 7
Saint-Savin	12	6	26	9	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	3	5	.	.	.	.	3	67 6
Saint-André-de-Cubzac	2	6	37	10	.	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	3	.	.	.	.	2	63,1
Bordeaux (Observatre)	2	7	19	7	.	1	1	.	0	0	0	0	.	.	.	0	.	0	0	.	0	3	2	.	2	2	4	.	.	.	4	58 8
Talence	2	5	21	9	.	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	2	.	2	4	.	.	3	.	53.4
La Sauve	3	7	22	7	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	3	4	1	.	.	.	7	62.1
Machorre	2	6	34	4	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	1	3	2	.	.	.	3	65.1
Saint-André-du-Bois	2	4	38	4	.	2	3	0	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	0	0	.	4	1	.	2	4	3	.	.	.	3	70,8
Captieux	1	9	16	5	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	3	2	6	.	.	.	2	51,2
Coutras	3	6	24	7	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	1	3	1	.	.	.	3	56.9
Les Eglisottes	4	10	23	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	.	8	2	.	.	.	2	57,0
Lussac	3	4	23	7	.	2	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	.	0	0	.	.	1	3	.	1	3	1	.	.	.	3	50.4
Sauveterre	4	9	36	4	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	2	2	1	2	.	.	.	64,0
La Réole	.	.	36	2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	2	2	1	.	.	.	3	51.8
Grignols	.	7	14	7	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	3	.	2	3	3	.	.	.	3	47,2

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies d'Avril* 1882.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Totaux mm
Phare de Grave	.	.	.	3	.	8	2	.	.	.	.	.	1	4	6	2	6	19	.	.	.	.	.	3	1	11	7	2	1	1	75,7
Soulac	.	.	.	3	.	22	18	.	.	.	.	.	.	4	6	5	6	17	.	.	.	.	.	1	.	14	11	.	3	1	110 8
Saint-Nicolas	2	2	.	4	.	8	.	2	.	.	.	.	1	4	4	4	6	14	.	.	.	.	.	1	1	17	10	5	.	1	83.9
L'Alexandre	1	1	.	3	.	5	11	1	.	.	.	.	.	3	5	2	12	17	0	.	.	.	.	4	0	14	21	1	1	.	103,7
Phare d'Hourtin	1	.	.	6	.	8	3	0	.	.	.	.	0	5	7	1	8	14	1	.	.	.	.	2	.	17	16	2	.	.	89.2
Gressier	3	3	2	.	.	1	8	0	.	.	.	.	.	3	3	3	9	16	2	.	.	.	0	4	0	17	9	2	2	.	87.5
Salie	.	1	5	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	2	10	6	9	9	.	.	.	.	.	7	2	21	11	1	0	.	83,0
Grand-Mont	.	1	5	.	8	1	3	.	.	.	.	0	6	4	11	9	13	0	.	.	.	.	0	1	19	14	3	0	0	.	98,7
Moutchic	.	2	.	3	.	2	8	5	.	.	.	.	.	4	2	3	11	20	.	.	.	.	.	6	2	7	12	.	3	7	97,1
Gleize-Vieille	.	2	.	3	.	7	6	.	.	.	.	.	.	4	3	6	19	12	1	.	.	.	.	4	.	17	12	2	2	.	100,5
Le Porge	.	2	.	3	.	2	2	.	.	.	.	.	.	4	3	8	16	19	1	.	.	.	.	5	0	22	11	3	2	.	102.6
Arès	2	2	3	.	.	2	0	1	.	.	.	.	.	5	5	5	19	5	1	.	.	.	0	1	1	22	12	2	2	.	88.3
Piquey	4	.	.	7	.	3	.	.	.	.	.	.	.	5	5	12	9	11	1	.	.	.	.	1	.	17	10	1	1	.	86,3
Cazaux	.	.	.	7	0	4	.	.	.	.	.	.	.	3	10	2	9	13	.	.	.	1	6	5	20	7	5	3	1	.	95,2
Saint-Julien	.	.	.	7	.	.	20	5	.	.	.	.	.	.	11	.	11	.	.	.	.	.	.	.	40	.	.	2	.	.	95,1
Sainte-Hélène	2	.	.	8	1	.	.	.	.	.	12	.	.	.	5	8	12	27	1	.	.	.	1	7	1	26	29	2	0	.	140.0
Audenge	.	.	.	6	.	17	.	.	.	.	.	.	.	6	4	3	6	.	.	.	.	.	3	9	11	13	3	3	.	3	87.8
Belin	1	0	.	10	1	.	.	.	.	.	.	.	.	4	7	18	5	10	1	.	.	.	2	7	0	17	8	3	.	.	93.1
Saint-Savin	1	3	.	10	.	1	5	.	.	.	.	.	.	7	9	7	4	19	.	.	.	.	.	3	2	23	16	1	.	.	112,1
Saint-André-de-Cubzac	2	.	.	13	1	11	5	.	.	.	.	.	.	10	12	.	.	20	.	.	.	.	2	5	.	12	22	1	1	.	117.9
Bordeaux (Observatre)	2	.	.	15	.	0	2	.	.	.	0	.	.	5	12	4	3	12	2	.	.	.	3	5	1	19	10	1	1	.	94,1
Talence	2	.	.	14	.	0	2	.	.	.	.	.	.	5	6	8	1	15	2	.	.	.	0	6	2	16	16	0	0	.	94,9
La Sauve	3	6	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	15	12	4	13	.	.	.	.	.	6	1	19	11	3	.	.	114,7
Machorre	5	9	.	36	.	.	1	.	.	.	.	.	.	2	15	4	2	9	1	.	.	.	.	4	1	13	7	1	1	.	110,4
Saint-André-du-Bois	7	5	.	31	.	0	1	.	.	.	.	.	1	2	15	2	1	10	1	.	.	.	.	5	1	14	8	1	1	.	106.4
Captieux	.	2	.	14	2	.	1	.	.	.	.	.	.	7	14	.	15	10	0	.	.	.	.	18	1	12	7	4	.	2	108 3
Coutras	.	.	2	.	.	.	5	.	.	.	.	.	.	6	13	7	1	16	2	.	.	.	1	2	1	13	18	0	1	.	88.1
Les Eglisottes	4	.	1	3	.	.	6	.	.	.	.	.	.	6	10	9	.	20	.	.	.	.	.	3	4	18	13	.	3	.	97,0
Lussac	.	3	.	5	.	0	4	.	.	.	.	.	.	2	10	6	2	15	1	.	.	.	.	6	1	14	16	1	1	.	86.4
Sauveterre	3	.	.	18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	13	1	3	8	.	.	.	.	.	.	7	16	9	.	9	.	87.3
La Réole	2	4	.	12	.	.	1	.	.	.	.	.	.	3	9	6	1	8	.	.	.	.	.	3	1	16	0	1	.	.	65,2
Grignols	5	7	.	24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	11	7	6	5	2	.	.	.	.	13	.	10	14	2	1	.	111,7

Commission Météorologique de la Gironde. — *Pluies de Mai* 1882.

STATIONS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	Totaux mm
Phare de Grave.........	2	.	.	11	0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	0	4	4	.	2	0	.	2	1	16	.	47,8
Soulac..............	2	.	.	12	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	.	4	2	1	.	.	.	2	18	.	47.3
Saint-Nicolas...........	5	.	.	11	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	5	.	1	2	.	4	1	37	.	68,7
L'Alexandre............	7	.	.	11	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	4	.	.	.	8	5	1	17	.	59,8
Phare d'Hourtin........	13	.	.	12	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	.	4	.	.	1	2	4	1	16	.	58,6
Gressier...............	8	.	11	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	0	.	8	.	.	.	4	6	2	28	.	72.4
Salie.................	1	.	.	8	3	.	.	3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	9	3	.	6	.	0	.	12	15	10	8	1	78,9
Grand-Mont............	11	.	.	13	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	4	.	1	.	1	4	1	20	.	59,2
Moutchic..............	6	.	.	9	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	3	10	2	18	.	59,5
Gleize-Vieille...........	8	.	.	12	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	0	0	8	.	0	.	3	10	3	22	.	73,1
Le Porge..............	8	.	.	15	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	6	0	.	8	.	1	.	4	11	3	18	.	78,3
Arès..................	8	.	.	14	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	7	1	.	5	.	0	.	7	11	3	15	.	75.1
Piquey................	8	.	.	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	7	.	.	4	.	.	.	7	11	3	14	.	66,7
Cazaux................	.	.	.	13	1	.	.	5	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	9	.	.	13	.	.	.	.	11	3	15	.	69,9
Saint-Julien............	.	.	.	26	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	5	.	.	17	.	.	.	12	8	.	13	.	84.4
Sainte-Hélène..........	9	0	.	17	3	8	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	7	.	9	.	.	.	8	1	5	25	1	99,6
Audenge...............	.	.	6	.	13	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	3	.	5	.	.	.	14	3	.	23	.	76,2
Belin.................	0	.	.	24	3	.	.	17	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	4	11	.	5	0	.	4	50	9	4	11	.	142,3
Saint-Savin............	4	.	.	22	2	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	12	.	6	.	.	.	15	8	.	16	3	93,2
Saint-André-de-Cubzac..	1	.	.	23	2	7	.	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	6	.	8	.	.	.	15	10	1	12	.	100,1
Bordeaux (Observat^re^)...	2	0	.	34	4	2	.	19	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	3	1	8	0	1	.	15	8	5	15	1	121,6
Talence...............	1	.	.	32	5	5	.	14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	3	.	8	2	1	.	15	9	.	19	.	116,7
La Sauve..............	2	.	.	7	6	2	.	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	10	.	6	.	.	2	28	4	5	8	.	89,0
Machorre..............	1	.	.	23	4	2	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	6	.	1	.	0	1	27	2	5	10	0	90,9
Saint-André-du-Bois....	1	.	.	26	4	1	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	10	0	4	0	0	1	37	8	10	0	113.6
Captieux..............	8	.	.	36	1.	1	.	3	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	7	.	1	3	.	.	7	19	.	10	36	.	131,4
Coutras...............	.	.	.	26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	2	.	26	1	.	.	32	3	6	26	0	124,0
Les Eglisottes..........	1	.	.	27	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	8	2	10	.	2	.	30	.	11	28	0	126.5
Lussac.	1	0	.	24	3	.	.	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	16	1	11	0	0	2	31	4	7	27	1	136.6
Sauveterre..	3	.		11	7	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	6	5	15	3	.	5	9	5	9	20	.	106,6
La Réole..............	3	.	.	19	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	2	23	2	.	1	.	17	.	7	25	.	105.3
Grignols...............	10	.	.	25	8	1	.	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	4	0	3	.	2	5	20	.	2	19	.	109,9

TABLES GÉNÉRALES

DES CINQ VOLUMES

DE LA DEUXIÈME SÉRIE

TABLES GÉNÉRALES

DES CINQ VOLUMES

DE LA DEUXIÈME SÉRIE

(1876-1884)

TABLE II

Par ordre de Matières.

TABLE III

Liste des noms cités.

